FACOLTA' DI INGEGNERIA

Classe dell'Informazione - Corso D–F

COMPITO B

Prova d'Esonero di **Algebra Lineare** assegnata il 18/11/2002

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente sottospazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,2,1)$. Verificare che l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ definita dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (0,2,4,1) \\ f(v_2) &= (0,2h,2h+4,2h+2) \\ f(v_3) &= (h,h-1,2h+5,h+2) \end{aligned}$$

induce un endomorfismo g su V per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

2) Studiare g al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

3) Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Sia $h = 0$. Trovare una base di autovettori.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1,0,0,1)$, $w_2 = (0,1,1,0)$, $w_3 = (0,0,1,0)$ e $w_4 = (1,2,1,1)$. Determinare il valore reale h per cui le relazioni

$$f(w_1) = (h,2h,3,1) \quad f(w_2) = (h+1,1,0,0)$$

$$f(w_3) = (0,h+1,h+2,1) \quad f(w_4) = (3h+2,0,2,0)$$

definiscono un'applicazione lineare $f : W \to \mathbb{R}^4$.

1. Studiare f trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Trovare $f^{-1}(\mathcal{L}(a,a+1,0,1))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

III

Sia V un k-spazio vettoriale.

1. Dire che $V = V_1 \bigoplus V_2$ vuol dire che...
2. I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti se...

Soluzione

I

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & h \\ 2 & 2h & -1 \\ -1 & 2 & h+3 \end{vmatrix} = 2h(h+2)$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0, -2$ ed in tali casi f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (0, 2, -1)_{\mathcal{B}} = (0, 2, 0, 1)$ ed $u_2 = (0, 0, 2)_{\mathcal{B}} = (0, 0, 4, 2)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in V \mid y = -\frac{5x}{2}, z = 2x\}$, pertanto una base è generata da $u_3 = (2, -5, 4)_{\mathcal{B}} = (2, -3, 3, -1)$.
Sia $h = -2$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (0, 2, -1)_{\mathcal{B}} = (0, 2, 0, 1)$ ed $u_2 = (2, 1, -1)_{\mathcal{B}} = (2, 3, -1, 0)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in V \mid x = 2y, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{u_3 = (2, 1, 0)_{\mathcal{B}} = (2, 3, 1, 1)\}$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} -T & 0 & h \\ 2 & 2h-T & -1 \\ -1 & 2 & h+3-T \end{vmatrix} = (2h - T)\left[T^2 - (h+3)T + h + 2\right] =$$

$$= (2h - T)(T - h - 2)(T - 1)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = 2h, \quad T_2 = h + 2, \quad T_3 = 1\,.$$

Se $h \neq -1, \frac{1}{2}, 2$, allora $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ e si hanno tre autovalori distinti. Dunque, f è semplice.
Sia $h = -1$; si ha $T_1 = -2$ semplice e $T_2 = 1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_1$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_1 = 1$ e pertanto per $h = -1$ f non è semplice.
Sia $h = \frac{1}{2}$; si ha $T_1 = \frac{3}{2}$ semplice e $T_2 = 1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_1$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_1 = 1$ e quindi per $h = \frac{1}{2}$, f non è semplice.
Sia $h = 2$; si ha $T_1 = 1$ semplice e $T_2 = 4$ doppio. Calcoliamo $\dim V_4$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_4 = 1$ e pertanto per $h = 2$ f non è semplice.
Sia $h = 0$; allora f ha i tre autovalori distinti $T_1 = 0, T_2 = 2$ e $T_3 = 1$. Calcoliamo V_0; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha:

$$V_0 = \{(x, y, z) \in V \mid y = \frac{-5x}{2}, z = 2x\} = \{(2x, -5x, 4x)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (2, -5, 4)_{\mathcal{B}} = (2, -3, 3, -1)$.
Analogamente,

$$V_2 = \{(x, y, z) \in V \mid x = 0, z = -2y\} = \{(0, y, -2y)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_2 = (0, 1, -2)_{\mathcal{B}} = (0, 1, -3, -1)$.

$$V_1 = \{(x, y, z) \in V \mid x = 0, y = -z\} = \{(0, -z, z)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (0, -1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1, -1, 0)$.
Quindi una base di autovettori è data da w_1, w_2, w_3.

II

I vettori $w_1 = (1, 0, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_4 = (1, 2, 1, 1)$ linearmente dipendenti. In particolare, si ha $w_4 = w_1 + 2w_2 - w_3$ e pertanto le relazioni assegnate definiscono un'applicazione lineare se

$$f(w_4) = f(w_1) + 2f(w_2) - f(w_3)$$

e questo è vero se e solo se

$$(3h+2, h+1, 1-h, 0) = (3h+2, 0, 2, 0)$$

ovvero se e solo se $h = -1$. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_2\}$ una base di V. Allora, se con $\mathcal{E}$ indichiamo la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si ha

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, riducendo la matrice, si ottiene che $\rho(A) = 3 = \dim Imf$, pertanto $\dim Kerf = 0$ e la f è iniettiva.
Per calcolare $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, basta risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo la cui colonna di termini noti è data da $(a, a+1, 0, 1)$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & a \\ -2 & 1 & 0 & | & a+1 \\ 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

e riducendo si ottiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & | & 3a \\ 0 & 0 & 0 & | & 1-2a \end{pmatrix}$$

ed applicando il teorema il Rouchè-Capelli si ha:

1. Se $a = \frac{1}{2}$ allora $f^{-1}(\mathcal{L}(\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, 0, 1))$ è generato dal vettore $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})_{\mathcal{B}}$
2. Se $a \neq \frac{1}{2}$ allora il sistema è impossibile ed $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1)) = \emptyset$