SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata giorno 27 gennaio 2014

I

1) Prima di tutto calcoliamo il rango di M. Riduciamo M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & h & 5-h \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & h-6 & 7-h \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & h-8 & 8-h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\operatorname{rk} M = 3$ per $h \neq 8$; $\operatorname{rk} M = 2$ per $h = 8$.

Per $h \neq 8$ si ha che $\dim \operatorname{Im} f_h = \operatorname{rk} M = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} f_h = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rk} M = 4 - 3 = 1$. Un sistema di equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} f_h$ è

$$\begin{cases} x + 3z - t = 0 \\ y - 2z + t = 0 \\ (h-8)z + (8-h)t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3z - t = 0 \\ y - 2z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\operatorname{Ker} f_h = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2t = 0,\ y - t = 0,\ z - t = 0\}.$$

In particolare $\operatorname{Ker} f_h = \mathscr{L}\big((-2, 1, 1, 1)\big)$.

Inoltre si ha che

$$\operatorname{Im} f_h = \big((1, 1, 2, 0), (0, 2, -1, 1), (3, -1, h, -2)\big).$$

L'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f_h$ è quindi

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & h & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y + 2t = 0,$$

cioè

$$\operatorname{Im} f_h = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2t = 0\}.$$

Per $h = 8$ si ha che $\dim \operatorname{Im} f_8 = \operatorname{rk} M = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} f_8 = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rk} M = 4 - 2 = 2$. Procedendo in maniera analoga al caso precedente si ricava che

$$\operatorname{Ker} f_8 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3z - t = 0,\ y - 2z + t = 0\}$$

e

$$\operatorname{Im} f_8 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2t = 0,\ 5x - y - 2z = 0\}.$$

2) Nel caso $h \neq 8$, notiamo subito che $(-2,1,1,1) \notin \mathrm{Im}\, f_h$, quindi $\mathrm{Ker}\, f_h \cap \mathrm{Im}\, f_h = \{0\}$, pertanto la somma $\mathrm{Ker}\, f_h + \mathrm{Im}\, f_h$ è diretta.

Nel caso $h = 8$, $\mathrm{Im}\, f_8 = \mathscr{L}\big((1,1,2,0),(0,2,-1,1)\big)$, quindi ogni vettore di $\mathrm{Im}\, f_8$ si può scrivere nella forma $(a, a+2b, 2a-b, b)$. Imponendo che tale vettore soddisfi le equazioni di $\mathrm{Ker}\, f_8$, otteniamo

$$\begin{cases} a + 3(2a-b) - b = 0 \\ (a+2b) - 2(2a-b) + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a - 4b = 0 \\ -3a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases},$$

quindi $\mathrm{Ker}\, f_8 \cap \mathrm{Im}\, f_8 = \{0\}$, pertanto la somma $\mathrm{Ker}\, f_8 + \mathrm{Im}\, f_8$ è diretta.

3) Il polinomio caratteristico di f_h è

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2-x & -1 & 1 \\ 2 & -1 & h-x & 5-h \\ 0 & 1 & -2 & 1-x \end{vmatrix}.$$

$$P(1) = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & h-1 & 5-h \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & h-1 & 5-h \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & h+1 & 3-h \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & h-5 & 3-h \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 3(3-h) + h - 5 = 0 \iff 4 - 2h = 0 \iff h = 2.$$

Nel caso $h = 2$ calcoliamo l'autospazio associato all'autovalore 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Adesso scegliamo la seguente base di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (-4,2,1,3)$, $v_4 = (-2,1,1,1) \in \mathrm{Ker}\, f_2$, e sia $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Si ha che

$$\begin{cases} f_2(v_1) = (1,1,2,0) = 3v_1 - v_3 + 3v_4 \\ f_2(v_2) = (0,2,-1,1) = 2v_2 + v_3 - 2v_4 \\ f_2(v_3) = v_3 \\ f_2(v_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è quindi $P(x) = (3-x)(2-x)(1-x)x$, che ha quattro radici distinte e pertanto f_2 è diagonalizzabile.

4) Nel caso $h = 8$, $f_8(\mathrm{Im}\, f_8) = f_8(\mathrm{Ker}\, f_8 \oplus \mathrm{Im}\, f_8) = f_8(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Im}\, f_8$.

Nel caso $h \neq 8$, notiamo che $\mathrm{Im}\, f_8 \subset \mathrm{Im}\, f_h$, da cui segue che

$$f_8(\mathrm{Im}\, f_8) \subseteq f_8(\mathrm{Im}\, f_h) \subseteq f_8(\mathbb{R}^4) = f_8(\mathrm{Im}\, f_8) \Rightarrow f_8(\mathrm{Im}\, f_h) = f_8(\mathrm{Im}\, f_8) = \mathrm{Im}\, f_8.$$

II

1) La retta s giace sul piano p_1 contenente r e passante per P. Il fascio di piani contenenti r è $\lambda(x+z)+\mu(2x-y)=0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo $(3+1)\lambda+6\mu=0$. Una soluzione è $\lambda=3$ e $\mu=-2$. Quindi $p_1 : x-2y-3z=0$.

   La retta s giace anche sul piano p_2 passante per P e ortogonale a r. Il punto improprio di r è dato dal sistema

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow P_\infty(1,2,-1,0),$$

   quindi $p_2 : 1(x-3)+2(y-0)-1(z-1)=0$, cioè $p_2 : x+2y-z-2=0$.

   Ovviamente $s=p_1\cap p_2 \begin{cases} x-2y-3z=0 \\ x+2y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow s \begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}$.

2) Il fascio Φ giace sul piano p_1. Riscriviamo la retta r come intersezione di p_1 con un altro piano.

$$r\begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \iff r\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

   Il fascio Φ è generato dalle coniche $r\cup s$ e dalla retta impropria del piano p_1 contata due volte.

$$\Phi\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ \lambda(x+z)(2y+z-t)+\mu t^2=0 \end{cases}.$$

   In forma non omogenea

$$\Phi\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ \lambda(x+z)(2y+z-1)+\mu=0 \end{cases}.$$

   Le coniche irriducibili del fascio sono, ovviamente, tutte iperboli equilatere.

3) Gli assi di simmetria delle coniche in Φ sono le bisettrici delle rette r ed s. Le bisettrici sono il luogo dei punti Q del piano p_1 equidistanti da r e da s. Sia $Q(2b+3c,b,c)$ un punto del piano p_1.

   Calcoliamo l'equazione del piano p_r passante per r ed ortogonale a p_1 :

$$\lambda(x-2y-3z)+\mu(x+z)=0 \Rightarrow (\lambda+\mu)x-2\lambda y+(\mu-3\lambda)z=0;$$

   condizione di ortogonalità con p_1 :

$$(\lambda+\mu,-2\lambda,\mu-3\lambda)\cdot(1,-2,-3)=0 \Rightarrow 14\lambda-2\mu=0.$$

   Una soluzione è $\lambda=1$ e $\mu=7$. Quindi $p_r : 4x-y+2z=0$.

$$d(Q,r)=d(Q,p_r)=\frac{|4(2b+3c)-b+2c|}{\sqrt{21}}=\frac{|7b+14c|}{\sqrt{21}}$$

   Calcoliamo l'equazione del piano p_s passante per s ed ortogonale a p_1 :

$$\lambda(x-2y-3z)+\mu(2y+z-1)=0 \Rightarrow \lambda x+(2\mu-2\lambda)y+(\mu-3\lambda)z-\mu=0;$$

condizione di ortogonalità con p_1 :

$$(\lambda, 2\mu - 2\lambda, \mu - 3\lambda) \cdot (1, -2, -3) = 0 \Rightarrow 14\lambda - 7\mu = 0.$$

Una soluzione è $\lambda = 1$ e $\mu = 2$. Quindi $p_s : x + 2y - z - 2 = 0$.

$$d(Q, s) = d(Q, p_s) = \frac{|(2b + 3c) + 2b - c - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|4b + 2c - 2|}{\sqrt{6}}$$

Eguagliando le due distanze, otteniamo le equazioni degli assi di simmetria

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \frac{|7y+14z|}{\sqrt{21}} = \frac{|4y+2z-2|}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow a_1 \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \frac{7y+14z}{\sqrt{21}} = \frac{4y+2z-2}{\sqrt{6}} \end{cases}, \; a_2 \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \frac{7y+14z}{\sqrt{21}} = -\frac{4y+2z-2}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

4) Imponiamo a Φ il passaggio per $A(2, 1, 0)$:

$$\lambda(2 + 0)(2 + 0 - 1) + \mu = 0 \Rightarrow 2\lambda + \mu = 0.$$

Una soluzione è $\lambda = 1$, $\mu = -2$. Quindi

$$\gamma \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 1(2y + 3z + z)(2y + z - 1) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ (2y + 4z)(2y + z - 1) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ (y + 2z)(2y + z - 1) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ (y + 2z)(2y + z) - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

La quadrica $Q_0 : (y + 2z)(2y + z) - y - 2z - 1 = 0$ è un cilindro iperbolico, contenente γ, di vertice $X_\infty(1, 0, 0, 0)$. Sommiamo all'equazione di Q_0 un multiplo dell'equazione di p_1 :

$$Q : \; (y + 2z)(2y + z) - y - 2z - 1 + 2(x - 2y - 3z) = 0.$$

Q contiene γ ed ha la conica all'infinito riducibile. Vediamo se non è degenere.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 & -4 \\ 1 & -\frac{5}{2} & -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B \neq 0,$$

quindi Q è un paraboloide iperbolico contenente γ.