



Programmazione 2

Grafi

Prof. Sebastiano Battiato

Prof.ssa Rosalba Giugno



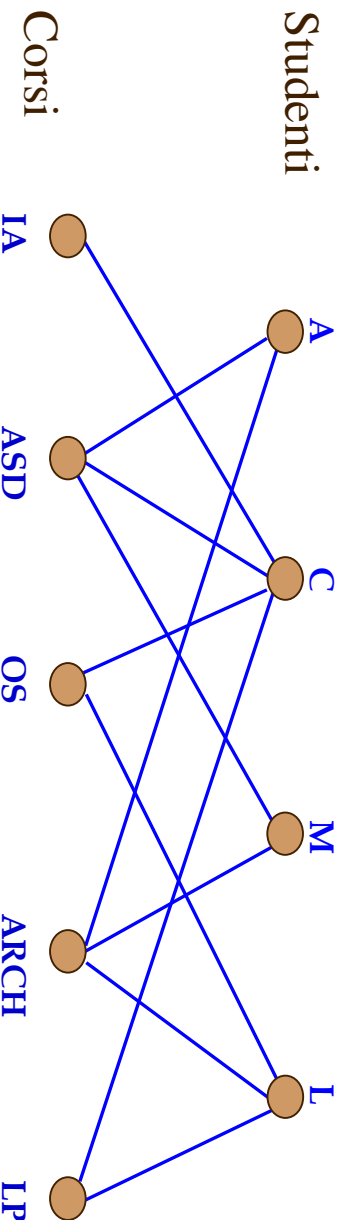
Cos'è un grafo

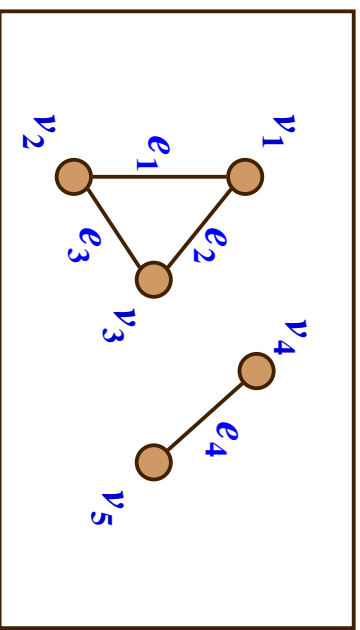
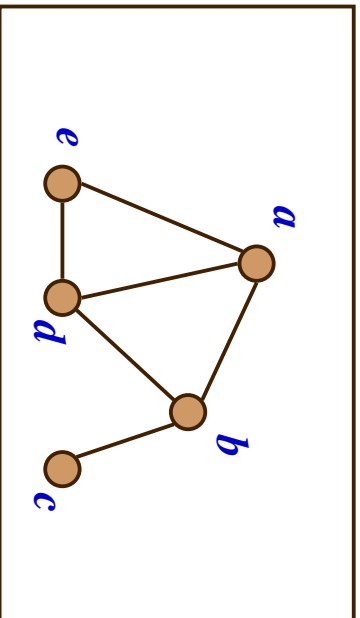
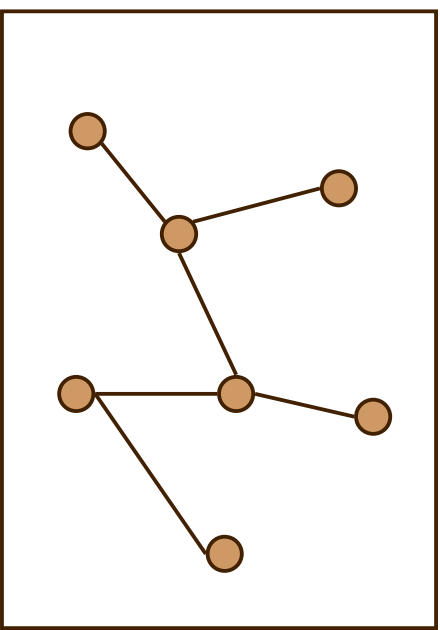
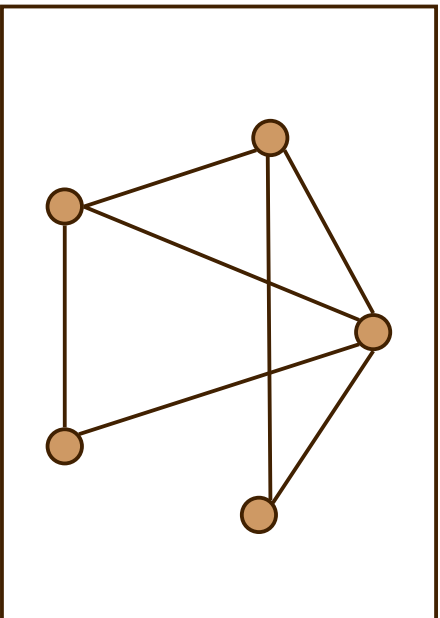
Esempio:

Studenti

Corsi

Marco	ASD, ARCH
Carla	IA, ASD, OS, LP
Andrea	ASD, ARCH
Laura	OS, ARCH, LP





Un **grafo** G è una coppia di elementi (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme detto insieme degli **archi**

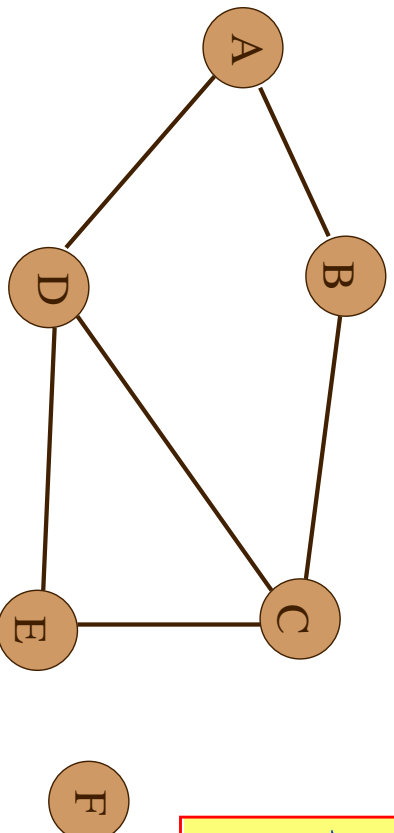


Definizione di grafo

Un **grafo** G è una coppia di elementi (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme detto insieme degli **archi**

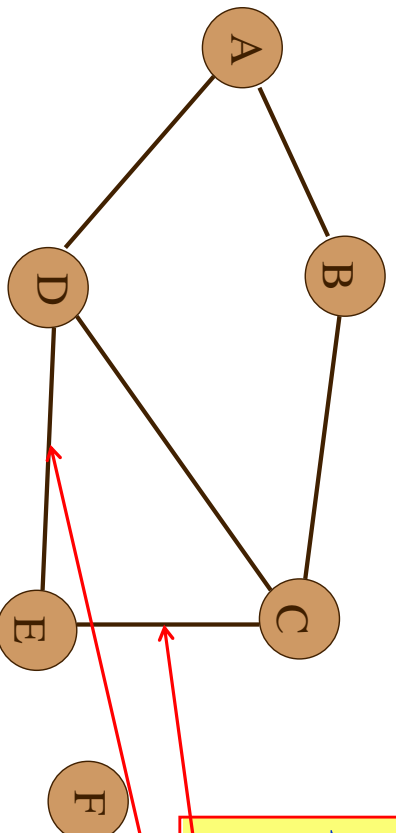


$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)\}$



Definizione di grafo

Un **arco** è una coppia di vertici (v, w) , cioè

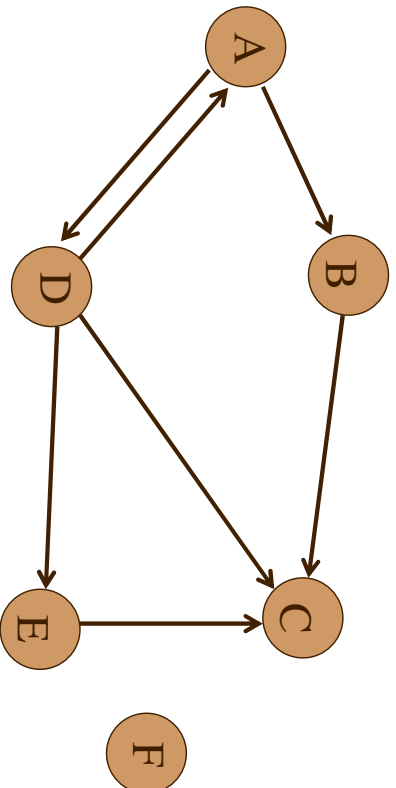


$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)\}$

Un **grafo orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

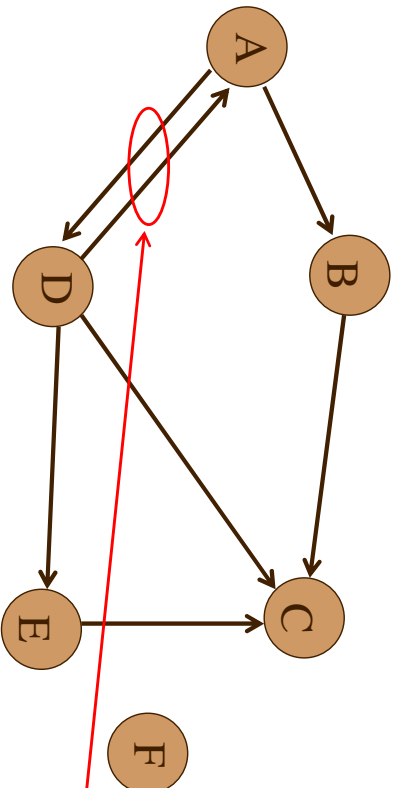
E è una **relazione binaria** tra vertici detta insieme degli **archi**



Un **grafo orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è una **relazione binaria** tra vertici detta insieme degli **archi**



$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (D,C), (E,C), (D,E), (D,A)\}$

(A,D) e (D,A) denotano
 due archi diversi

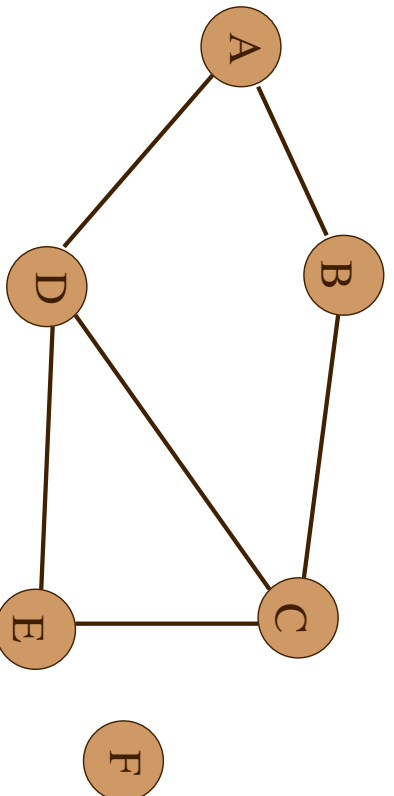


Tipi di grafi: grafi non orientati

Un **grafo non orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme *non ordinato* di coppie di vertici detto insieme degli **archi**



$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)\}$

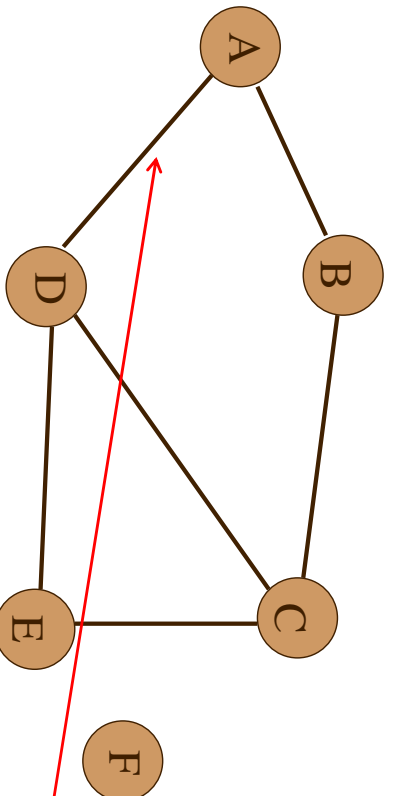


Tipi di grafi: grafi non orientati

Un **grafo non orientato** G è una coppia (V, E) dove:

V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme *non ordinato* di coppie di vertici detto insieme degli **archi**



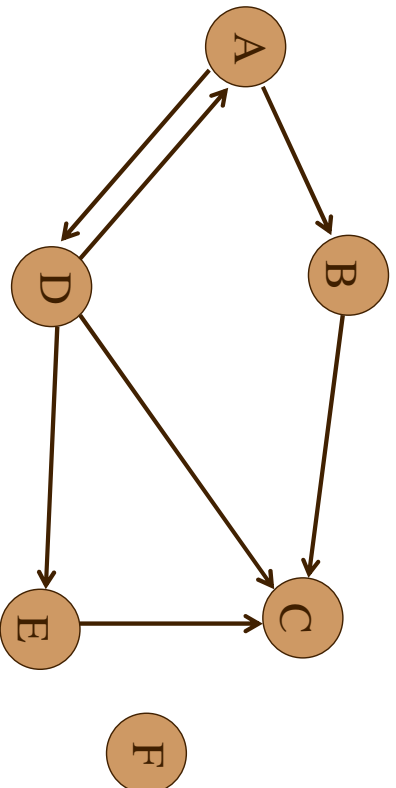
$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)\}$

(A,D) e (D,A) denotano lo stesso arco



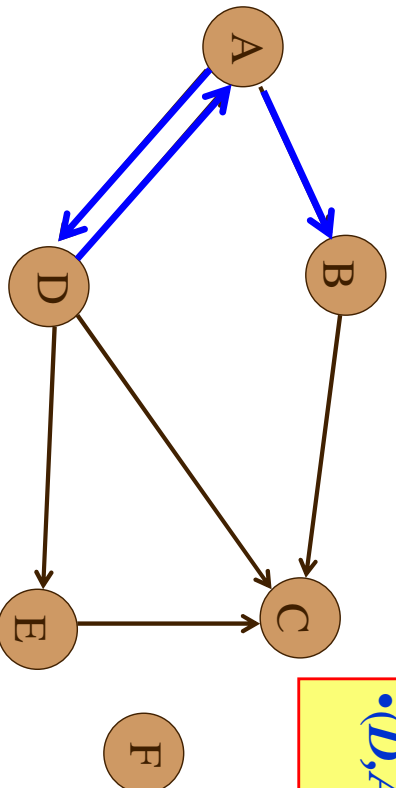
Definizioni sui grafi

In un grafo orientato, un arco (w,v) si dice *incidente da w in v*



Definizioni sui grafi

In un grafo orientato, un arco (w,v) si dice *incidente da w in v*

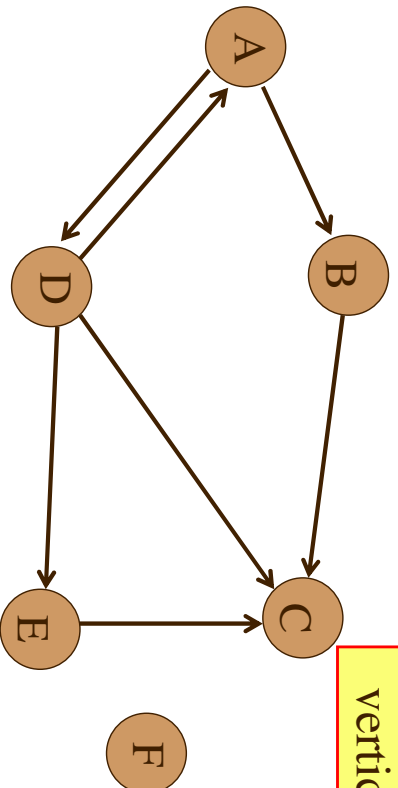


- (A,B) è *incidente da A a B*
- (A,D) è *incidente da A a D*
- (D,A) è *incidente da D a A*

Un vertice w si dice *adiacente* a v se e solo se

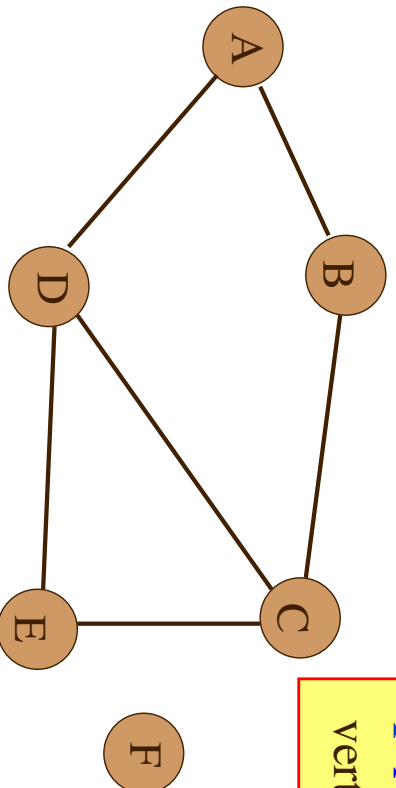
• (v, w) appartiene a

- B è *adiacente* ad A
- C è *adiacente* a B e a D
- A è *adiacente* a D e vice versa
- B *NON* è *adiacente* a D *NÉ* a C
- F *NON* è *adiacente* ad alcun vertice

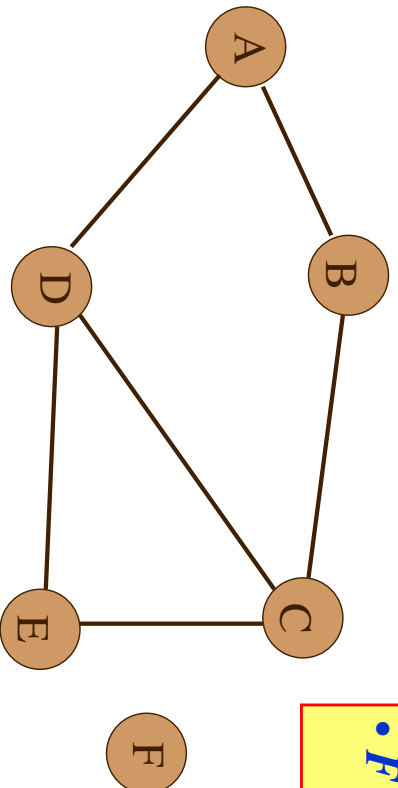


In un *grafo non orientato* la relazione di *adiacenza* tra vertici è *simmetrica*

- A è *adiacente* a D e vice versa
- B è *adiacente* a A e vice versa
- F *NON* è *adiacente* ad alcun vertice

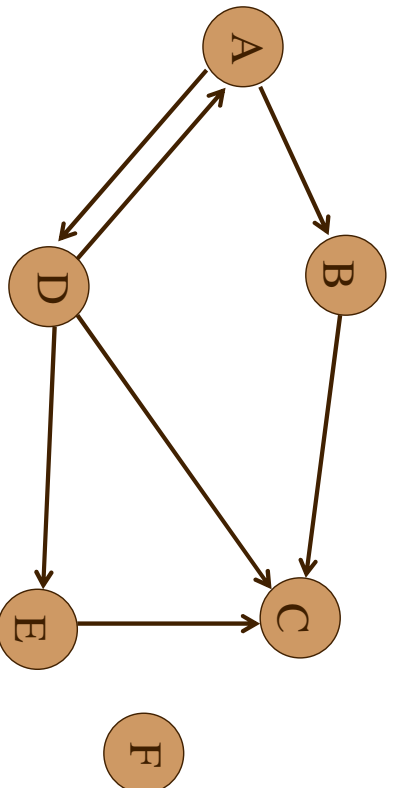


In un *grafo non orientato* il **grado** di un *vertice* è il **numero di archi** che da esso si dipartono



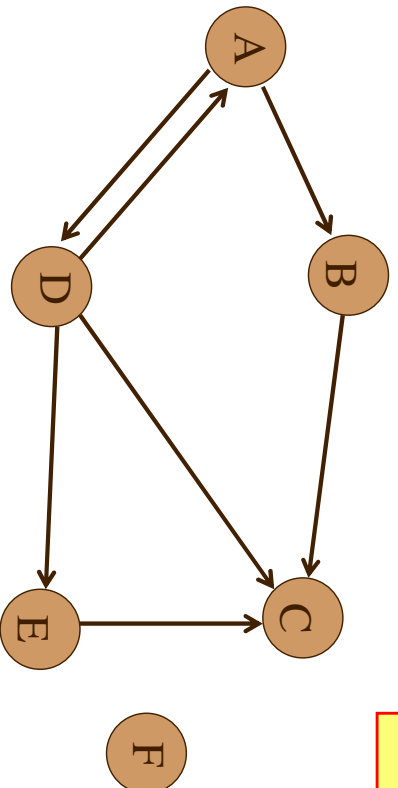
- *A*, *B* ed *E* hanno **grado 2**
- *C* e *D* hanno **grado 3**
- *F* ha **grado 0**

In un *grafo orientato* il **grado entrante (uscende)** di un *vertice* è il **numero di archi incidenti** in (da) esso



- *A* ha **grado uscente 2** e **grado entrante 1**
- *B* ha **grado uscente 1** e **grado entrante 1**
- *C* ha **grado uscente 0** e **grado entrante 3**
- *D* ha **grado uscente 3** e **grado entrante 1**

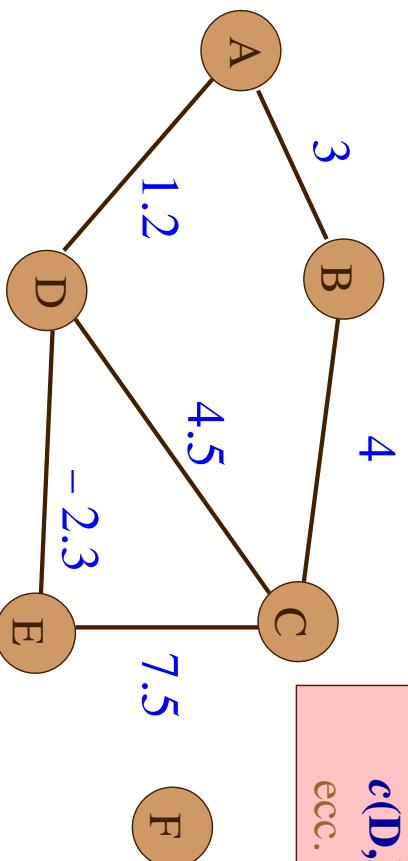
In un *grafo orientato* il *grado* di un *vertice* è la somma del suo *grado entrante* e del suo *grado uscente*



- A e C hanno *grado 3*
- B ha *grado 2*
- D ha *grado 4*

In alcuni casi ogni arco ha un *peso* (o *costo*) associato.

Il costo può essere determinato tramite una funzione di costo, $c: E \rightarrow \mathbf{R}$, dove $\mathbf{R}$ è l'insieme dei numeri reali (o interi).

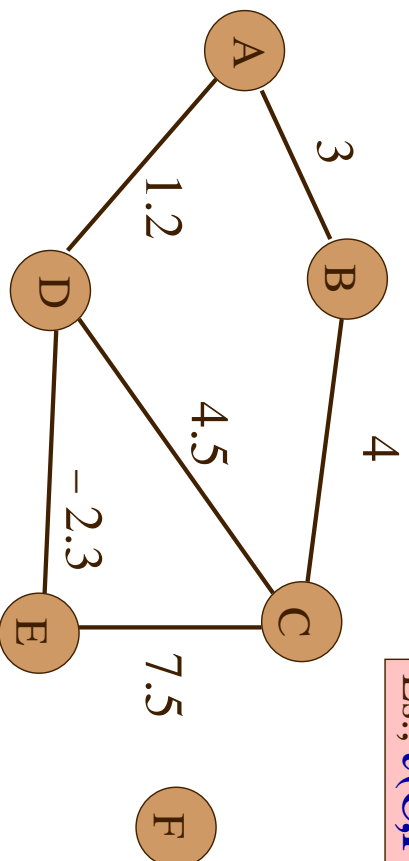


Es., $c(A, B) = 3$,
 $c(D, E) = -2.3$,
 ecc.

In alcuni casi ogni arco ha un **peso** (o **costo**) associato.

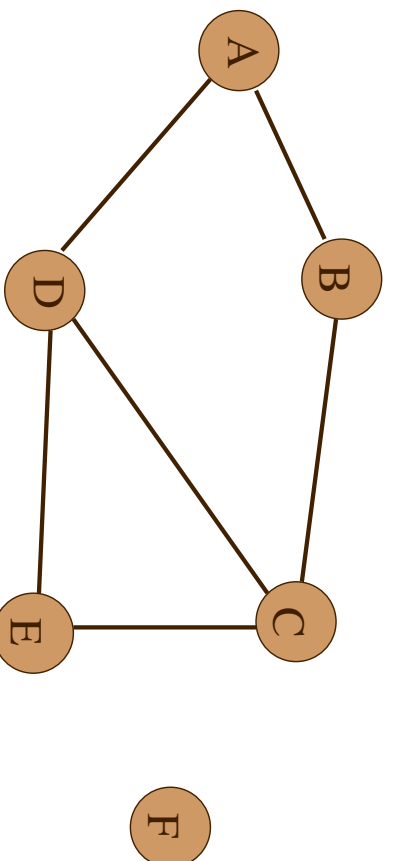
Quando tra due vertici **non esiste** un arco, si dice che il costo è **infinito**.

Es., $c(C, F) = \infty$



Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un **sottografo** di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)

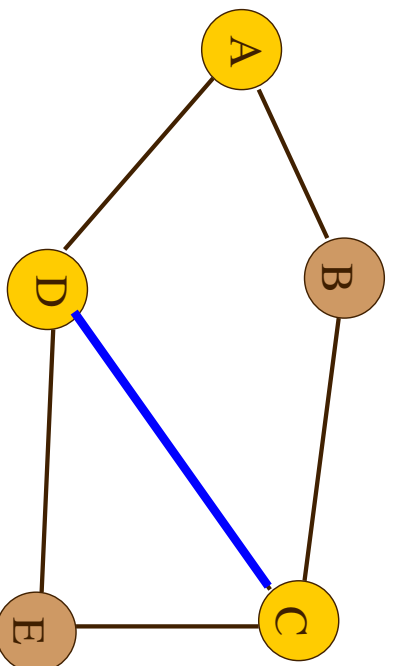




Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un *sottografo* di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)



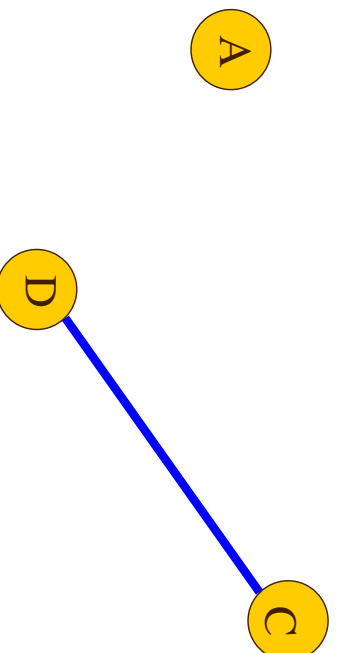
Es.,
 $V^* = \{A, C, D\}$,
 $E^* = \{(C, D)\}$.



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un *sottografo* di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$.)



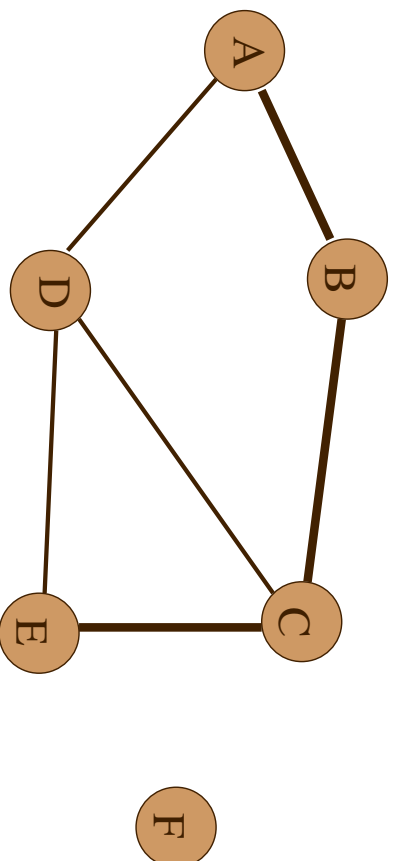
Es.,
 $V^* = \{A, C, D\}$,
 $E^* = \{(C, D)\}$.



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

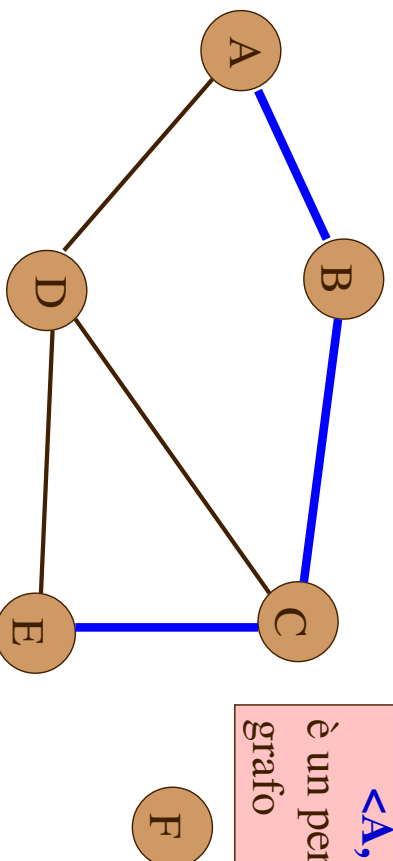
Un *percorso* nel grafo è una sequenza di vertici $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.



Definizioni sui grafi

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un *percorso* nel grafo è una sequenza di vertici $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.

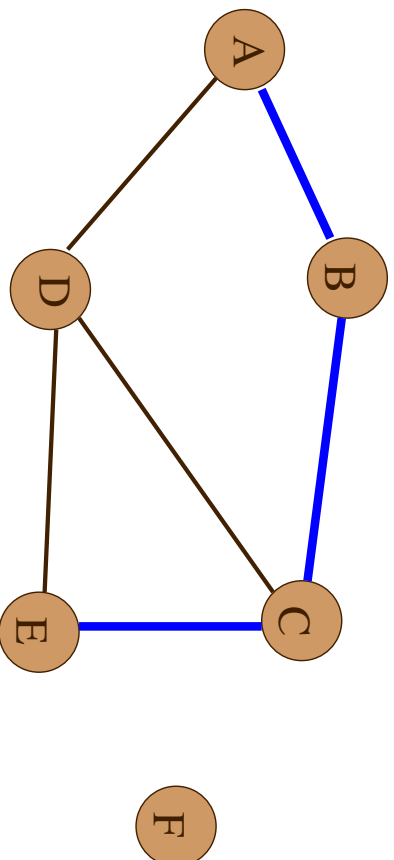


Es.,
 $\langle A, B, C, E \rangle$
è un percorso nel
grafo

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

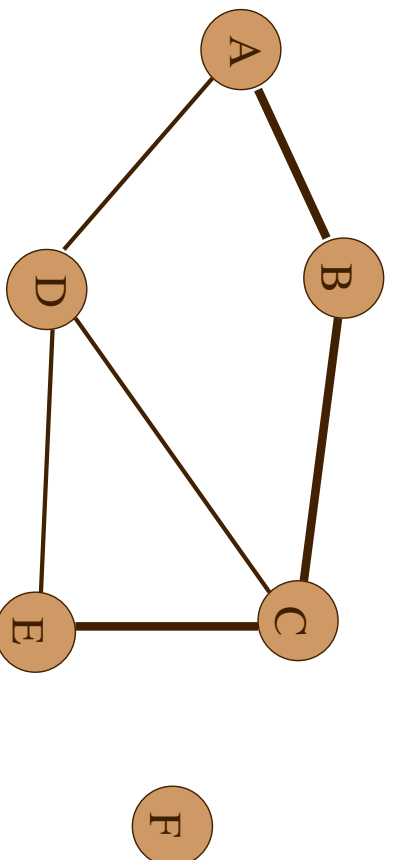
Un *percorso* nel grafo è una sequenza di vertici $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.

Il *percorso* $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ si dice che *contiene* i vertici $w_1, w_2, \dots, w_n$ e gli archi $(w_1, w_2) (w_2, w_3) \dots (w_{n-1}, w_n)$



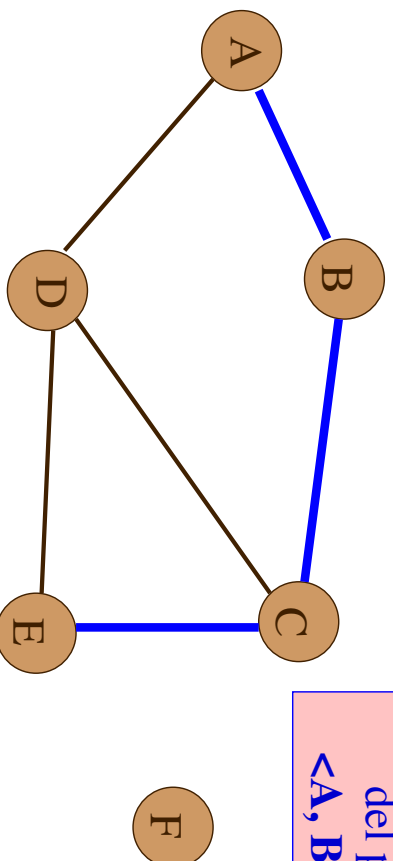
Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso*.

La *lunghezza* del percorso è il *numero totale di archi* che connettono i vertici nell'ordine della sequenza $(n-1)$, uno in meno del numero di vertici nella sequenza).



Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso*.

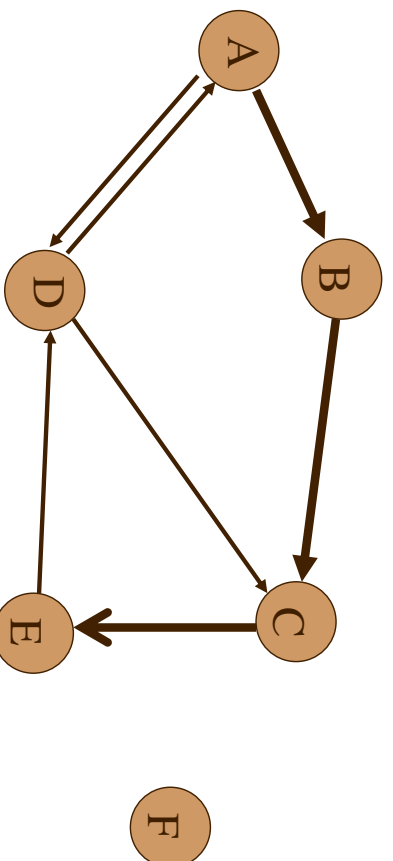
La *lunghezza* del percorso è il *numero totale di archi* che connettono i vertici nell'ordine della sequenza ($n-1$, uno in meno del numero di vertici nella sequenza).



Es., la lunghezza del percorso $\langle A, B, C, E \rangle$ è 3.

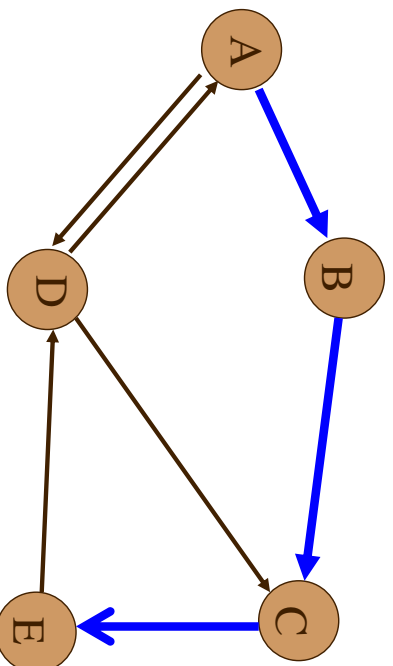
Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso* in un *grafo orientato*.

Poiché *ogni arco* (w_i, w_{i+1}) nel percorso è *ordinato*, gli *archi* del percorso sono sempre *orientati lungo il percorso*.



Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso* in un *grafo orientato*.

Poiché *ogni arco* (w_i, w_{i+1}) nel percorso è *ordinato*, gli *archi* del percorso sono sempre *orientati lungo il percorso*.

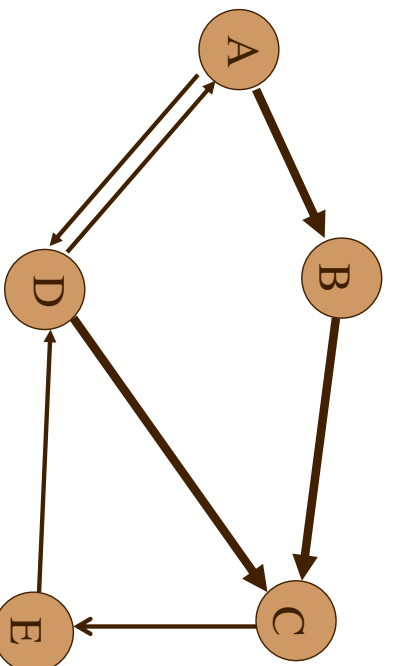


Es., $\langle A, B, C, E \rangle$ è un percorso in questo grafo orientato



Sia $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ un *percorso* in un *grafo orientato*.

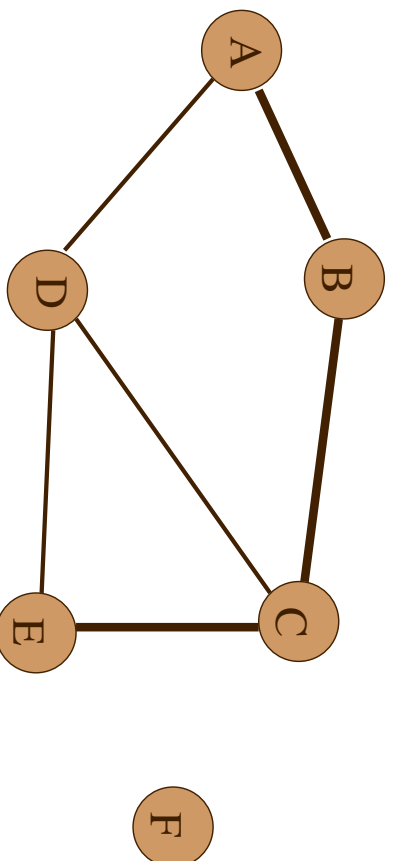
Poiché *ogni arco* (w_i, w_{i+1}) nel percorso è *ordinato*, gli *archi* del percorso sono sempre *orientati lungo il percorso*.



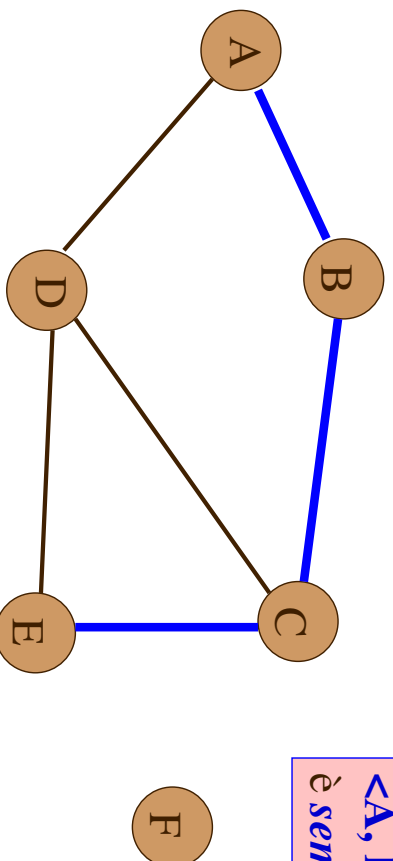
... ma $\langle A, B, C, D \rangle$ *non è* un percorso, poiché (C, D) non è un arco.



Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), eccetto al più il primo e l'ultimo che possono essere lo stesso.

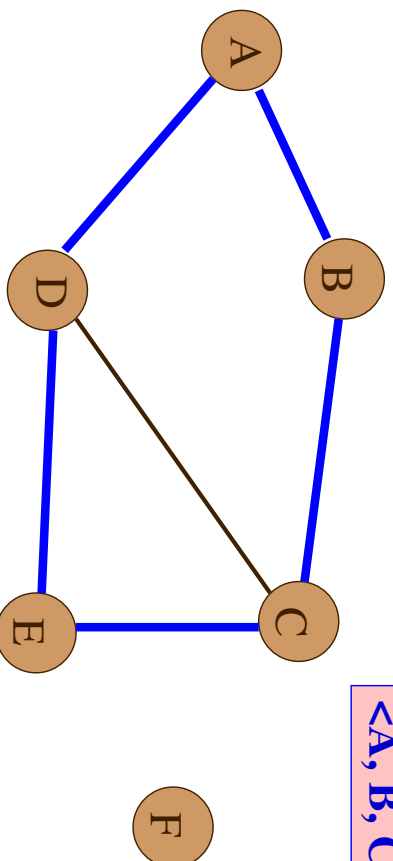


Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), eccetto al più il primo e l'ultimo che possono esser lo stesso.



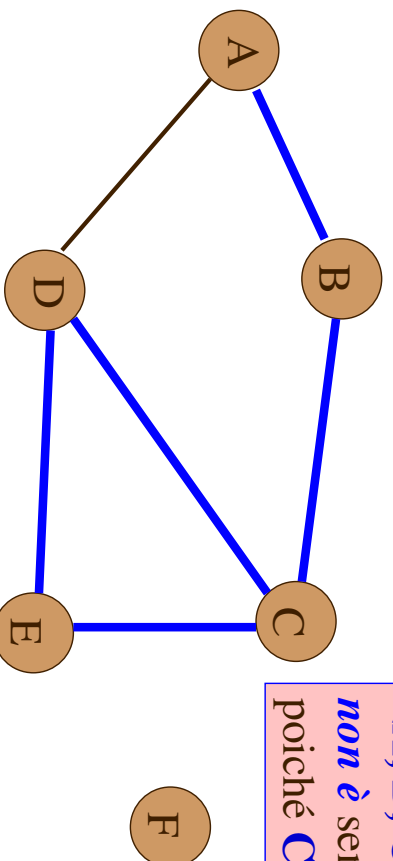
Es., il percorso
 $\langle A, B, C, E \rangle$
è *semplice* ...

Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), eccetto al più il primo e l'ultimo che possono esser lo stesso.



... così come anche
 $\langle A, B, C, E, D, A \rangle$.

Un percorso si dice *semplice* se tutti i *suoi vertici sono distinti* (compaiono una sola volta nella sequenza), eccetto al più il primo e l'ultimo che possono esser lo stesso.



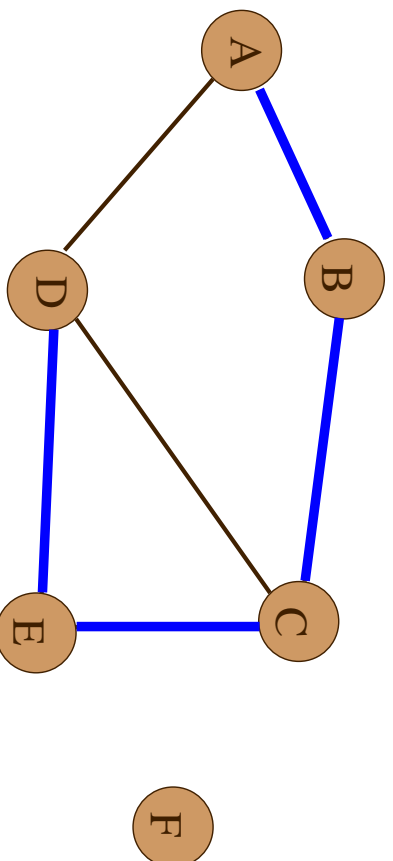
... ma il percorso
 $\langle A, B, C, E, D, C \rangle$
non è semplice,
poiché C è ripetuto.

Se esiste un percorso p tra i vertici v e w , si dice che w è *raggiungibile da* v tramite p

$$v \xrightarrow[p]{\quad} w$$

Es.: A è *raggiungibile*

da D e vice versa



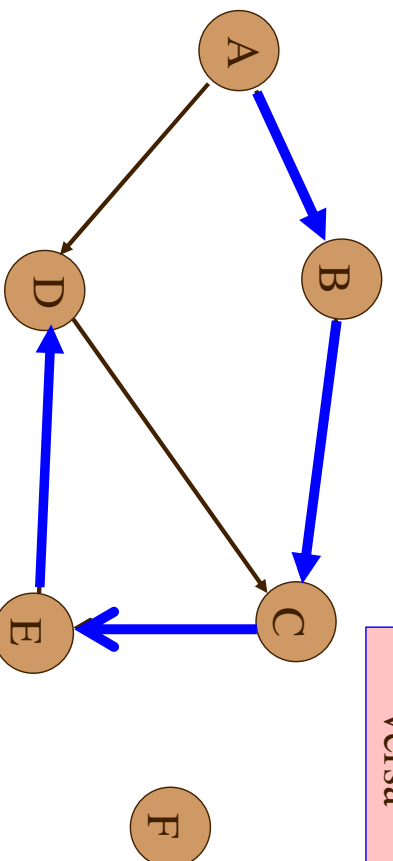
Definizioni sui grafi

Se esiste un percorso p tra i vertici v e w , si dice che w è *raggiungibile da* v tramite p

$$v \xrightarrow[p]{\quad} w$$

Es.: D è *raggiungibile*

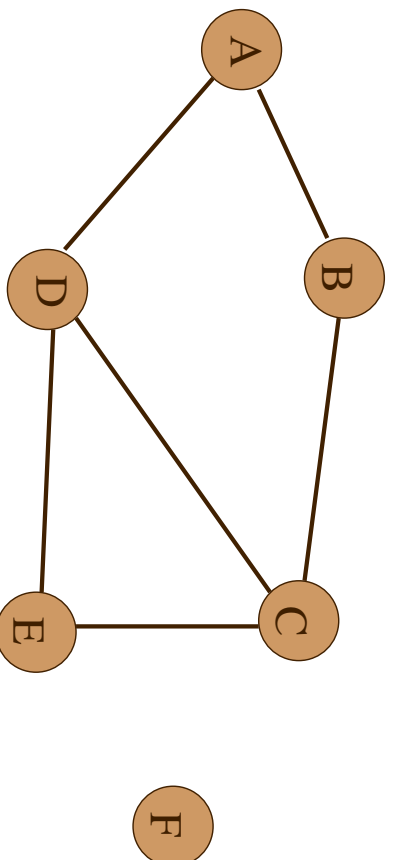
da A ma non vice versa



Se G è un *grafo non orientato*, diciamo che G è *connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

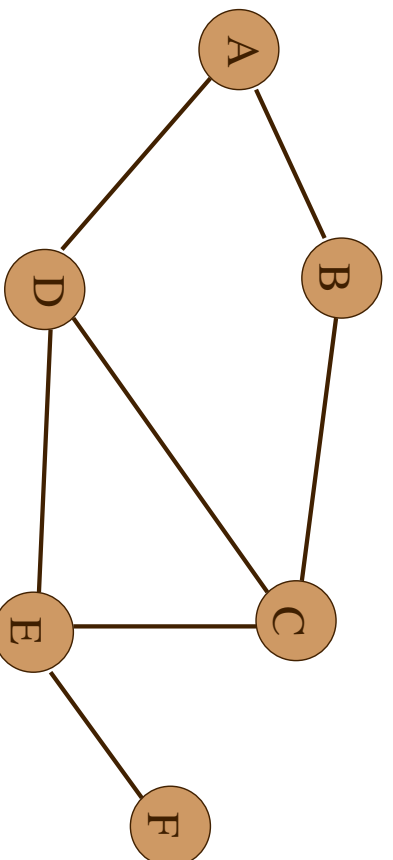
Un grafo non orientato *non connesso* si dice *sconnesso*.

Questo grafo non orientato *non è connesso*.



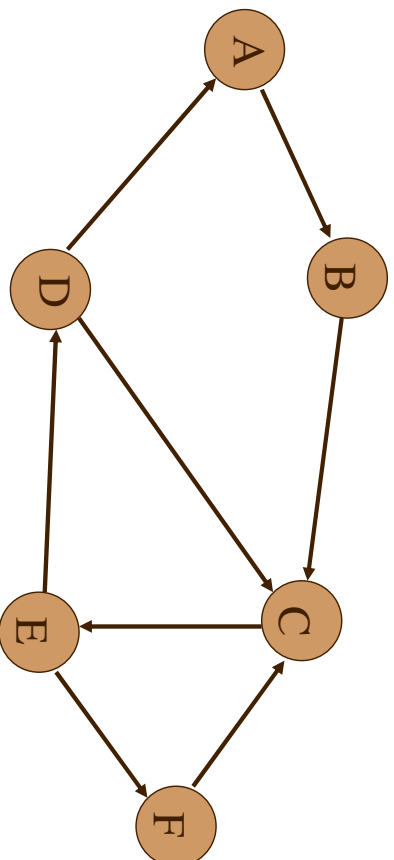
Se G è un *grafo non orientato*, diciamo che G è *connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

Questo *è connesso*.



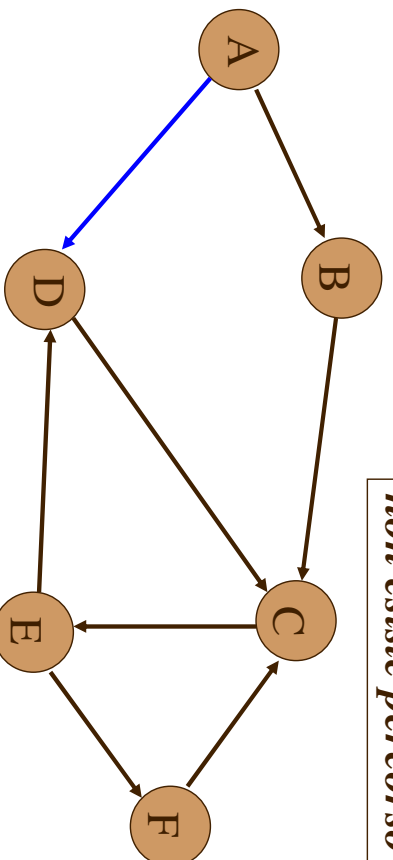
Se G è un *grafo orientato*, diciamo che G è *fortemente connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

Questo grafo orientato *è fortemente connesso*.



Se G è un *grafo orientato*, diciamo che G è *fortemente connesso* se esiste un *percorso* da *ogni vertice* ad *ogni altro vertice*.

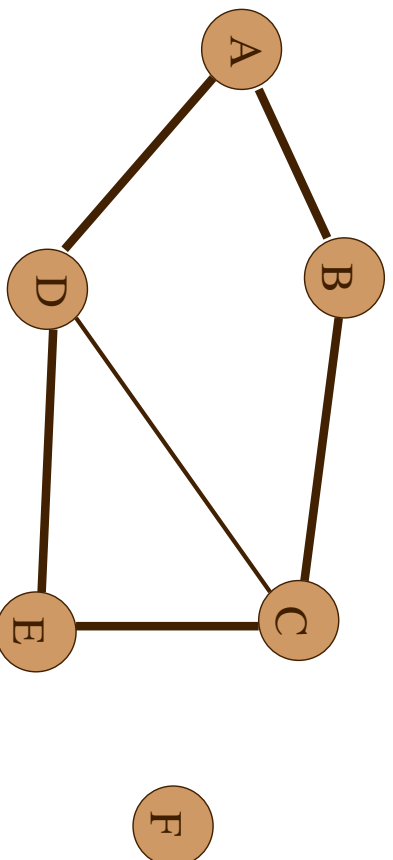
Questo grafo orientato *non è fortemente connesso*; ad es., non esiste percorso da **D** a **A**.





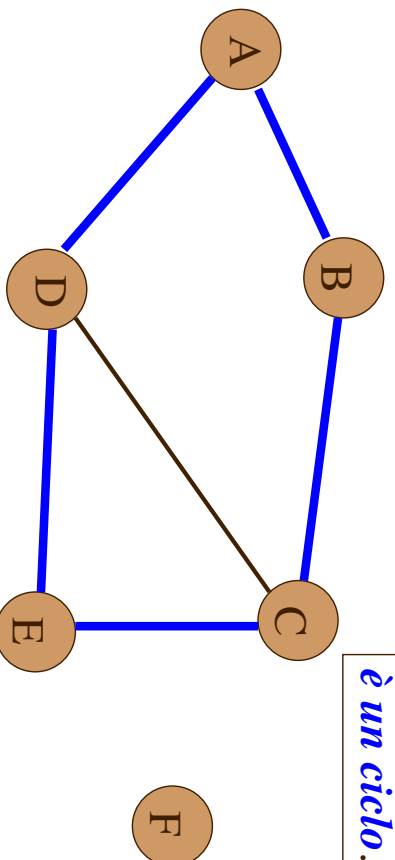
Definizioni sui grafi

Un *ciclo* in un grafo è un percorso $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ di lunghezza almeno 1, tale che $w_1 = w_n$.



Definizioni sui grafi

Un *ciclo* in un grafo è un percorso $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ di lunghezza almeno 1, tale che $w_1 = w_n$.

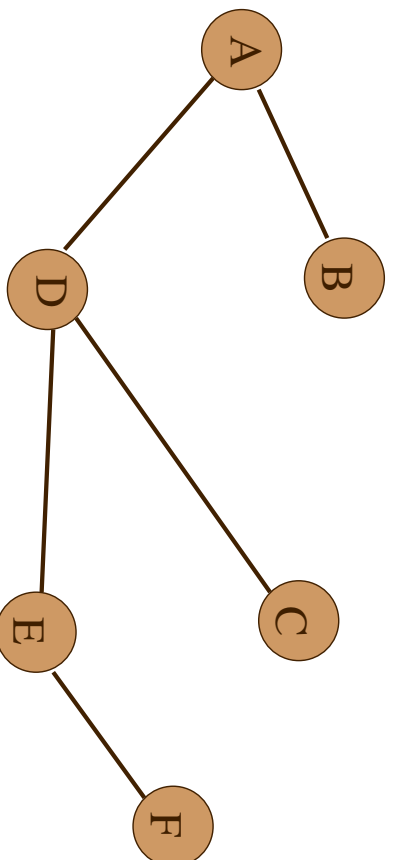


Es.: il percorso
 $\langle A, B, C, E, D, A \rangle$
è un ciclo.



Definizioni sui grafi

Un *grafo senza cicli* è detto *aciclico*.

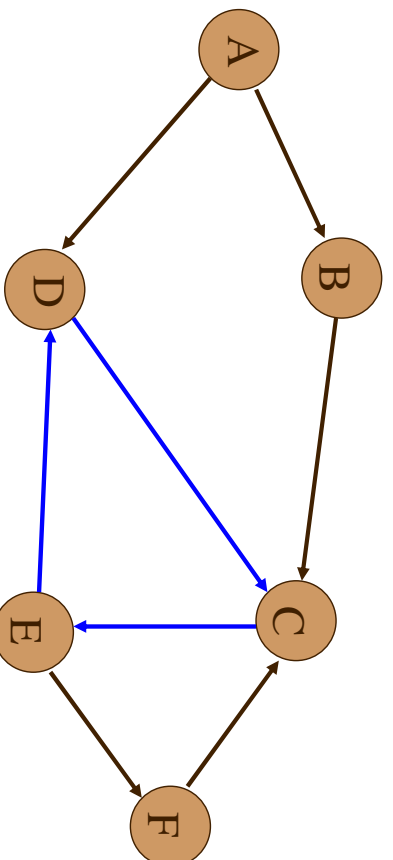


Questo grafo *è aciclico*.



Definizioni sui grafi

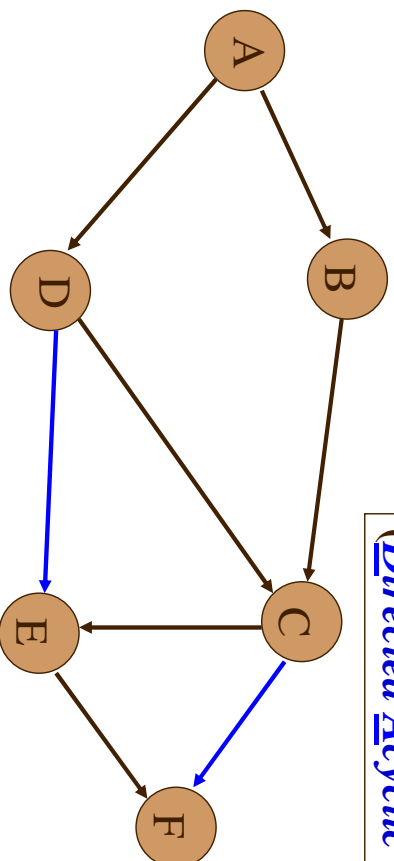
Un *grafo senza cicli* è detto *aciclico*.



Questo grafo orientato *non è aciclico*, ...

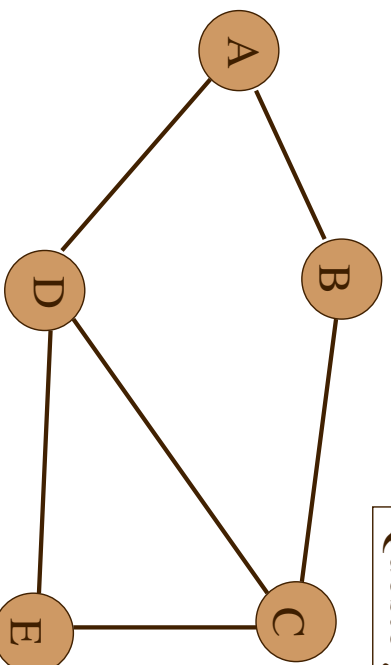
Un *grafo senza cicli* è detto *aciclico*.

... ma questo lo è.
Un *grafo orientato aciclico*
è spesso chiamato **DAG**
(*Directed Acylic Graph*).

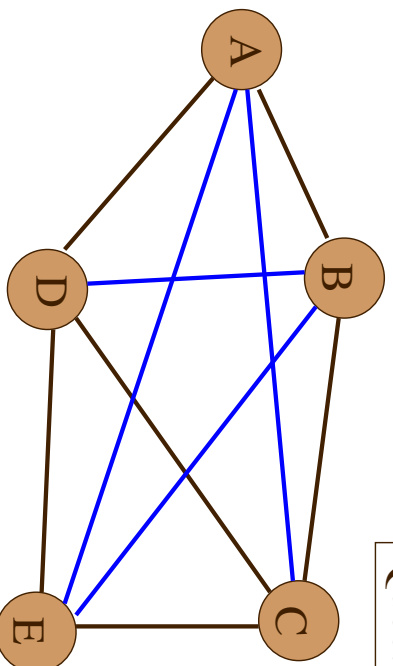


Un *grafo completo* è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.

Questo grafo *non è completo*



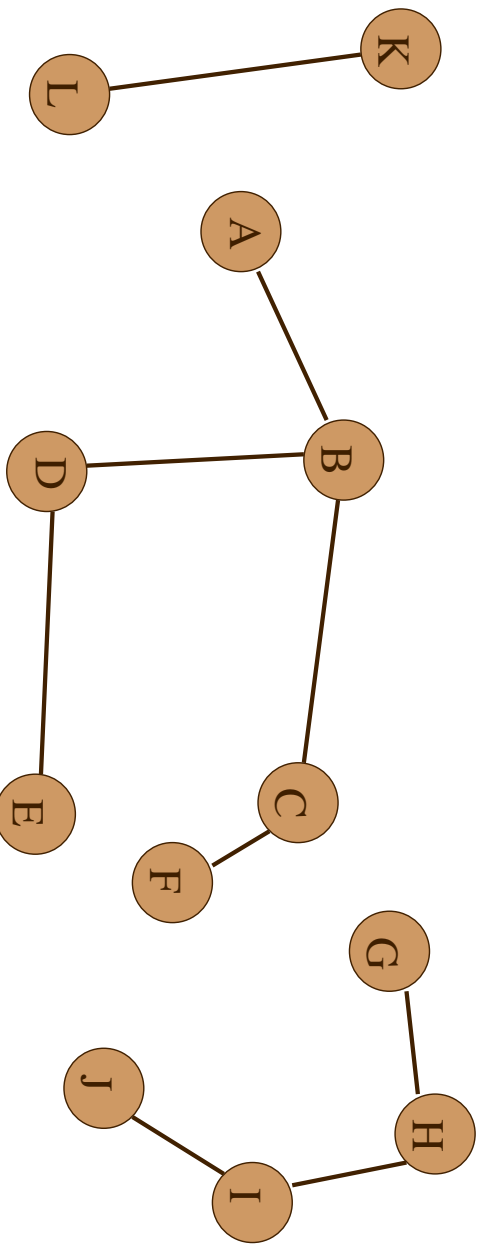
Un *grafo completo* è un grafo che ha un *arco tra ogni coppia di vertici*.



Questo grafo *è completo*

Se un *grafo non orientato* è *aciclico* ma *sconnesso*, prende il nome di *foresta*.

Questa è una *foresta*. Contiene tre alberi liberi.



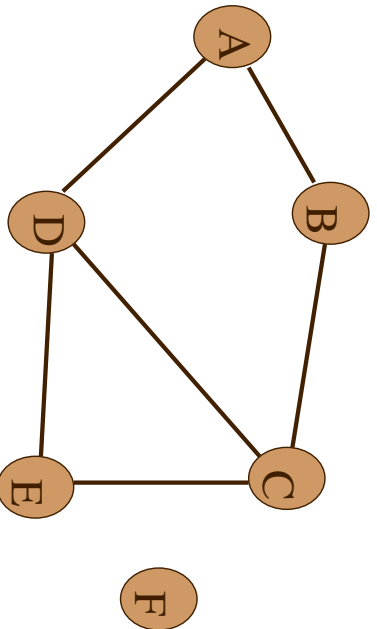
Ci sono due tipi *standard* di rappresentazioni di grafi in un computer:

- Rappresentazione con *matrice di adiacenza*
- Rappresentazione con *liste di adiacenza*

Rappresentazione con *matrice di adiacenza*:

$$M(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v, w) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

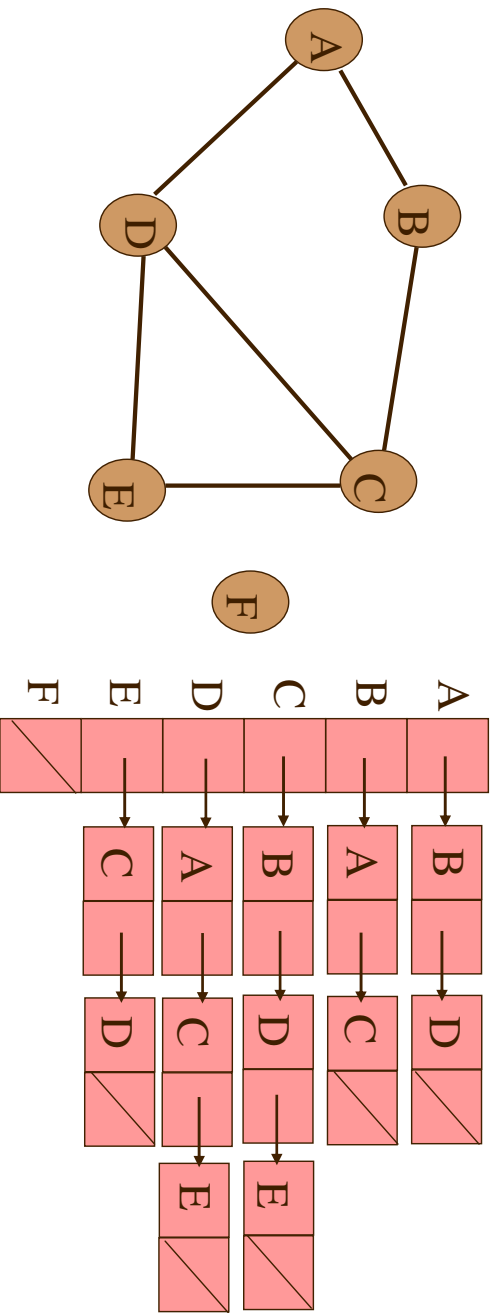
Spazio: $|V|^2$



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	1	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Rappresentazione con *liste di adiacenza*:

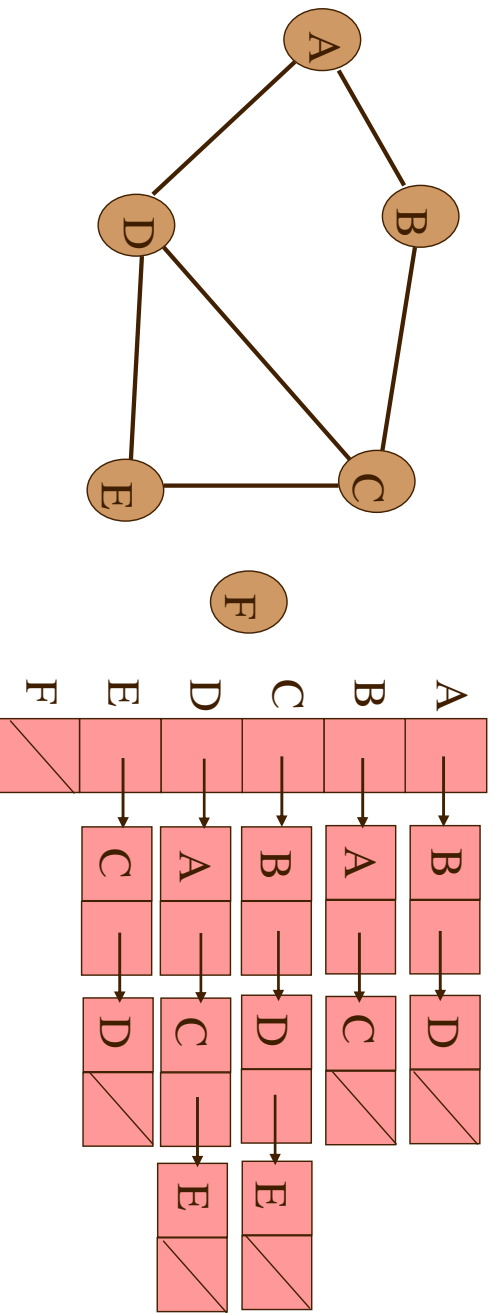
$L(v)$ = lista di w , tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$



Rappresentazione con *liste di adiacenza*:

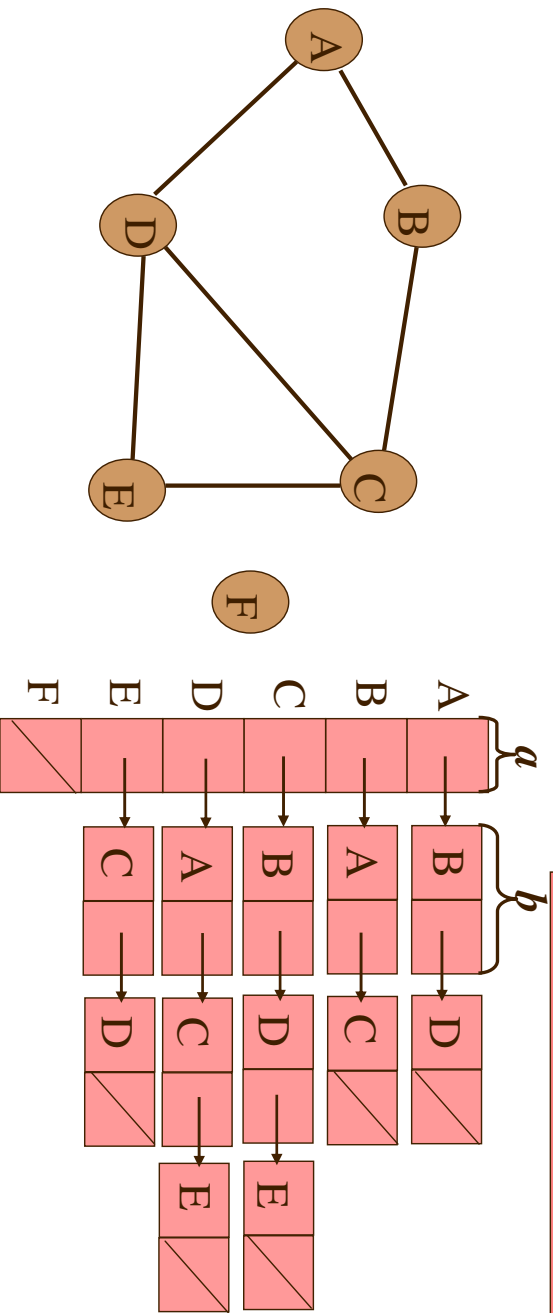
$L(v)$ = lista di w , tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$

Quanto spazio ?

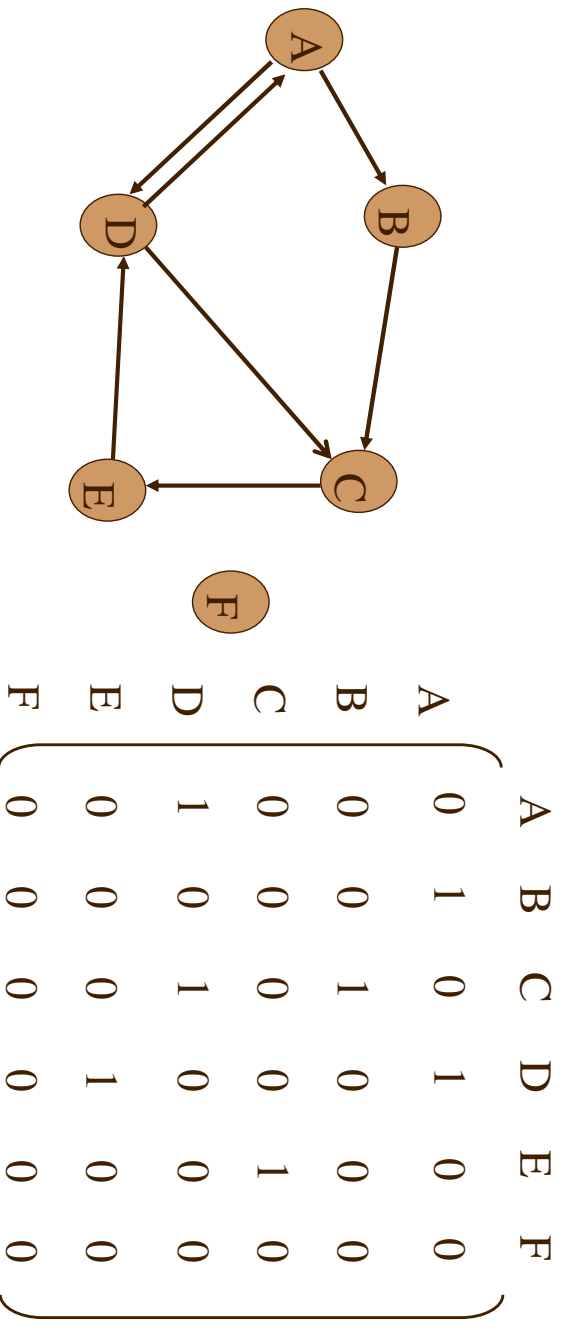


Rappresentazione con *liste di adiacenza*:

$L(v)$ = lista di w , tale che $(v, w) \in E$,
per $v \in V$

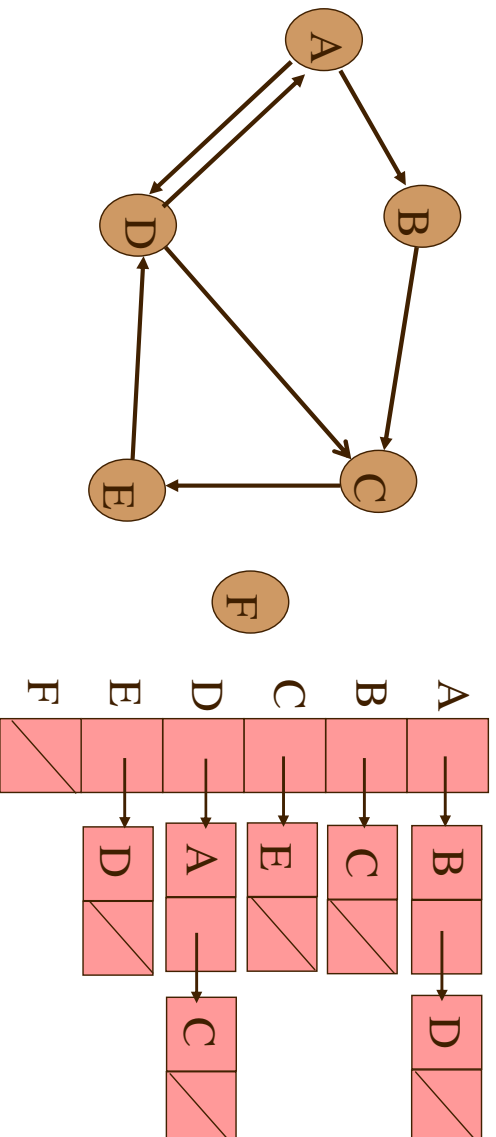


Rappresentazione con *matrice di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.



Rappresentazione di grafi

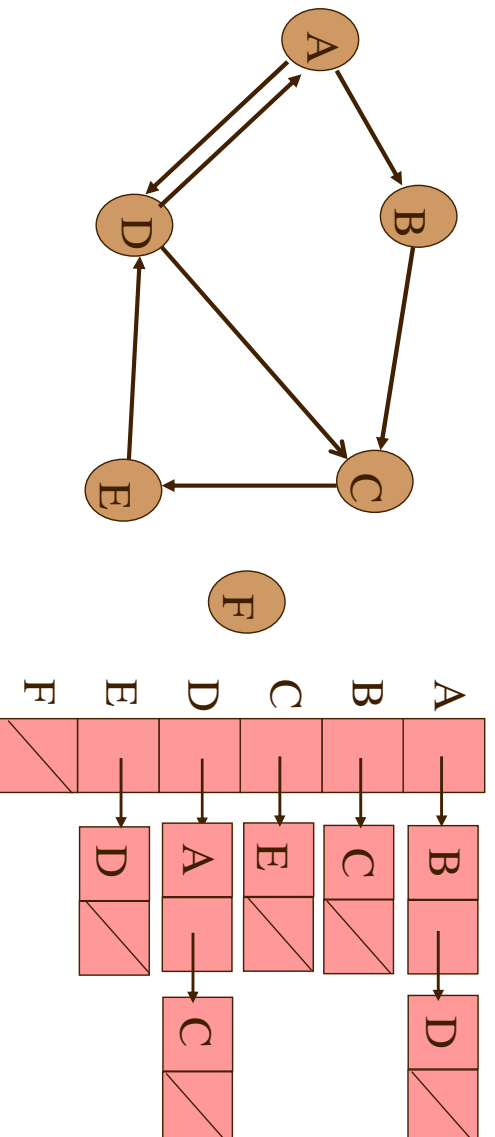
Rappresentazione con *liste di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.



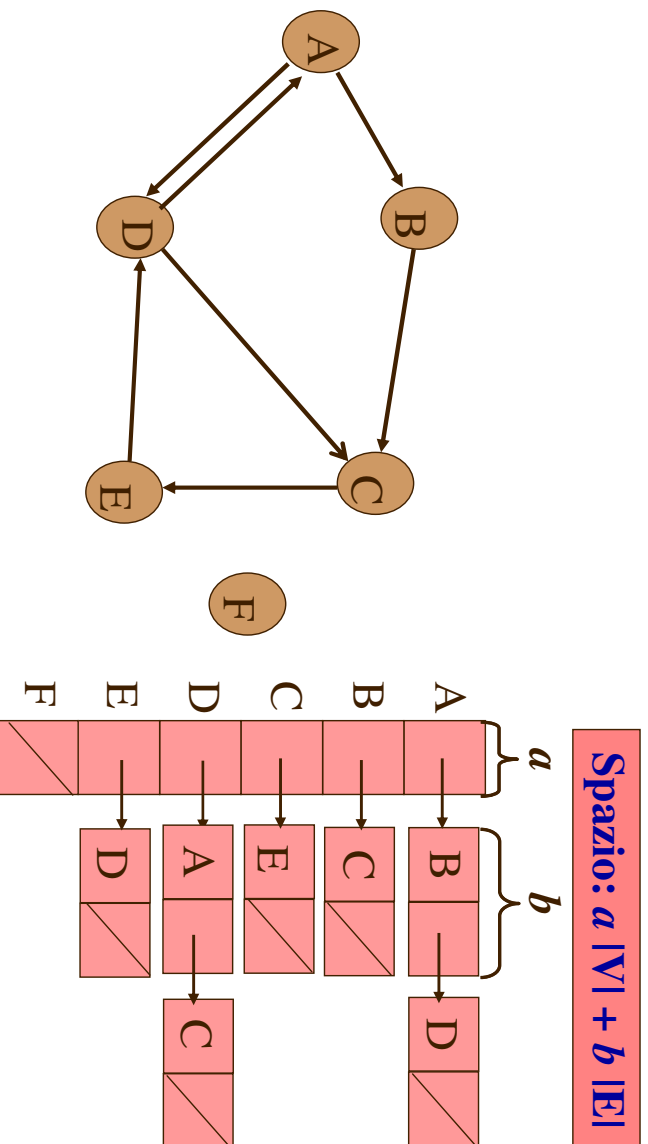
Rappresentazione di grafi

Rappresentazione con *liste di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.

Quanto spazio?



Rappresentazione con *liste di adiacenza* questa volta per rappresentare un *grafo orientato*.



Matrice di adiacenza

Spazio richiesto $O(|V|^2)$

Verificare se i vertici u e v sono adiacenti richiede tempo $O(1)$.

Molti 0 nel caso di *grafi sparsi*

Liste di adiacenza

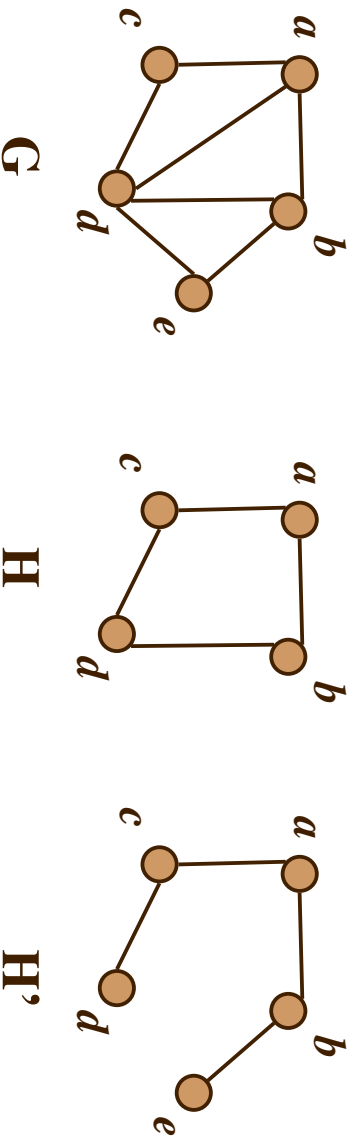
Spazio richiesto $O(|E| + |V|)$

Verificare se i vertici u e v sono adiacenti richiede tempo $O(|V|)$.

Un *sottografo* di $G=(V,E)$ è un grafo $H=(V^*,E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$.

• H' è un *sottografo di copertura* (o *di supporto* o *sottografo “spanning”*) di G se

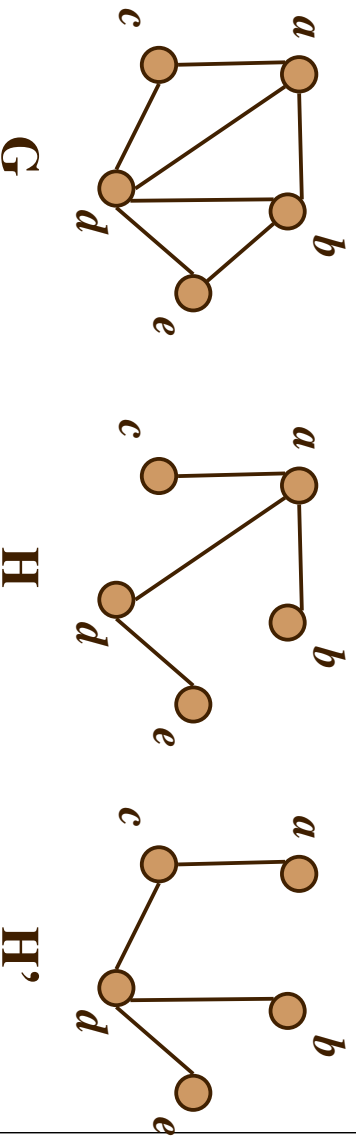
- $V^* = V$ e $E^* \subseteq E$



Un grafo $H=(V^*,E^*)$ è un *albero di copertura* (o *albero “spanning”*) del grafo $G=(V,E)$ se

H è un *grafo di copertura* di G

H è un *albero*



Tecnica di visita di un grafo

È una *variazione della visita in preordine* per alberi binari

Si parte da un vertice s

Viene processato il vertice s

Ricorsivamente si processano tutti i vertici adiacenti ad s

Bisogna evitare di riprocessare vertici già visitati

Bisogna evitare i cicli

Nuovamente, quando un vertice è stato visitato e (poi) processato viene marcato opportunamente (*colorandolo*)

I passi dell'algoritmo *DFS*

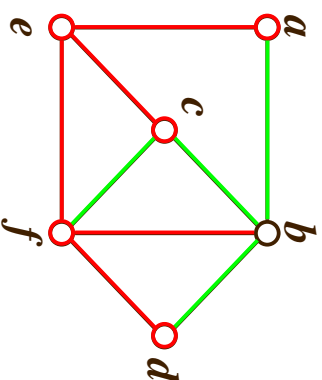
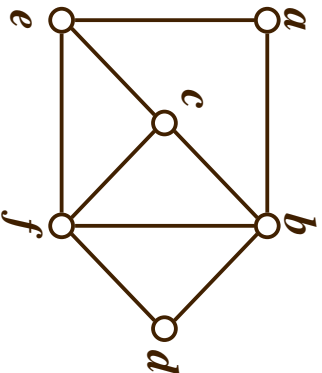
si sceglie un vertice non visitato s

si sceglie un vertice non visitato adiacente ad s .

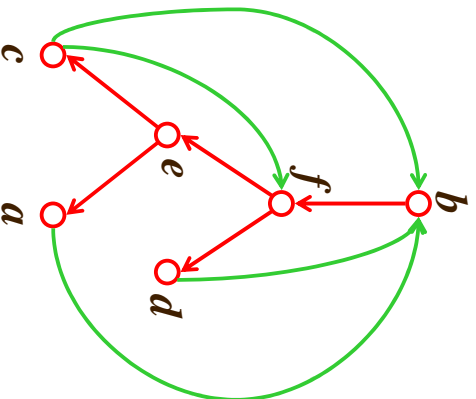
da s si attraversa quindi un percorso di vertici adiacenti (visitandoli) finché possibile:

cioè finché non si incontra un vertice già visitato

appena si resta “bloccati” (tutti gli archi da un vertice sono stati visitati), si torna indietro (*backtracking*) di un passo (vertice) nel percorso visitato (aggiornando il vertice s al vertice corrente) si ripete il processo ripartendo dal passo ①.



$b \ f \ e \ c \ a \ d$



Albero di copertura Depth-first
 Archi dell'albero →
 Archi di ritorno →

Manterremo traccia del *momento* (*tempo*) in cui ogni vertice v viene *visitato* (*scoperto*) e del momento in cui viene *processato* (*terminato*)

Useremo due array $d[v]$ e $f[v]$ che registreranno il momento in cui v verrà visitato e quello in cui verrà processato.

La variabile globale *tempo* serve a registrare il passaggio del tempo.

DSF(G :grafo)

```
for each vertice  $u \in V$ 
  do  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
      $pred[u] = \text{NIL}$ 
  tempo = 0
```

Inizializzazione del grafo e della variabile tempo

```
for each vertice  $u \in V$ 
  do if  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
     then  $DFS-Visita(u)$ 
```

DSF-Visita(u :vertice)

$colore[u] = \text{Grigio}$

$d[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$

for each vertice $v \in \text{Adiac}[u]$

do if $colore[v] = \text{Binaco}$

then $pred[v] = u$

$DFS-Visita(v)$

$colore[u] = \text{Nero}$

$f[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$

Abbreviazione per:
 $\text{tempo} = \text{tempo} + 1$
 $d[u] = \text{tempo}$

Abbreviazione per:
 $\text{tempo} = \text{tempo} + 1$
 $f[u] = \text{tempo}$

DFS: simulazione

DSF(G :grafo)

for each vertice $u \in V$

do $colore[u] = \text{Binaco}$

$pred[u] = \text{NIL}$

tempo = 0

for each vertice $u \in V$

do if $colore[u] = \text{Binaco}$

then $DFS-Visita(u)$

DSF-Visita(u :vertice)

$colore[u] = \text{Grigio}$

$d[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$

for each vertice $v \in \text{Adiac}[u]$

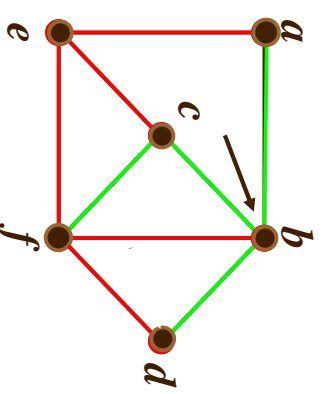
do if $colore[v] = \text{Binaco}$

then $pred[v] = u$

$DFS-Visita(v)$

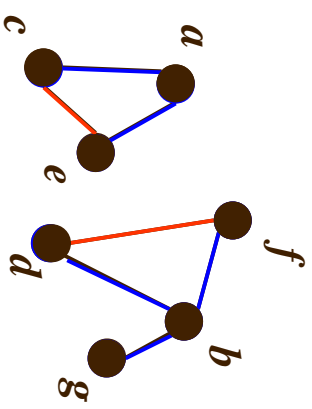
$colore[u] = \text{Nero}$

$f[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$



```

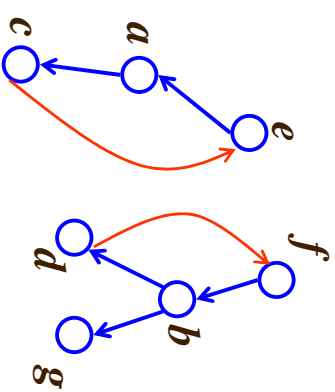
DSF (G:grafo)
  for each vertice  $u \in V$ 
    do  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
        $pred[u] = \text{NIL}$ 
  tempo = 0
  for each vertice  $u \in V$ 
    do if  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
       then  $DFS-Visita(u)$ 
  
```



DSF-Visita(u :vertice)

```

 $colore[u] = \text{Grigio}$ 
 $d[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$ 
for each vertice  $v \in \text{Adiac}[u]$ 
  do if  $colore[v] = \text{Binaco}$ 
     then  $pred[v] = u$ 
         $DFS-Visit(v)$ 
 $colore[u] = \text{Nero}$ 
 $f[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$ 
  
```



```

DSF (G:grafo)
  for each vertice  $u \in V$ 
    do  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
        $pred[u] = \text{NIL}$ 
  tempo = 0
  for each vertice  $u \in V$ 
    do if  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
       then  $DFS-Visita(u)$ 
  
```

$\Theta(V)$

$\Theta(V)$

$\Theta(E)$

DSF-Visita(u :vertice)

```

 $colore[u] = \text{Grigio}$ 
 $d[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$ 
for each vertice  $v \in \text{Adiac}[u]$ 
  do if  $colore[v] = \text{Binaco}$ 
     then  $pred[v] = u$ 
         $DFS-Visit(v)$ 
 $colore[u] = \text{Nero}$ 
 $f[u] = \text{tempo} = \text{tempo} + 1$ 
  
```

$\Theta(|E_u|)$

$\Theta(|E_{ric(u)}|)$

Ma solo per vertici
non ancora visitati

```
DFS(G: grafo)
  for each vertice  $u \in V$ 
    do  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
        $pred[u] = \text{NIL}$ 
        $tempo = 0$ 
  for each vertice  $u \in V$ 
    do if  $colore[u] = \text{Binaco}$ 
       then  $DFS-Visita(u)$ 
```

$\Theta(|V| + |E|)$

