FACOLTA' DI INGEGNERIA

Classe dell'Informazione - Corso D–F

COMPITO D

Prova d'Esonero di **Algebra Lineare** assegnata il 18/11/2002

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente sottospazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 2, 1)$. Verificare che l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ definita dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1+h, 2h+1, 3h, 2h) \\ f(v_2) &= (h, 2h+1, 5-h, 3) \\ f(v_3) &= (0, 0, 2h, h) \end{aligned}$$

induce un endomorfismo g su V per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

2) Studiare g al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

3) Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Sia $h = 1$. Trovare una base di autovettori.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_4 = (1, 2, 1, 1)$. Determinare il valore reale h per cui le relazioni

$$f(w_1) = (1, 1-2h, -1, 0) \quad f(w_2) = (0, 2h, 1-2h, 1)$$
$$f(w_3) = (1, h, -3h, 0) \quad f(w_4) = (0, 0, 1-h, 2)$$

definiscono un'applicazione lineare $f : W \to \mathbb{R}^4$.

1. Studiare f trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Trovare $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

III

Sia V un k-spazio vettoriale.

1. Dire che $V = V_1 \bigoplus V_2$ vuol dire che...
2. I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti se...

Soluzione

I

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} 1+h & h & 0 \\ h & h+1 & 0 \\ h & 2-h & h \end{vmatrix} = h(2h+1)$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0, -\frac{1}{2}$ ed in tali casi f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}} = v_1$ ed $u_2 = (0,1,2)_{\mathcal{B}} = (0,1,5,3)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in V \mid x = 0, y = 0\}$, pertanto una base è generata da $u_3 = (0,0,1)_{\mathcal{B}} = v_3$.
Sia $h = -\frac{1}{2}$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (0,0,-\frac{1}{2})_{\mathcal{B}} = -\frac{1}{2}v_3$ ed $u_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_{\mathcal{B}} = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -1)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in V \mid x = \frac{1}{4}z, y = x\}$, pertanto una base è data da $u_3 = (1,1,4)_{\mathcal{B}} = (1,2,9,5)$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} 1+h-T & h & 0 \\ h & h+1-T & 0 \\ h & 2-h & h-T \end{vmatrix} = (h-T)\left[(h+1-T)^2 - h^2\right] =$$

$$= (h-T)(1-T)(2h+1-T)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h, \quad T_2 = 1, \quad T_3 = 2h+1 \,.$$

Se $h \neq -1, 0, 1$, allora $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ e si hanno tre autovalori distinti. Dunque, f è semplice.
Sia $h = -1$; si ha $T_1 = 1$ semplice e $T_2 = -1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_{-1}$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_{-1} = 1$ e pertanto per $h = -1$ f non è semplice.
Sia $h = 0$; si ha $T_1 = 0$ semplice e $T_2 = 1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_1$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

uguale ad uno si ha $\dim V_1 = 2$ e pertanto per $h = 0$ f è semplice.
Sia $h = 1$; si ha $T_1 = 3$ semplice e $T_2 = 1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_1$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

guale ad uno si ha $\dim V_1 = 2$ e pertanto anche per $h = 1$ f è semplice.
Sia $h = 1$. Calcoliamo una base di autovettori. Si ha

$$V_1 = \{(x, y, z) \in V \mid x = -y\} = \{(x, -x, z)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}} = (1, 0, -1, -1)$ e dal vettore $w_2 = (0, 0, 1) = v_3$.
Analogamente, si ha:

$$V_3 = \{(x, y, z) \in V \mid x = y = z\} = \{(x, x, x)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 2, 3, 2)$.
Pertanto una base di autovettori è data da w_1, w_2 e w_3.

II

I vettori $w_1 = (1, 0, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_4 = (1, 2, 1, 1)$ linearmente dipendenti. In particolare, si ha $w_4 = w_1 + 2w_2 - w_3$ e pertanto le relazioni assegnate definiscono un'applicazione lineare se

$$f(w_4) = f(w_1) + 2f(w_2) - f(w_3)$$

e questo è vero se e solo se

$$(0, h + 1, 1 - h, 2) = (0, 0, 1 - h, 2)$$

ovvero se e solo se $h = -1$. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_2\}$ una base di V. Allora, se con $\mathcal{E}$ indichiamo la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si ha

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, riducendo la matrice, si ottiene che $\rho(A) = 3 = \dim Imf$, pertanto $\dim Kerf = 0$ e la f è iniettiva.
Per calcolare $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, basta risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo la cui colonna di termini noti è data da $(a, a+1, 0, 1)$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & a \\ 3 & -2 & -1 & | & a+1 \\ -1 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

e riducendo si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & a \\ 4 & -2 & 0 & | & 2a+1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & | & a \end{pmatrix}$$

ed applicando il teorema il Rouchè-Capelli si ha:

1. Se $a = 0$ allora $f^{-1}(\mathcal{L}(0, 1, 0, 1))$ è generata dal vettore $(\frac{3}{4}, 1, -\frac{3}{4})_{\mathcal{B}}$
2. Se $a \neq 0$ allora il sistema è impossibile ed $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1)) = \emptyset$