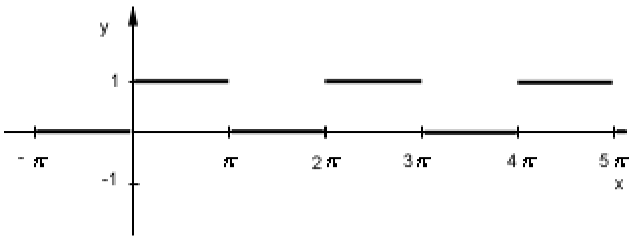
Sviluppo in serie di Fourier della funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } (2k-1)\pi \le x < 2k\pi \\ 1 \text{ se } 2k\pi \le x < (2k+1)\pi \end{cases}$$

Se tracciamo il grafico della funzione:

y = 0	k = 0 $-\pi \le x < 0$ k = 1 $\pi \le x < 2\pi$ k = 2 $3\pi \le x < 4\pi$ k = 3 $5\pi \le x < 6\pi$	y = 1	k = 0 $0 \le x < \pi$ k = 1 $2\pi \le x < 3\pi$ k = 2 $4\pi \le x < 5\pi$ k = 3 $6\pi \le x < 7\pi$ ....



Nei punti $-\pi, 0, \pi$ la funzione presenta punti di discontinuità di prima specie.

Def:*Punto di discontinuità:* punto p del dominio della funzione f(x) per cui il limite della funzione per x che tende a p non esiste oppure esiste ma non coincide con f(p).

Def. *Punto di discontinuità di prima specie:* i punti di discontinuità di prima specie sono quei punti per cui il limite destro e sinistro esistono ma differiscono entrambi da f(p).

Sono pertanto soddisfatte le Condizioni di Dirichlet. Troviamo quindi i coefficienti della serie trigonometrica:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[0 + \left|x\right|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\pi = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos kx dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \cos kx dx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[0 + \left|\frac{\text{sen } kx}{k}\right|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[0 - 0\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot \mathrm{sen}\,kx\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot \mathrm{sen}\,kx\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[0 + \left|-\frac{\cos kx}{k}\right|_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos k\pi}{k} + \frac{\cos 0}{k}\right]$$

se k è pari si ha :

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right] = 0$$

mentre se k è dispari :

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right] = \frac{2}{k\pi}$$

Quindi trovati i coefficienti possiamo sostituirli nella Serie di Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx$.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\mathrm{sen}\,x + \frac{2}{3\pi}\mathrm{sen}\,3x + \frac{2}{5\pi}\mathrm{sen}\,5x + \frac{2}{7\pi}\mathrm{sen}\,7x.....$$

In forma compatta $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n+1)x}{2n+1}$;

Consideriamo la funzione $f(x) = x$, funzione identità per la $x \in [-\pi, \pi]$. Se si vuole considerare il suo sviluppo all'esterno di questo dominio la serie di Fourier richiede implicitamente che questa funzione sia periodica.

Vogliamo calcolare i coefficienti di Fourier di questa funzione. Conviene osservare subito che $\cos(nx)$ è una funzione pari, mentre la nostra *f* e $\sin(nx)$ sono funzioni dispari.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Si osservi che a_0 e a_n sono nulli in quanto *x* e $x\cos(nx)$ sono funzoni dispari. Quindi la serie di Fourier per la funzione in esame è:

$$f(x) = x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx), \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$