SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria**
assegnata giorno 26 settembre 2014

I

1) Sia $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ una matrice incognita. Otteniamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da cui ricaviamo che

$$\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x+2y & 3x+y \\ 2z+2t & 3z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} -2y+3z & -3x+y+3t \\ 2x-z-2t & 2y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così il seguente sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} -2y+3z = 1 \\ -3x+y+3t = -2 \\ 2x-z-2t = 1 \\ 2y-3z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y-3z = -1 \\ 3x-y-3t = 2 \\ 2x-z-2t = 1 \end{cases}.$$

Riducendo per righe la matrice completa del sistema si ha

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -3 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Pertanto il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa ed è uguale a 2. Il sistema ammette quindi ∞^2 soluzioni. Si ha che

$$\begin{cases} 2x = z+2t+1 \\ 2y = 3z-1 \end{cases} \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z+2t+1 & 3z-1 \\ 2z & 2t \end{pmatrix}.$$

In conclusione otteniamo che

$$S = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z+2t+1 & 3z-1 \\ 2z & 2t \end{pmatrix} \mid z,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Osserviamo che

$$X \in S \iff X = z\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ z,t \in \mathbb{R}.$$

Poniamo $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi

$$X \in S \iff X = \frac{1}{2}zH + tI + \frac{1}{2}K,\ z, t \in \mathbb{R}.$$

Si ha quindi che $S \subseteq \mathscr{L}(H, I, K)$, da cui segue che $\mathscr{L}(S) \subseteq \mathscr{L}(H, I, K)$.

D'altra parte $\frac{1}{2}K \in S$ (essa si ottiene per $z = t = 0$), quindi $K \in \mathscr{L}(S)$. Perciò se $X \in S$ allora $X - \frac{1}{2}K \in \mathscr{L}(S)$, da cui segue che $\frac{1}{2}zH + tI \in \mathscr{L}(S)$, per ogni $z, t \in \mathbb{R}$.

Ponendo $z = 2$ e $t = 0$, otteniamo che $H \in \mathscr{L}(S)$; ponendo $z = 0$ e $t = 1$, otteniamo che $I \in \mathscr{L}(S)$.

Abbiamo così provato che $\mathscr{L}(H, I, K) \subseteq \mathscr{L}(S)$, quindi $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(H, I, K)$.

Poiché H, I, K sono linearmente indipendenti, si ha che $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{L}(S) = 3$ e (H, I, K) è una sua base.

3) Prima di tutto notiamo che $f(I) = f(A) = 0$. Scegliamo allora per $\mathbb{R}^{2,2}$ la base $\mathscr{B}$ costituita dai seguenti elementi

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = 3I - E_{21} - 6E_{22}; \\ f(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2I + A - 4E_{21} + E_{22}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$M := \mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$P(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-x & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 1-x \end{vmatrix} = x^2(x^2 - 25).$$

Gli autovalori sono quindi

$$\begin{aligned} &x = 0, && m_0 = 2; \\ &x = 5, && m_5 = 1 = g_5; \\ &x = -5, && m_{-5} = 1 = g_{-5}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$g_0 = 4 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Quindi l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Calcoliamo una base di V_5 :

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5x + 3z - 2t = 0 \\ -5y + t = 0 \\ 3z + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12h \\ y = -3h \\ z = 10h \\ t = -15h \end{cases}.$$

Quindi

$$V_5 = \mathscr{L}(12I - 3A + 10E_{21} - 15E_{22}) = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\right).$$

Calcoliamo una base di V_{-5} :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3z - 2t = 0 \\ 5y + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h \\ y = h \\ z = -5h \\ t = -5h \end{cases}.$$

Quindi

$$V_{-5} = \mathscr{L}(I + A - 5E_{21} - 5E_{22}) = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Conseguentemente una base di autovettori è costituita dalle seguenti matrici

$$M_1 := I, M_2 := A, M_3 := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, M_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Ovviamente $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 2$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(M_3, M_4)$. Inoltre

$$\begin{aligned} g(M_3) &= f(M_3) = 5M_3 \\ g(M_4) &= f(M_4) = -5M_4, \end{aligned}$$

quindi g è iniettiva e $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$.

II

1) L'iperbole γ giace sul piano individuato dalla direttrice r e dal fuoco O. Il fascio di piani contenenti r ha equazione $\lambda(x + 2y + 2) + \mu(x + z + 1) = 0$. Imponendo il passaggio per O otteniamo $2\lambda + \mu = 0$. Scegliendo la soluzione $\lambda = 1$, $\mu = -2$ otteniamo il piano $p : x - 2y + 2z = 0$. Ogni conica è il luogo dei punti del piano tali che il rapporto delle distanze dal fuoco e dalla direttrice è pari all'eccentricità. L'eccentricità dell'iperbole equilatera è $e = \sqrt{2}$. L'equazione del luogo è quindi

$$d(P, O)^2 = e^2 d(P, r)^2, \; P \in p.$$

Sia π il piano passante per r ortogonale a p. Si ha che $d(P, r) = d(P, \pi)$. Per calcolare π consideriamo nuovamente il fascio di piani per r : $(\lambda + \mu)x + 2\lambda y + \mu z + 2\lambda + \mu = 0$. Imponiamo l'ortogonalità con p

$$(\lambda + \mu, 2\lambda, \mu) \cdot (1, -2, 2) = 0 \iff -3\lambda + 3\mu = 0.$$

Scegliendo la soluzione $\lambda = 1$, $\mu = 1$ otteniamo il piano $\pi : 2x + 2y + z + 3 = 0$.

Sia adesso $P(2y - 2z, y, z) \in p$. L'iperbole equilatera γ ha equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ (2y-2z)^2 + y^2 + z^2 = 2\frac{[2(2y-2z)+2y+z+3]^2}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 9(5y^2 - 8yz + 5z^2) = 2(6y - 3z + 3)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 5y^2 - 8yz + 5z^2 = 2(2y - z + 1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3y^2 - 3z^2 + 8y - 4z + 2 = 0 \end{cases}.$$

2) L'asse trasverso di γ è la retta del piano p passante per O ed ortogonale a r. Il vettore direttivo di r è $v_r = (2, -1, -2)$. Piano per O, ortogonale a $r : 2x - y - 2z = 0$. L'asse trasverso di γ ha quindi equazioni

$$a_1 : \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Intersecando con γ otteniamo i vertici dell'iperbole:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3y^2 - 3z^2 + 8y - 4z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \\ 9z^2 + 12z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \\ z = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{3} \end{cases}.$$

Otteniamo così i due vertici

$$V_1(\frac{2}{3}(-2+\sqrt{2}), \frac{2}{3}(-2+\sqrt{2}), \frac{1}{3}(-2+\sqrt{2})),\ V_2(\frac{2}{3}(-2-\sqrt{2}), \frac{2}{3}(-2-\sqrt{2}), \frac{1}{3}(-2-\sqrt{2})).$$

Il centro C di γ è il punto medio del segmento V_1V_2, cioè $C(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

L'altro asse a_2 di γ è la retta del piano p passante per C ed ortogonale ad a_1. Il piano passante per C ed ortogonale ad a_1 ha equazione

$$2(x + \frac{4}{3}) + 2(y + \frac{4}{3}) + (z + \frac{2}{3}) = 0 \iff 2x + 2y + z + 6 = 0.$$

Quindi

$$a_2 : \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z + 6 = 0 \end{cases}.$$

3) La generica quadrica contenente γ è

$$3y^2 - 3z^2 + 8y - 4z + 2 + (ax + 2by + 2cz + 2d)(x - 2y + 2z) = 0,$$

cioè

$$ax^2 + 2(b-a)xy + (3-4b)y^2 + 2(a+c)xz + 4(b-c)yz + (4c-3)z^2 + 2dx + 4(2-d)y + 4(d-1)z + 2 = 0.$$

Imponiamo che tale quadrica abbia vertice in $V(1, 0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} a & b-a & a+c & d \\ b-a & 3-4b & 2(b-c) & 2(2-d) \\ a+c & 2(b-c) & 4c-3 & 2(d-1) \\ d & 2(2-d) & 2(d-1) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a + d = 0 \\ a - b + 2d - 4 = 0 \\ a + c + 2d - 2 = 0 \\ d + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = 4 \\ d = -2 \end{cases}.$$

Otteniamo così il cono richiesto

$$2x^2 - 16xy + 27y^2 + 12xz - 40yz + 13z^2 - 4x + 16y - 12z + 2 = 0.$$

4) Studiamo il fascio di quadriche

$$2x^2 - 16xy + 27y^2 + 12xz - 40yz + 13z^2 - 4x + 16y - 12z + 2 + hx^2 = 0,\ h \in \mathbb{R}$$

cioè

$$(h+2)x^2 - 16xy + 27y^2 + 12xz - 40yz + 13z^2 - 4x + 16y - 12z + 2 = 0,\ h \in \mathbb{R}.$$

La matrice associata a tale quadrica è

$$B = \begin{pmatrix} h+2 & -8 & 6 & -2 \\ -8 & 27 & -20 & 8 \\ 6 & -20 & 13 & -6 \\ -2 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinanate di B riduciamo la matrice

$$\begin{pmatrix} h+2 & -8 & 6 & -2 \\ -8 & 27 & -20 & 8 \\ 6 & -20 & 13 & -6 \\ -2 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ -2 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 18h.$$

Quindi $\det B = 0 \iff h = 0$, nel qual caso ritroviamo il cono calcolato nel punto precedente.

Per $h \neq 0$ si hanno quadriche non degeneri.

Per $h > 0$ si hanno quadriche a punti iperbolici.

Per $h < 0$ si hanno quadriche a punti ellittici.

Calcoliamo il determinante della sottomatrice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} h+2 & -8 & 6 \\ -8 & 27 & -20 \\ 6 & -20 & 13 \end{vmatrix} = 18 - 49h.$$

Quindi $\det A = 0 \iff h = \frac{18}{49}$. Per $h = \frac{18}{49}$ si ha quindi un paraboloide iperbolico.

Adesso studiamo la segnatura della forma quadratica associata alla matrice A. Considerando la serie principale

$$13,\ \begin{vmatrix} 27 & -20 \\ -20 & 13 \end{vmatrix} = -49,\ \det A = 18 - 49h,$$

deduciamo che tale forma quadratica non ha segno definito, quindi non si hanno ellissoidi.

Quindi, in conclusione, per $h < 0$ si hanno iperboloidi ellittici e per $h > 0$, $h \neq \frac{18}{49}$, si hanno iperboloidi iperbolici.