FACOLTA' DI INGEGNERIA

Classe dell'Informazione - Corso D–F

COMPITO C

Prova d'Esonero di **Algebra Lineare** assegnata il 18/11/2002

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente sottospazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,2,1)$. Verificare che l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ definita dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, h, 0, 0) \\ f(v_2) &= (h+2, 2h+2, h+8, h+4) \\ f(v_3) &= (0, -h, -3h-4, -2h-2) \end{aligned}$$

induce un endomorfismo g su V per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

2) Studiare g al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

3) Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Sia $h = -1$. Trovare una base di autovettori.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1,0,0,1)$, $w_2 = (0,1,1,0)$, $w_3 = (0,0,1,0)$ e $w_4 = (1,2,1,1)$. Determinare il valore reale h per cui le relazioni

$$f(w_1) = (2h+1, 1, 2, 0) \quad f(w_2) = (0, h+1, 1, 1)$$
$$f(w_3) = (0, 2h, 2h-2, 1) \quad f(w_4) = (1, 3, 6, 1)$$

definiscono un'applicazione lineare $f : W \to \mathbb{R}^4$.

1. Studiare f trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Trovare $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, -a))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

III

Sia V un k-spazio vettoriale.

1. Dire che $V = V_1 \bigoplus V_2$ vuol dire che...
2. I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti se...

Soluzione

I

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h} & \text{h+2} & 0 \\ 0 & \text{h} & \text{-h} \\ 0 & 4 & \text{-h-2} \end{vmatrix} = h^2(2-h)$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0, 2$ ed in tali casi f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (2, 0, 4)_{\mathcal{B}} = (2, 2, 8, 4)$ ed $u_2 = (0, 0, -2)_{\mathcal{B}} = (0, 0, -4, -2)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in V \mid y = 0, z = 0\}$, pertanto una base è generata da $u_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}} = v_1$.
Sia $h = 2$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (2, 0, 0)_{\mathcal{B}} = (2, 2, 0, 0)$ ed $u_2 = (4, 2, 4)_{\mathcal{B}} = (4, 6, 10, 6)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in V \mid x = -2y, z = y\}$, pertanto una base è data da $u_3 = (2, -1, -1)_{\mathcal{B}} = (2, 1, -3, -2)$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & \text{h+2} & 0 \\ 0 & \text{h-T} & \text{-h} \\ 0 & 4 & \text{-h-2-T} \end{vmatrix} = (h-T)\left[T^2 + 2T + 2h - h^2\right] =$$

$$= (h-T)(T+h)(T-h+2)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h, \quad T_2 = -h, \quad T_3 = h-2\,.$$

Se $h \neq 0, 1$, allora $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ e si hanno tre autovalori distinti. Dunque, f è semplice.
Sia $h = 0$; si ha $T_1 = -2$ semplice e $T_2 = 0$ doppio. Calcoliamo $\dim V_0$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_0 = 1$ e pertanto per $h = 0$ f non è semplice.
Sia $h = 1$; si ha $T_1 = 1$ semplice e $T_2 = -1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_{-1}$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_{-1} = 1$ e pertanto anche per $h = 1$, f non è semplice.
Sia $h = -1$; allora f ha i tre autovalori distinti $T_1 = -1, T_2 = 1$ e $T_3 = -3$. Calcoliamo V_{-1}; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha:

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in V \mid y = 0, z = 0\} = \{(x, 0, 0)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}} = v_1$.
Analogamente,

$$V_1 = \{(x, y, z) \in V \mid y = 2x, z = 4x\} = \{(x, 2x, 4x)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_2 = (1, 2, 4)_{\mathcal{B}} = (1, 3, 10, 6)$.

$$V_{-3} = \{(x, y, z) \in V \mid y = -2x, z = 4x\} = \{(x, -2x, 4x)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (1, -2, 4)_{\mathcal{B}} = (1, -1, 6, 2)$.

II

I vettori $w_1 = (1, 0, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_4 = (1, 2, 1, 1)$ sono linearmente dipendenti. In particolare, si ha $w_4 = w_1 + 2w_2 - w_3$ e pertanto le relazioni assegnate definiscono un'applicazione lineare se

$$f(w_4) = f(w_1) + 2f(w_2) - f(w_3)$$

e questo è vero se e solo se

$$(2h + 1, 3, 6 - 2h, 1) = (1, 3, 6, 1)$$

ovvero se e solo se $h = 0$. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_2\}$ una base di V. Allora, se con $\mathcal{E}$ indichiamo la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si ha

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, riducendo la matrice, si ottiene che $\rho(A) = 3 = \dim Imf$, pertanto $\dim Kerf = 0$ e la f è iniettiva.
Per calcolare $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, -a))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, basta risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo la cui colonna di termini noti è data da $(a, a+1, 0, -a)$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & 0 & | & a+1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -a \end{pmatrix}$$

e riducendo si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2a-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{-4a-3}{2} \end{pmatrix}$$

ed applicando il teorema il Rouchè-Capelli si ha:

1. Se $a = -\frac{3}{4}$ allora $f^{-1}(\mathcal{L}(-\frac{3}{4}, 1, 0, -\frac{1}{4}))$ è generato dal vettore $(-\frac{1}{2}, 1, 0)_{\mathcal{B}}$
2. Se $a \neq -\frac{3}{4}$ allora il sistema è impossibile ed $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1)) = \emptyset$