SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata giorno 26 gennaio 2017

I

1) Lo spazio V è definito dall'unica equazione $x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{22} - x_{23} = 0$, quindi

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2,3} - 1 = 6 - 1 = 5.$$

Determiniamo adesso una base di V. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$x_{23} = x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{22}.$$

Trattando le variabili a secondo membro come libere ricaviamo le 5 matrici

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esse costituiscono una base di V. Si ha che

$$\begin{array}{rcl} \varphi(M_1) = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = & M_3 + M_4 \\ \varphi(M_2) = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = & M_3 + M_5 \\ \varphi(M_3) = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = & M_3 \\ \varphi(M_4) = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = & M_1 - M_3 \\ \varphi(M_5) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = & M_2 - M_3 \end{array}.$$

Quindi la matrice associata a φ rispetto alla base $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ è

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$P(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\left[-x\begin{vmatrix}-x & 0 & 1\\ 0 & -x & 0\\ 1 & 0 & -x\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1\\ 1 & 0 & -x\end{vmatrix}\right] = (1-x)[-x(-x^3+x)+1-x^2] =$$
$$= (1-x)[x^2(x^2-1)-(x^2-1)] = (1-x)(x^2-1)^2 = -(x-1)^3(x+1)^2.$$

Quindi $P(x) = 0 \iff x = -1, x = 1$. Inoltre $m_{-1} = 2$, $m_1 = 3$. Calcoliamo le molteplicità geometriche

$$g_{-1} = 5 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 5 - 3 = 2 = m_{-1};$$

$$g_1 = 5 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = 5 - 2 = 3 = m_1.$$

Pertanto φ è diagonalizzabile.

Inoltre

$$V_{-1} = \{x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3 + x_4M_4 + x_5M_5 \in V \mid x_1 + x_4 = 0,\ x_2 + x_5 = 0,\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0\},$$

quindi

$$\begin{cases} x_4 = -x_1\\ x_5 = -x_2\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1\\ x_5 = -x_2\\ x_3 = -x_1 - x_2\end{cases},$$

da cui ricaviamo le due matrici linearmente indipendenti

$$N_1 = M_1 - M_3 - M_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix};\ N_2 = M_2 - M_3 - M_5 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Una base di V_{-1} è (N_1, N_2).

Analogamente

$$V_1 = \{x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3 + x_4M_4 + x_5M_5 \in V \mid x_1 - x_4 = 0,\ x_2 - x_5 = 0\},$$

da cui ricaviamo le tre matrici linearmente indipendenti

$$P_1 = M_1 + M_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};\ P_2 = M_2 + M_5 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\ P_3 = M_3.$$

Una base di V_1 è (P_1, P_2, P_3).

2)

$$\begin{array}{lll} f_h(M_1) = & (2-h)(1,0,0) + h(0,0,1) = & (2-h, 0, h)\\ f_h(M_2) = & (2-h)(0,1,0) + h(0,0,1) = & (0, 2-h, h)\\ f_h(M_3) = & (2-h)(0,0,1) + h(0,0,1) = & (0,0,2)\\ f_h(M_4) = & (2-h)(0,0,0) + h(1,0,-1) = & (h, 0, -h)\\ f_h(M_5) = & (2-h)(0,0,0) + h(0,1,-1) = & (0, h, -h)\end{array}.$$

Da cui segue che la matrice associata ad f_h rispetto alla base $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ nel dominio ed alla base canonica del codominio è

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 2-h & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 2-h & 0 & 0 & h \\ h & h & 2 & -h & -h \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo un minore di ordine massimo

$$\begin{vmatrix} 2-h & 0 & 0 \\ 0 & 2-h & 0 \\ h & h & 2 \end{vmatrix} = 2(2-h)^2 = 0 \iff h = 2.$$

Se $h \neq 2$, $\operatorname{rk} \mathfrak{N} = 3$.

Se $h = 2$, $\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ e $\operatorname{rk} \mathfrak{N} = 3$.

In conclusione $\operatorname{rk} \mathfrak{N} = 3$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, quindi $\operatorname{Im} f_h = \mathbb{R}^3$ e $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f_h = 5 - 3 = 2$.

Per determinare $\operatorname{Ker} f_h$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $\mathfrak{N}$.

$$\begin{cases} (2-h)x_1 + hx_4 = 0 \\ (2-h)x_2 + hx_5 = 0 \\ hx_1 + hx_2 + 2x_3 - hx_4 - hx_5 = 0 \end{cases}.$$

Se $h \neq 2$, scriviamo

$$\begin{cases} (h-2)x_1 = hx_4 \\ (h-2)x_2 = hx_5 \\ hx_1 + hx_2 + 2x_3 = hx_4 + hx_5 \end{cases}.$$

Ponendo $x_4 = h-2$ e $x_5 = 0$ ricaviamo la soluzione $(h, 0, -h, h-2, 0)$.

Ponendo $x_4 = 0$ e $x_5 = h-2$ ricaviamo la soluzione $(0, h, -h, 0, h-2)$.

Osserviamo che queste sono due soluzioni indipendenti, anche nel caso $h = 2$, quindi

$$\operatorname{Ker} f_h = \mathscr{L}(hM_1 - hM_3 + (h-2)M_4, hM_2 - hM_3 + (h-2)M_5), \text{ per ogni } h \in \mathbb{R},$$

cioè

$$\operatorname{Ker} f_h = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} h & 0 & -h \\ h-2 & 0 & 2-h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & -h \\ 0 & h-2 & 2-h \end{pmatrix} \right).$$

3) Dal punto precedente si ottiene subito

$$f_h(x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3 + x_4M_4 + x_5M_5) = \\ ((2-h)x_1 + hx_4, (2-h)x_2 + hx_5, hx_1 + hx_2 + 2x_3 - hx_4 - hx_5).$$

Quest'ultimo vettore appartiene a W se e solo se

$$\begin{cases} (2-h)x_1 + hx_4 = (2-h)x_2 + hx_5 \\ (2-h)x_1 + hx_4 = hx_1 + hx_2 + 2x_3 - hx_4 - hx_5 \end{cases} \iff \\ \begin{cases} (2-h)x_1 + (h-2)x_2 + hx_4 - hx_5 = 0 \\ 2(1-h)x_1 - hx_2 - 2x_3 + 2hx_4 + hx_5 = 0 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni che definiscono W. La matrice del sistema ha rango 2, quindi

$$\dim_{\mathbb{R}} W = 5 - 2 = 3.$$

4) Sia $X \in V$ una matrice incognita. Le equazioni che definiscono $U^\perp$ come sottospazio di $\mathbb{R}^{2,3}$ sono

$$\begin{cases} \psi(N_1, X) = 0 \\ \psi(N_2, X) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{11} - x_{13} - x_{21} + x_{23} = 0 \\ x_{12} - x_{13} - x_{22} + x_{23} = 0 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{22} - x_{23} = 0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema ha rango massimo, quindi $\dim_{\mathbb{R}} U^\perp = 6 - 3 = 3$.

II

1) La circonferenza γ_h non esiste se e solo se C_h è allineato con A e B, cioè se e solo se $h = 0$. Se $h \neq 0$ la circonferenza γ_h esiste e giace sul piano $z = 0$. Il suo centro si può calcolare intersecando l'asse del segmento AB con l'asse del segmento AC_h.

L'asse del segmento AB è la retta $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

L'asse del segmento AC_h è la retta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-h)^2 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 2hy - h^2 - 9 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Il centro E_h di γ_h si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 6x + 2hy - h^2 - 9 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_h\left(1, \frac{h^2+3}{2h}, 0\right).$$

Il quadrato del raggio è $r^2 = d(A, E_h)^2 = 1 + \frac{(h^2+3)^2}{4h^2} = \frac{h^4+10h^2+9}{4h^2}$.

Equazioni di γ_h

$$\gamma_h \begin{cases} (x-1)^2 + \left(y - \frac{h^2+3}{2h}\right)^2 = 1 + \frac{(h^2+3)^2}{4h^2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\gamma_h \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{h^2+3}{h}y + \frac{(h^2+3)^2}{4h^2} = 1 + \frac{(h^2+3)^2}{4h^2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_h \begin{cases} hx^2 + hy^2 - 2hx - (h^2+3)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

2) Calcoliamo la lunghezza dei lati del triangolo ABC_h.

$$\overline{AB} = 2; \quad \overline{AC_h} = \sqrt{h^2+9}; \quad \overline{BC_h} = \sqrt{h^2+1}.$$

$\overline{AB} = \overline{AC_h} \iff 4 = h^2 + 9 \iff h^2 + 5 = 0$, impossibile.

$\overline{AB} = \overline{BC_h} \iff 4 = h^2 + 1 \iff h = \pm\sqrt{3}$.

$\overline{AC_h} = \overline{BC_h} \iff h^2 + 9 = h^2 + 1$, impossibile.

Quindi il triangolo ABC_h è isoscele se e solo se $h = \pm\sqrt{3}$.

Inoltre per $h = \pm\sqrt{3}$ i lati del triangolo sono $\overline{AB} = \overline{BC_h} = 2$ e $\overline{AC_h} = 2\sqrt{3}$.

Calcoliamo l'ampiezza degli angoli interni. Applicando il teorema di Carnot, otteniamo

$$12 = 4 + 4 - 8\cos(\widehat{ABC_h}) \Rightarrow \cos(\widehat{ABC_h}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABC_h} = 120°$$

Conseguentemente $\widehat{BC_hA} = \widehat{C_hAB} = 30°$.

3) Per prima cosa determiniamo l'equazione del cono di vertice V contenente γ_1. La famiglia di quadriche contenenti γ_1 ha equazione

$$x^2+y^2-2x-4y+(2ax+2by+cz+2d)z=0 \iff x^2+y^2+cz^2+2axz+2byz-2x-4y+2dz=0.$$

Imponiamo che essa abbia vertice in V

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & b & -2 \\ a & b & c & d \\ -1 & -2 & d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases} a=0 \\ b-1=0 \\ a+b+c+d=0 \\ d-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-4 \\ d=3 \end{cases}.$$

Quindi l'equazione del cono cercato è

$$x^2+y^2-4z^2+2yz-2x-4y+6z=0.$$

Pertanto δ ha equazioni

$$\delta \begin{cases} x=0 \\ y^2+2yz-4z^2-4y+6z=0 \end{cases}.$$

La conica δ è una iperbole. Poiché essa giace su un piano coordinato, possiamo scrivere la sua matrice associata B, (rispetto alle variabili y,z,t).

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il centro $F(0,u,v)$ di δ soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} u+v-2=0 \\ u-4v+3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow F(0,1,1).$$

Adesso determiniamo i punti impropri di δ

$$\begin{cases} x=0 \\ t=0 \\ y^2+2yz-4z^2=0 \end{cases} ;\ \text{una coppia di soluzioni è} \begin{cases} x=0 \\ y=1\pm\sqrt{5} \\ z=-1 \\ t=0 \end{cases}.$$

Pertanto i due punti impropri di δ sono $P_{1,\infty}(0,1-\sqrt{5},-1,0)$ e $P_{2,\infty}(0,1+\sqrt{5},-1,0)$.

Gli asintoti sono le rette tangenti nei punti impropri

$$\begin{pmatrix} y & z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\pm\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=0.$$

I due asintoti sono quindi

$$r_1 \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{5}y+(5+\sqrt{5})z-5-2\sqrt{5}=0 \end{cases} \iff r_1 \begin{cases} x=0 \\ y+(1+\sqrt{5})z-2-\sqrt{5}=0 \end{cases}$$

$$r_2 \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{5}y+(\sqrt{5}-5)z+5-2\sqrt{5}=0 \end{cases} \iff r_2 \begin{cases} x=0 \\ y+(1-\sqrt{5})z-2+\sqrt{5}=0 \end{cases}.$$

Per tracciare il grafico di δ basta adesso disegnare i due asintoti, ricordare che gli assi di simmetria sono le bisettrici degli asintoti e osservare che δ passa per l'origine $(0,0,0)$.

4) Le quadriche contenenti δ e γ_1 costituiscono un fascio. Tale fascio è generato, ad esempio, dal cono precedentemente trovato e dal prodotto dei due piani su cui giacciono le due coniche. Possiamo quindi scrivere tale fascio nel seguente modo

$$x^2 + y^2 - 4z^2 + 2yz - 2x - 4y + 6z + 2kxz = 0.$$

La matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ k & 1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ k & 1 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & k+3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & k+3 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & k+3 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 - 6 - 2k - 6 + 16 + 1 - 3k - 9 + k(4k - k - 3 - 2 + k) =$$
$$= -5k + k(4k - 5) = 4k^2 - 10k = 2k(2k - 5).$$

Quindi $\det B = 0$ se e solo se $k = 0$ oppure $k = \frac{2}{3}$, valori per cui si ottengono coniche degeneri.

Per $k = 0$ otteniamo il precedente cono.

Inoltre

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - k^2 - 1 = -k^2 - 5 < 0, \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}.$$

Quindi la conica all'infinito è sempre irriducibile.

Ne segue che per $k = \frac{5}{2}$ si ha ancora un cono.

Per $k \neq 0$ e $k \neq \frac{5}{2}$ si hanno quindi ellissoidi o iperboloidi. Ma poichè le quadriche contengono δ, che è una iperbole non vi sono ellissoidi nel fascio. Quindi per $k \neq 0$ e $k \neq \frac{5}{2}$ si hanno iperboloidi.

Studiamo il segno del determinante di B.

$$\det B > 0 \iff k < 0,\ k > \frac{5}{2}, \text{ iperboloidi iperbolici.}$$

$$\det B < 0 \iff 0 < k < \frac{5}{2}, \text{ iperboloidi ellittici.}$$