

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Algebra lineare e Geometria del 27 gennaio 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Siano $u = (-1, 1, 3, 5)$, $v = (5, 3, 1, -1)$, $w = (0, 0, 1, 2)$. Sia $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$, l'endomorfismo definito dalle condizioni

$$\begin{aligned}f(e_1) &= u + hw \\f(e_2) &= -v \\f(e_3) &= u + v \\f(e_4) &= u - v\end{aligned}$$

dove $h \in \mathbb{R}$ ed (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

- 1) Determinare $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ al variare di h .
- 2) Nel caso $h = 0$, dire se f è diagonalizzabile.

II

- 1) Classificare la conica $h(x^2 + y^2 - 2x - 4y) + (x - y)^2 = 0$, $h \in \mathbb{R}$.
- 2) Determinare la retta r passante per $P(3, -2, -1)$, complanare alle rette

$$s_1 \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s_2 \begin{cases} x - 3z + 6 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Siano $\{P_1\} = r \cap s_1$ e $\{P_2\} = r \cap s_2$. Calcolare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{P_1OP_2}$, dove $O(0, 0, 0)$.

Corso di Laurea in Informatica (A-E),(O-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 17 febbraio 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x - y + hz, x - 2y + z, hx + y + z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

- 1) Determinare $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ al variare di h .
- 2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Sia data la retta r di equazione:

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare l'equazione del piano π passante per il punto $P_0(1, 2, 0)$ e ortogonale a r . Detto H il punto di intersezione tra r e π determinare il simmetrico di P_0 rispetto al punto H .

- 2) Nel piano $z = 0$ si determini e si studi il fascio di coniche tangenti in $A = (0, 1)$ all'asse $\vec{y}$ e tangenti in $B = (2, 1)$ alla retta $x - 2y = 0$.
- 3) Data la conica del fascio:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 1 = 0$$

dire di quale conica si tratta e determinarne una forma canonica.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 21 marzo 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

- 1) Sia $v = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$, $(e_1, \dots, e_5)$ la base canonica di $\mathbb{R}^5$ e sia $\mathbb{R}^5 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$\begin{cases} f(e_1) = v \\ f(e_2) = 2v \\ f(e_3) = -v \\ f(e_4) = (2h, 9) \\ f(e_1 + e_5) = (4, h + 3). \end{cases}$$

Determinare $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nel caso $h = 0$, determinare un sistema di equazioni cartesiane del sottospazio $W = f^{-1}(\mathcal{L}(v)) \subseteq \mathbb{R}^5$.

- 2) Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui la matrice

$$M = \begin{pmatrix} h & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbia 1 come autovalore. Per tale valore di h , diagonalizzare M .

II

- 1) Calcolare gli asintoti ed il centro di simmetria della conica

$$x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x = 0.$$

- 2) Nello spazio si considerino i punti $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 2)$ e sia r la retta AB . Scrivere l'equazione del piano p contenente r e passante per $O(0, 0, 0)$. Determinare le rette del piano p passanti per O che formano con r un angolo α tale che $\cos \alpha = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{13}}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Algebra lineare e Geometria del 15 aprile 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sia assegnata l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned}f(1, 0, 0) &= (1, 1, -1) \\f(0, 2, 1) &= (4, 0, h + 4) \\f(1, 1, 1) &= (3, 1, h + 1)\end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Dire se f è diagonalizzabile, al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.
2. Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(1, 2, -3)$.

II

- 1) E' assegnato sul piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione

$$x^2 + (h^2 + 1)y^2 + 2x + 2y = 0,$$

determinando, in particolare, i punti base. Detta c la circonferenza, determinare centro, raggio e la retta tangente ad essa nell'origine.

- 2) E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Date le rette:

$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} 3x - 6z - 5 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

determinare il piano π passante per il punto $P = (1, -1, 1)$ e parallelo alle rette r e s . Detto $H = r \cap s$ determinare la distanza di H da π .

Corso di Laurea in Informatica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** – Appello del 16 giugno 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 0, 1 - h)$$

$$f(0, -1, 1) = (1 - h, 1 - h, 0)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ al variare di h e le loro equazioni cartesiane.
2. Nel caso $h = 0$, studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dati la retta $r : x - y + 2 = z + 2 = 0$, il piano $\pi : y - z + 5 = 0$ e il punto $P = (1, 1, 0)$, determinare la retta s ortogonale a π e passante per P .

Mostrare che r e s sono complanari e determinare il piano che le contiene.

2. Sul piano $z = 0$ si studi, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + (h + 2)xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

Detta Γ la parabola del fascio, determinare una sua equazione canonica.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** dell'1 luglio 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Studiare l'applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ definita dalle relazioni

$$\begin{cases} f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 1) \\ f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0) \\ f(0, 0, 1, 0) = h(0, 1, 1) \\ f(0, 0, 0, 1) = h(1, 1, 0) + (0, 1, 1) \end{cases}$$

2) Diagonalizzare, se possibile, la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II

1) Sul piano, calcolare l'equazione della circonferenza passante per $O(0, 0)$ e tangente alla retta r di equazione $x - 1 + 3(y - 2) = 0$ in $P(1, 2)$.

2) Nello spazio, si considerino le rette di equazioni parametriche

$$r \begin{cases} x = h + 1 \\ y = h \\ z = 2h + 1 \end{cases}, \quad s \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 4k \\ z = -3k + 1 \end{cases}.$$

Provare che r ed s sono ortogonali e complanari. Trovare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** dell'8 settembre 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sia assegnata l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dalla relazione:

$$f(x, y, z) = (x - y, hx + (h + 2)y, x - hy + z).$$

1. Determinare $M(f)$ e studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f nel caso $h = -2$ e, in caso affermativo, determinare una base di autovettori.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati i punti $P = (1, -1, 0)$, $Q = (1, -1, 2)$, $R = (1, 2, 0)$ e $P_\infty = (1, 1, 0, 0)$.
 - (a) Determinare la retta r passante per P e Q e la retta s passante per R e P_∞ .
 - (b) Mostrare che r e s sono sghembe e determinare la retta u perpendicolare e incidente ad entrambe.
2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Dati i punti $A = (-1, 1)$, $B = (1, -1)$ e $C = (1, 1)$ del piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche passanti per A e B e aventi in C retta tangente $x - y = 0$.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 23 settembre 2025

Durata della prova: 90 minuti.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

- 1) Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ -h & 1 & -1 \\ 1 & -h & 1 \\ -h & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$, $f(x) = Mx$.

Determinare il nucleo e l'immagine di f al variare del parametro reale h .

- 2) Studiare la diagonalizzabilità sul campo dei numeri reali della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k .

II

- 1) Sul piano, classificare la conica γ di equazione $(x + y + 1)x + 2(x + 2)(y - 1) = 0$. Calcolare la retta tangente a γ in $P(0, 1)$. Dire se γ ha asintoti paralleli agli assi coordinati.
- 2) Nello spazio, scrivere l'equazione della retta r passante per il punto $A(2, 1, 2)$, complanare all'asse $\vec{x}$ e ortogonale alla retta di equazioni $\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$. Sia $B = \vec{x} \cap r$. Determinare la distanza di B dal piano $\alpha : 4y + 3z + 5 = 0$.