Corso di Laurea in Informatica
(tutti i canali)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** – Appello del 29 gennaio 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sia assegnata una base $\mathcal{A} = [(1,0,1),(0,1,0),(0,0,2)]$ di $\mathbb{R}^3$ e si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con le seguente condizioni:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (1-2h, 6, h+1) \\ f(0,1,0) &= (0,-1,0) \\ f(0,0,2) &= (-2h, 4, 2h+2) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f, determinando $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinando, se è possibile, una base di autovettori.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Sono dati nello spazio i punti $P_1 = (2,2,0)$ e $P_\infty = (0,1,1,0)$, determinare l'equazione della retta $p = P_1 P^\infty$ e l'equazione del piano α passante per P_1 e perpendicolare alla retta p.
2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y},$. Studiare il seguente fascio di coniche:
$$C_k : k\,x^2 + ky^2 + 2xy - 2kx - 2y = 0,$$
al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 14 febbraio 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Siano

$$v_1 = (2, 1-h, h+1),\ v_2 = (2-3h, 1, 1-2h),$$
$$v_3 = (2-2h, h+1, 1-h),\ v_4 = (6-2h, h+3, h+3),$$

con $h \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \mathbb{R}^3$. Calcolare la dimensione ed una base di V, al variare di h.

2) Poniamo $h = 1$ e sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_2 \\ f(v_2) &= -v_3 \\ f(0,0,1) &= v_4 \end{aligned}$$

Studiare la diagonalizzabilità di f.

II

1) Sul piano, scrivere l'equazione della parabola avente vertice in $V(1,0)$ e fuoco in $F(0,3)$.

2) Nello spazio, scrivere l'equazione del piano α passante per $V(1,0,0)$, $F(0,3,0)$ e $P(1,1,1)$. Sia β il piano di equazione $x - 1 = 0$. Scrivere un sistema di equazioni della retta r passante per $A(2,0,1)$ e parallela alla retta $\alpha \cap \beta$.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 28 marzo 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.
È possibile consultare libri e appunti cartacei come anche l'uso di una calcolatrice.

I

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $V = \mathbb{R}^3$. Al variare del parametro reale h, considera l'endomorfismo $T_h : V \to V$ definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned} T_h(e_1) &= 3\,e_1 + (1-h)\,e_2, \\ T_h(e_2) &= 4\,e_1 - h\,e_2, \\ T_h(e_3) &= (11-h)\,e_1 + (4-4\,h)\,e_2 + (h-2)\,e_3. \end{aligned}$$

1. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, trova basi ed equazioni cartesiane per l'immagine e il nucleo di T_h.

2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, stabilisci se T_h è semplice.

II

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, trova equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per il punto $(-2, 2, -1)$, parallela al piano di equazione $2x - 2y - 6z = 3$ e ortogonale alla retta di equazioni $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = -2 \end{cases}$.

2. Al variare del parametro reale h, riconoscere la conica $C_h \subset \mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana:

$$x^2 + (1-h)\,x\,y + y^2 + 2\,(1+h)\,y = 4.$$

Corso di Laurea in Informatica
(tutti i canali)

Prova di **Algebra lineare e Geometria** – Appello del 24 giugno 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (1,0,k) \\ f(-1,1,0) &= (k-2,k,0) \\ f(0,0,-1) &= (1,1,1-k) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,0)$.
2. Nel caso $k = -1$, studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dati la retta t, un piano α, e un punto A

   $$t : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \quad \alpha : \ y - z = 0; \ A = (1,2,0),$$

   determinare la retta u ortogonale a α e passante per A. Mostrare che t e u sono sghembe.
2. Sul piano $z = 0$ si studi,al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio di coniche di equazione:

   $$x^2 + (h+4)y^2 + 4xy + x + 2y = 0.$$

   Detta Γ l'iperbole equilatera del fascio, determinare una sua equazione canonica.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** dell'8 luglio 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata, rispetto alle basi canoniche, è

$$M = \begin{pmatrix} 2-h & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -h \\ -1 & h & h \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 & h \\ 0 & 0 & 3 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui A sia diagonalizzabile.

Diagonalizzare A nel caso $h = 1$.

II

1) Sul piano, scrivere l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo di vertici $P_1(-4,-2)$, $P_2(-1,7)$, $P_3(11,3)$.

2) Nello spazio, verificare che le due rette di equazioni parametriche

$$r_1 \begin{cases} x = h+1 \\ y = 2h+2 \\ z = 3h+1 \end{cases}, \quad r_2 \begin{cases} x = 3h+4 \\ y = 2h+4 \\ z = h+2 \end{cases}$$

sono complanari e scrivere l'equazione del piano che le contiene.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 settembre 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato l'uso di qualsiasi dispositivo mobile come smartphone o tablet.
È possibile consultare libri e appunti cartacei come anche l'uso di una calcolatrice.

Algebra

Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $T_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_h = \begin{bmatrix} -3 & -h+1 & 4 \\ h+1 & 1 & -h-1 \\ -5 & -h+1 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, studia la semplicità di T_h, determinando (quando possibile) una base di autovettori.

2. Trova i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sia un autovettore di A_h.

Geometria

3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, trova equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per il punto $(2, 0, 1)$, parallela al piano di equazione $x - y - 3z = 2$ e ortogonale alla retta di equazioni $2x + 2z = y + z = -2$.

4. Al variare del parametro reale h, riconoscere la conica $C_h \subset \mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana:

$$x^2 + 2\,h\,x\,y + h\,y^2 + x + y + h = 0.$$

Corso di Laurea in Informatica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** – Appello del 18 settembre 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z) = (kx + y + z, y + (1-k)z, (1-k)y + z)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f , determinando, in particolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le equazioni cartesiane di nucleo e immagine.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.
3. Nel caso $k = -1$, detta $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione inversa di f , determinare una matrice associata a f^{-1}.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Date le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Verificare che r e s sono complanari e determinare un piano che le contiene.

2. Sul piano $z = 0$ si studi, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + hy^2 - 2xy + 2hy + 4 = 0.$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 28 ottobre 2024

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_h} \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata, rispetto alle basi canoniche, è

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2h-1 \\ 3 & h & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base di Ker f_h e Im f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare $\bigcap_{h\in\mathbb{R}} \operatorname{Im} f_h$.

2) Nel caso $h = 4$, dire se f_4 è diagonalizzabile.

II

1) Sul piano, scrivere l'equazione della retta tangente alla conica $x^2 + y^2 - 2 = 0$ in $A(1,1)$. Classificare la conica
$$h(x^2 + y^2 - 2) + (x + y - 2)^2 = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

2) Nello spazio, determinare la retta complanare all'asse $\vec{x}$, passante per $P(1,1,2)$ e complanare alla retta di equazioni $x + 2y + 1 = x + z + 2 = 0$.