Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 30 gennaio 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.
È possibile consultare libri e appunti cartacei come anche l'uso di una calcolatrice.

I

Sia h un parametro reale e sia $T_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T_h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + (h+1)\,z \\ x + h\,y \\ 3\,z \end{pmatrix}.$$

1. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, trova basi ed equazioni cartesiane per l'immagine e il nucleo di T_h.
2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, stabilisci se T_h è semplice.

II

1. Determina l'equazione del piano nello spazio $\mathbb{R}^3$ passante per il punto di coordinate $(1, 0, -1)$, parallelo alla retta di equazioni
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + 2z = 0, \end{cases}$$
e ortogonale al piano di equazione $x - 2y + z = 1$.
2. Al variare del parametro reale h, riconoscere la conica $C_h \subset \mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana:
$$(1-h)\,x^2 + (2+h)\,x\,y - h\,y^2 - 2\,x + 1 = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 26 febbraio 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.
È possibile consultare libri e appunti cartacei come anche l'uso di una calcolatrice.

I

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una delle sue basi. Al variare del parametro reale h, considera l'endomorfismo $T_h : V \to V$ definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned} T_h(-v_3) &= (h-1)v_1 - 3v_3, \\ T_h(v_2 - v_1) &= v_1 + (h-2)v_2 - 2v_3, \\ T_h(v_2 - v_3) &= (h-2)v_2 - v_3. \end{aligned}$$

1. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, trova basi ed equazioni cartesiane per l'immagine e il nucleo di T_h.
2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, stabilisci se T_h è semplice.

II

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, trova equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per il punto $(0, 1, 0)$, parallela al piano di equazione $x - y - 3z = 1$ e ortogonale alla retta di equazioni $x + z = y - x = -1$.
2. Al variare del parametro reale h, riconoscere la conica $C_h \subset \mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana:

$$x^2 + (1-h)xy + y^2 + (h+3)x + 2y - 3 = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 25 marzo 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Sia $M = \begin{pmatrix} 4 & 2-h & 2+h \\ 4-3h & 2 & 2-2h \\ 4-2h & 2+h & 2-h \\ 4+h & 2 & 2+2h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,3}$. Studiare l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$, $f(\underline{x}) = M\underline{x}$.

2) Per $h = 0$, sia $U = \operatorname{Im} f$; per $h = 2$ sia $W = \operatorname{Im} f$. Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ $V = U + W$ ed un suo sistema minimale di equazioni. Sia $v = (3, -2, -1, 6) \in V$; scomporre v nella somma di un vettore di U e di un vettore di W.

II

1) Sul piano, classificare, al variare del parametro reale h, la conica di equazione

$$h^2x^2 + h(y^2 - x^2) - (x + y + t)^2 = 0.$$

2) Nello spazio, scrivere un sistema di equazioni della retta r, passante per $A(1, 2, 1)$, ortogonale alla retta $x = y = z$ e parallela al piano $x - y + 2z + 4 = 0$. Determinare i punti di r che distano $\sqrt{14}$ da A.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 29 aprile 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Studiare, al variare del parametro reale h, l'endomorfismo $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$, definito dalla legge

$$f(x,y,z,t) = (2x-y, 3x-z, 4x+hz-t, 3y-2z+ht), \ \ h \in \mathbb{R}.$$

2) Per $h = 0$, sia $V = \operatorname{Im} f$. Sia $v_i = f(e_i)$, per $1 \leq i \leq 4$, dove (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si consideri l'endomorfismo $V \xrightarrow{g} V$, definito dalle relazioni

$$\begin{cases} g(v_2) = kv_2 \\ g(v_3) = kv_3 \\ g(v_4) = v_1 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Dire se g è diagonalizzabile al variare del parametro reale k.

II

1) Sul piano, determinare i punti A e B della retta $r: 3x + y - 5 = 0$ che distano $\sqrt{5}$ dall'origine O. Determinare l'ampiezza degli angoli interni del triangolo AOB.

2) Nello spazio, scrivere un sistema di equazioni della retta r, passante per $A(1,2,1)$, complanare all'asse $\vec{x}$ ed alla retta $s: \ x + y + 2 = x + 2z + 1 = 0$. Scrivere l'equazione del piano α contenente r ed s.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 17 giugno 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.
È possibile consultare libri e appunti cartacei come anche l'uso di una calcolatrice.

I

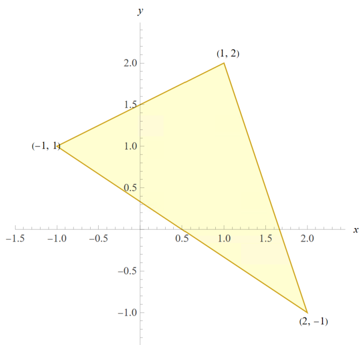
Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $T_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2h & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determina la dimensione del nucleo e dell'immagine di T_h.
2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, studia la semplicità di T_h.

II

1. Calcola l'area e il perimetro del triangolo che ha per vertici i tre punti del piano $A = (1, 2)$, $B = (2, -1)$, $C = (-1, 1)$.



2. Al variare del parametro reale h, riconoscere la conica $C_h \subset \mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana:

$$x^2 + (-h+1)\,x\,y + h\,y^2 + 2\,x - 2\,y + 1 = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 12 luglio 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.
È possibile consultare libri e appunti cartacei come anche l'uso di una calcolatrice.

I

Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $T_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

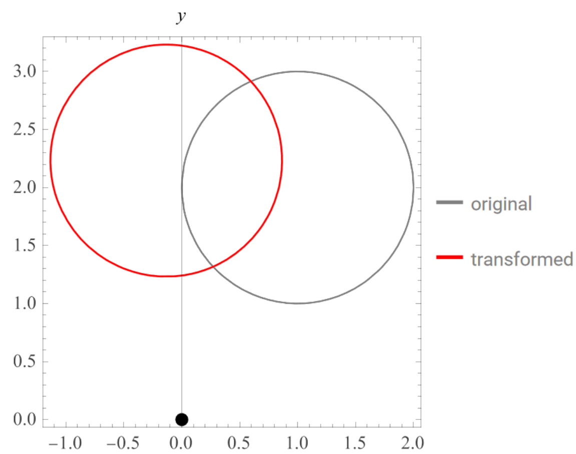
$$A_h = \begin{bmatrix} -3 & -h+2 & 4 \\ h & 1 & -h \\ -5 & -h+2 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, studiare la semplicità di T_h, determinando (quando possibile) una base di autovettori.

2. Si consideri la matrice $B_h = 2A_h + A_h^t$ (due volte la matrice A_h sommata alla trasposta di A_h) e il vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Trovare i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che v appartenga all'immagine di B_h. Trovare i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che v appartenga al nucleo di B_h.

II

1. Si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Trovare l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}_\theta$ ottenuta da $\mathcal{C}$ mediante una rotazione del sistema di riferimento di un angolo $\theta = 30°$ in senso antiorario intorno all'origine. Determinare inoltre il centro di $\mathcal{C}_\theta$.



2. Al variare del parametro reale h, riconoscere la conica $C_h \subset \mathbb{R}^2$ di equazione

$$x^2 + (1-h)\,x\,y + y^2 + 2\,h\,x + (h-1)\,y - 2\,h - 5 = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 6 settembre 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathscr{L}\big((1,1,1,0),(0,1,-h,2)\big), \;\; W = \mathscr{L}\big((1,2,-1,h),(1,0,1,1)\big).$$

Determinare un sistema minimale di equazioni di $U+W$ al variare del parametro reale h.

2) Diagonalizzare, se possibile, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

II

1) Sul piano, calcolare le bisettrici degli angoli formati dall'asse $\vec{y}$ e dalla retta r congiungente i punti $P_1(0,2)$ e $P_2(2,3)$.

2) Nello spazio, sia α il piano di equazione $x+2y+z+1=0$. Siano inoltre $A=\vec{z}\cap\alpha$ e $B=\vec{x}\cap\alpha$. Determinare l'insieme $\{P\in\alpha \mid ABP \text{ è un triangolo isoscele, di base } AB, \text{ di area } 1\}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 23 settembre 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.

I

1. Diagonalizzare, se possibile, la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare le dimensioni di nucleo e immagine dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ rappresentato, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h & -1 \\ 0 & 1 & -h & h \\ 0 & 1 & h-1 & h \\ 2 & 2 & 2h-1 & 2h-2 \end{bmatrix}.$$

II

1. Calcolare l'area e il perimetro della figura piana definita dalle disuguaglianze:

$$y+1 \geq x-2, \quad -3(y-1) \geq 4(x-4), \quad y-5 \geq -6(x-1).$$

2. Al variare del parametro reale h, riconoscere la conica $C_h \subseteq \mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana:

$$x^2 - 2xy + hy^2 + hx - y + 2 = 0,$$

stabilendo, in particolare, per quali valori di h la conica è spezzata, irriducibile, reale o immaginaria.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 5 novembre 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Si considerino l'endomorfismo $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$, definito dalla legge

$$f(x,y,z) = \big((h+1)x + y + z, 2x + (h+2)y + 2z, 3x + 3y + (h+3)z\big), \; h \in \mathbb{R}$$

ed il sottospazio

$$W = \mathscr{L}\big((2,1,3),(1,0,1)\big) \subset \mathbb{R}^3.$$

Calcolare $W \cap \operatorname{Im} f$, al variare di h.

2) Siano $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ed $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcolare la matrice inversa di P. Dire se $B = PAP^{-1}$ è diagonalizzabile.

II

1) Siano r ed s le componenti della conica spezzata di equazione

$$f = x^2 + 5xy + 6y^2 + 2x + 5y + 1 = 0.$$

Determinare gli angoli formati da r ed s.

2) Sia $g = 2x^2 + 5xy + 6y^2 + 2x + 5y$. Studiare il fascio di coniche $\lambda f + \mu g = 0$.