FACOLTA' DI INGEGNERIA

Classe dell'Informazione - Corso D–F

COMPITO A

Prova d'Esonero di **Algebra Lineare** assegnata il 18/11/2002

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente sottospazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,2,1)$. Verificare che l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ definita dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h,h,2,1) \\ f(v_2) &= (1,0,2h+1,h) \\ f(v_3) &= (4,4,2h,h) \end{aligned}$$

induce un endomorfismo g su V per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

2) Studiare g al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

3) Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Sia $h = 0$. Trovare una base di autovettori.

II

In $\mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1,0,0,1)$, $w_2 = (0,1,1,0)$, $w_3 = (0,0,1,0)$ e $w_4 = (1,2,1,1)$. Determinare il valore reale h per cui le relazioni

$$f(w_1) = (h+3,2,1,0) \quad f(w_2) = (1,h+1,3,h)$$
$$f(w_3) = (0,0,h,1) \quad f(w_4) = (h+5,0,9,-5)$$

definiscono un'applicazione lineare $f : W \to \mathbb{R}^4$.

1. Studiare f trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Trovare $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

III

Sia V un k-spazio vettoriale.

1. Dire che $V = V_1 \bigoplus V_2$ vuol dire che...
2. I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti se...

Soluzione

I

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h} & 1 & 4 \\ 0 & \text{-1} & 0 \\ 1 & \text{h+1} & \text{h} \end{vmatrix} = 4 - h^2$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq \pm 2$ ed in tali casi f è un isomorfismo.
Sia $h = 2$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (2, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (2, 2, 2, 1)$ ed $u_2 = (1, -1, 3)_{\mathcal{B}} = (2, 1, 5, 2)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in V \mid x = -2z, y = 0\}$, pertanto una base è generata da $u_3 = (2, 0, -1)_{\mathcal{B}} = (2, 2, -2, -1)$.
Sia $h = -2$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ con $u_1 = (2, 0, -1)_{\mathcal{B}} = (2, 2, -2, -1)$ ed $u_2 = (1, -1, -1)_{\mathcal{B}} = (1, 0, -3, -2)$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in V \mid x = 2z, y = 0\}$, pertanto una base è data da $u_3 = (2, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (2, 2, 2, 1)$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & 1 & 4 \\ 0 & \text{-1-T} & 0 \\ 1 & \text{h+1} & \text{h-T} \end{vmatrix} = (-1 - T)\left[(h - T)^2 - 4\right] =$$

$$= (-1 - T)(h - T + 2)(h - T - 2)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = -1, \quad T_2 = h - 2, \quad T_3 = h + 2\,.$$

Se $h \neq 1, -3$, allora $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ e si hanno tre autovalori distinti. Dunque, f è semplice.
Sia $h = 1$; si ha $T_1 = 3$ semplice e $T_2 = -1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_{-1}$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_{-1} = 1$ e pertanto per $h = 1$ f non è semplice.
Sia $h = -3$; si ha $T_1 = -5$ semplice e $T_2 = -1$ doppio. Calcoliamo $\dim V_{-1}$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha $\dim V_{-1} = 1$ e pertanto anche per $h = -3$ f non è semplice.
Sia $h = 0$; allora f ha i tre autovalori distinti $T_1 = -1, T_2 = -2$ e $T_3 = 2$. Calcoliamo V_{-1}; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

uguale ad due si ha:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in V \mid x = -y, z = 0\} = \{(x, -x, 0)_{\mathcal{B}}.\}$$

ed una base è data dal vettore $w_1 = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}} = (1, 0, -1, -1)$.
Analogamente, si ha:

$$V_{-2} = \{(x, y, z) \in V \mid x = -2z, y = 0\} = \{(2z, 0, -z)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_2 = (2, 0, -1)_{\mathcal{B}} = (2, 2, -2, -1)$.

$$V_2 = \{(x, y, z) \in V \mid x = 2z, y = 0\} = \{(2z, 0, z)_{\mathcal{B}}\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (2, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (2, 2, 2, 1)$.
Pertanto una base di autovettori è data da w_1, w_2 e w_3.

II

I vettori $w_1 = (1, 0, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_4 = (1, 2, 1, 1)$ linearmente dipendenti. In particolare, si ha $w_4 = w_1 + 2w_2 - w_3$ e pertanto le relazioni assegnate definiscono un'applicazione lineare se

$$f(w_4) = f(w_1) + 2f(w_2) - f(w_3)$$

e questo è vero se e solo se

$$(h + 5, 2h + 4, 7 - h, 2h - 1) = (h + 5, 0, 9, -5)$$

ovvero se e solo se $h = -2$. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_2\}$ una base di V. Allora, se con $\mathcal{E}$ indichiamo la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si ha

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, riducendo la matrice, si ottiene che $\rho(A) = 3 = \dim Imf$, pertanto $\dim Kerf = 0$ e la f è iniettiva.
Per calcolare $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, basta risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo la cui colonna di termini noti è data da $(a, a+1, 0, 1)$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & a \\ 2 & -1 & 0 & | & a+1 \\ 1 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

e riducendo si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & a \\ 3 & 0 & 0 & | & 2a+1 \\ 0 & 0 & -2 & | & \frac{4a-7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{8a-3}{6} \end{pmatrix}$$

ed applicando il teorema il Rouchè-Capelli si ha:

1. Se $a = \frac{3}{8}$ allora $f^{-1}(\mathcal{L}(\frac{3}{8}, \frac{11}{8}, 0, 1))$ è generato dal vettore $(\frac{2}{3}, \frac{7}{24}, \frac{11}{12})_{\mathcal{B}}$
2. Se $a \neq \frac{3}{8}$ allora il sistema è impossibile ed $f^{-1}(\mathcal{L}(a, a+1, 0, 1)) = \emptyset$