FACOLTA' DI INGEGNERIA

Classe dell'Informazione – Corso D–F

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 03/07/2003

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- non si possono consultare solo i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ sono assegnati i seguenti vettori: $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$.
Studiare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalle seguenti assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= (2h - 3, 2h, 0) \\ f(\mathbf{v}_2) &= (h - 3, h, 3) \\ f(\mathbf{v}_3) &= (3, 0, 3). \end{aligned}$$

Studiare $M^{\mathcal{E}}(f)$ trovando una base per Im f e Ker f.
Studiare la semplicità di f e, nei casi in cui è semplice, trovare una base di autovettori.

II

Nel piano è assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}$.

1) Trovare e studiare il fascio di coniche tangenti in $A \equiv (1, 1)$ alla retta $r : x - y = 0$, e tangenti in $B \equiv (1, -1)$ alla retta $s : x + y = 0$.

2) Sia $\wp$ la parabola del fascio. Trovare una sua forma canonica, vertice, fuoco, direttrice, asse di simmetria ed il cambiamento di coordinate che la determina.

3) Sia $\mathcal{C}$ circonferenza del fascio. Trovare il cilindro di vertice $V = (0, 1, -1, 0)$ e direttrice $\mathcal{C}$.

Soluzione

I

1) La retta che congiunge i punti A e B ha equazione $x-1=0$, pertanto il fascio di coniche bitangenti ha equazione

$$\phi : \lambda(x+y)(x-y)+\mu(x-1)^2=0$$

Se $\lambda=0$ allora ϕ diventa la conica spezzata nella retta AB contata due volte. Sia $\lambda \neq 0$ e poniamo $h=\frac{\mu}{\lambda}$, si ottiene:

$$\phi : (h+1)x^2-hy^2-2x+1=0\,.$$

Si ha:

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & 0 & -1 \\ 0 & \text{-h} & 0 \\ \text{-1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -h^2$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & 0 \\ 0 & \text{-h} \end{vmatrix} = -h(h+1)$$

Quindi, $|B|=0 \Leftrightarrow h=0$ ed in tal caso ϕ si spezza nelle due rette $x-y=0$ e $x+y=0$. Sia $h \neq 0$:

i) Se $|A|>0 \Leftrightarrow -1<h<0$ si hanno ellissi; inoltre, essendo $a_{11}=a_{22} \Leftrightarrow h=-\frac{1}{2}$, si ha la circonferenza $\mathcal{C} : x^2+y^2-4x+2=0$;

ii) Se $|A|=0 \Leftrightarrow h=-1$ si ha una parabola $\wp : y^2-2x+1=0$;

iii) Se $|A|<0 \Leftrightarrow h<-1, h>0$ si hanno iperboli; in particolare $Tr(A)=0$ mai e quindi non si hanno iperboli equilatere.

3) La parabola richiesta è $\wp : y^2-2x+1=0$. Gli autovalori relativi alla sottomatrice A sono $\alpha=0$ e $\beta=1$. Essendo $|B|=-1$, si ha $-\beta\gamma^2=-1$, da cui si deduce $\gamma=\pm 1$. A questo punto si deve fare la scelta del segno. Il punto improprio della parabola è $X_\infty=(1,0,0)$, il punto improprio in direzione ad esso ortogonale è $Y_\infty=(0,1,0)$, pertanto l'asse di simmetria è la polare di Y_∞, ovvero $y=0$.
Facendo sistema tra l'equazione della parabola e quella dell'asse di simmetria si trova il vertice $V=(-\frac{1}{2},0)$. Adesso si deve trovare la matrice della rototraslazione che permette di ridurre l'equazione di $\wp$ in forma canonica del tipo $\beta Y^2=2\gamma X$. Per individuare il segno di γ, bisogna capire come è posizionata la parabola; essa non interseca l'asse delle y. Interseca l'asse delle x nel vertice. Pertanto la forma canonica $Y^2=-2X$. La matrice della rototraslazione è la seguente:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le formule del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x = X - \frac{1}{2} \\ y = Y \end{cases} \tag{1}$$

Il fuoco e la relativa direttrice nel nuovo sistema di riferimento sono $F = (-\frac{1}{2}, 0)$ e $X = \frac{1}{2},$. Utilizzando le formule (1), si ottiene $F' = (-1, 0)$ e $x - 1 = 0$.

3) La circonferenza del fascio è $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$. Quindi da

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$$

imponendo che $V = (0, 1, -1, 0)$ sia vertice, ovvero che $V = (0, 1, -1, 0)$ sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + \frac{a}{2}z - 2t = 0 \\ y + \frac{b}{2}z = 0 \\ \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + cz + \frac{d}{2}t = 0 \\ -2x + \frac{d}{2}z + 2t = 0 \end{cases},$$

si ottiene

$$a = 0, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 0\,.$$

Pertanto il cilindro richiesto è il seguente

$$\Psi: \; x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 4x + 2 = 0$$

II

Si ha

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)| = \begin{vmatrix} 3 & \text{h-3} & 0 \\ 0 & \text{h} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9h$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ ed in tal caso f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è generata da $\{(3, 0, 0), (0, 0, 3)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x = y, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{(1, 1, 0)$

Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} \text{3-T} & \text{h-3} & 0 \\ 0 & \text{h-T} & 0 \\ 0 & 0 & \text{3-T} \end{vmatrix} = (3 - T)^2(h - T)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h, \quad T_2 = T_3 = 3\,.$$

Allora $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ se $h \neq 3$.
Sia $h \neq 3$; si ha $T_1 = h$ semplice e $T_2 = 3$ doppio. Calcoliamo $\dim V_3$; essendo il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & h-3 & 0 \\ 0 & h-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale ad uno si ha $\dim V_3 = 2$ e pertanto per $h \neq 3$ f è semplice. Si ha:

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathrm{I\!R}^3 \; |y = 0\}$$

ed una base è data dai vettori $e_1 = (1, 0, 0)$ e da $e_2 = (0, 1, 0)$.

$$V_h = \{(x, y, z) \in V \mid x = y, z = 0\} = \{(x, x, 0)\}$$

ed una base è data dal vettore $w_3 = (1, 1, 0)$.
Sia $h = 3$; si ha $T_1 = 3$ triplo. Calcoliamo $\dim V_3$; essendo il rango della seguente matrice nulla uguale a zero si ha $\dim V_3 = 3$ e pertanto per $h = 3$ f è semplice. In questo caso una base di autovettori è data dalla base canonica.