

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Algebra lineare e Geometria del 27 gennaio 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Siano $u = (-1, 1, 3, 5)$, $v = (5, 3, 1, -1)$, $w = (0, 0, 1, 2)$. Sia $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$, l'endomorfismo definito dalle condizioni

$$\begin{aligned}f(e_1) &= u + hw \\f(e_2) &= -v \\f(e_3) &= u + v \\f(e_4) &= u - v\end{aligned}$$

dove $h \in \mathbb{R}$ ed (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

- 1) Determinare $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ al variare di h .
- 2) Nel caso $h = 0$, dire se f è diagonalizzabile.

II

- 1) Classificare la conica $h(x^2 + y^2 - 2x - 4y) + (x - y)^2 = 0$, $h \in \mathbb{R}$.
- 2) Determinare la retta r passante per $P(3, -2, -1)$, complanare alle rette

$$s_1 \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s_2 \begin{cases} x - 3z + 6 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Siano $\{P_1\} = r \cap s_1$ e $\{P_2\} = r \cap s_2$. Calcolare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{P_1OP_2}$, dove $O(0, 0, 0)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 18 febbraio 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z) = (x + (1 - k)z, kx + ky + kz, (1 - k)x + z)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando in particolare un sistema di equazioni cartesiane per il nucleo e l'immagine.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando quando possibile, una base di autovettori.

II

1. Date le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + y - 3z + 5 = 0 \\ x + 2y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y + 3z - 7 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Verificare che r e s sono complanari e determinare un piano che le contiene.

2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, riconoscere la conica di equazione:

$$x^2 + hy^2 - 2xy + 2hy + 4 = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 16 aprile 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

- 1) Sia $A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & h & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ e sia $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f_h} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A_h . Studiare f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcolare una base di $\text{Ker } f_{-1} + \text{Ker } f_0$.
- 2) Diagonalizzare, se possibile, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & t \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

II

Sul piano si considerino le rette $r_h : h^2(x - 1) + 2hy - x - 1 = 0$, e sia $S = \{r_h \mid h \in \mathbb{R}\}$.

- 1) Determinare le due rette di S passanti per $P(\frac{5}{7}, \frac{5}{7})$. Calcolare gli angoli da esse formati.
- 2) Provare che tutte le rette di S sono tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** – Appello del 16 giugno 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$f(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 0, 1 - h)$$

$$f(0, -1, 1) = (1 - h, 1 - h, 0)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ al variare di h e le loro equazioni cartesiane.
2. Nel caso $h = 0$, studiare la semplicità di f , determinando, se possibile, una base di autovettori.

II

1. Nello spazio, si considerino la retta $r : x - y + 2 = z + 2 = 0$, il piano $\pi : y - z + 5 = 0$ e il punto $P = (1, 1, 0)$; determinare la retta s ortogonale a π e passante per P . Mostrare, inoltre, che r e s sono complanari e determinare il piano che le contiene.
2. Sul piano, si studi, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio di coniche di equazione

$$x^2 + (h + 2)xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 10 luglio 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.

I

Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $L_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L_h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (-h+1)x + y + hz \\ hx - hz \\ y \end{bmatrix}.$$

1. Studiare L_h al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in particolare un sistema di equazioni cartesiane per il nucleo e l'immagine.
2. Studiare la semplicità di L_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

1. Calcolare la distanza tra le due rette r e s di $\mathbb{R}^3$:

$$r : \begin{cases} 2x + y - 3z + 5 = 0 \\ x + 2y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y + 3z - 7 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, riconoscere la conica in $\mathbb{R}^2$ di equazione:

$$hx^2 + 2xy + y^2 - 2(h-1)x + 2y + 5 = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** dell'1 settembre 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Si consideri l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_h} \mathbb{R}^5$ definita dalle relazioni

$$\begin{cases} f(0, 0, 1) = (1, 1, 0, h, 1) \\ f(0, 1, 0) = (1, h, 1, 2, 1) \\ f(1, 0, 0) = (1, 2h - 1, 2, 0, 1) \end{cases}$$

Determinare $\text{Ker } f_h$ e $\text{Im } f_h$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) Nel caso $h = 4$, sia $\text{Im } f_4 \xrightarrow[\cong]{g} \mathbb{R}^2$ l'isomorfismo definito dalle relazioni

$$\begin{cases} g(1, 1, 0, 4, 1) = (1, 1) \\ g(1, 4, 1, 2, 1) = (0, 1) \end{cases}$$

Calcolare $g(1, 7, 2, 0, 1)$ e $g^{-1}(2, 3)$.

II

1) Sul piano, si considerino le rette $r_1 : x + y - 1 = 0$, ed $r_2 : 2x + y - 2 = 0$. Determinare gli angoli formati da r_1 ed r_2 . Si consideri inoltre la retta $r_3 : x = a$, con $a > 1$ e sia T il triangolo individuato dalle tre rette. Determinare a in modo tale che l'area di T sia uguale a 2.

2) Nello spazio, si considerino le due rette in forma parametrica

$$s_1 \begin{cases} x = h + 1 \\ y = 2h \\ z = 3h + 1 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s_2 \begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = 2k - 2 \\ z = k \end{cases}$$

Verificare che sono complanari; determinare la retta passante per $s_1 \cap s_2$ ed ortogonale al piano contenente s_1 ed s_2 .

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 17 settembre 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.

I

Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $L_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L_h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + h y + (h + 2) z \\ h x + y - (h + 2) z \\ h z \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di L_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2. Studiare la semplicità di L_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sono dati la retta:

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ x + y - 4z = -2 \end{cases}$$

e il piano $\pi : x - z = 0$. Determinare l'equazione del piano passante per l'origine, parallelo alla retta r e ortogonale al piano π .

2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, riconoscere la conica in $\mathbb{R}^2$ di equazione:

$$(1 - h) x^2 + (4h + 2) x y + (h + 1) y^2 + 2h x - 2h y = 0.$$