# SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria**
assegnata giorno 1 ottobre 2012

---

## I

1) Sia $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix}$ una matrice in $\mathbb{R}^{3,2}$. $X \in V$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $AX = \lambda I$, cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ ovvero } \begin{pmatrix} x+u-\lambda & y+v \\ z & t-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui ricaviamo il seguente sistema lineare omogeneo di $4$ equazioni in $7$ incognite

$$\begin{cases} x+u-\lambda = 0 \\ y+v = 0 \\ z = 0 \\ t-\lambda = 0 \end{cases}.$$

Ordinando le variabili nel seguente modo $x, y, z, t, u, v, \lambda$, la matrice del sistema è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\dim_{\mathbb{R}} V = 7 - \operatorname{rk} M = 7 - 4 = 3$.

Dal precedente sistema, ponendo $\lambda = 0$, si ricava il sistema lineare di $4$ equazioni in $6$ incognite che definisce $U$, la cui matrice associata è

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim_{\mathbb{R}} U = 6 - \operatorname{rk} N = 6 - 4 = 2$.

Ovviamente $U$ è un sottospazio di $V$. Una base di $U$ si ottiene isolando al primo membro le prime $4$ variabili e ponendo $u = -1$, $v = 0$ e poi $u = 0$, $v = -1$.

$$\begin{cases} x = -u \\ y = -v \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto una base di $U$ è $\mathscr{B}_U = (B_1, B_2)$. Una base di $V$, che estende una base di $U$, si ottiene aggiungendo la matrice ottenuta dal primo sistema ponendo $u = 0$, $v = 0$, $\lambda = 1$, cioè la matrice

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto una base di $V$ che estende una base di $U$ è $\mathscr{B}_V = (B_1, B_2, B_3)$.

2) Poiché $U$ è l'autospazio associato all'autovalore $2$, si ha che $g_2 = \dim_{\mathbb{R}} U = 2$. Si ha che

$$\begin{cases} f(B_1) = 2B_1 \\ f(B_2) = 2B_2 \\ f(B_3) = aB_1 + bB_2 + cB_3 \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza la matrice associata ad $f$ rispetto alla base $\mathscr{B}_V$ è

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $(2 - x)^2(c - x)$. Quindi $f$ non diagonalizzabile implica $g_2 < m_2 = 3$, cioè $c = 2$ ed inoltre deve essere $(a, b) \neq (0, 0)$.

3) ${}^t\!AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Essendo reale simmetrica è certamente diagonalizzabile. Il suo polinomio caratteristico è

$$P(x) = (1 - x)^3 - (1 - x) = (1 - x)[(1 - x)^2 - 1] = -x(1 - x)(2 - x).$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è ${}^t\!AA$. Determiniamo una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per $g$. Si ha che

$$V_0 = \mathscr{L}\big((1, 0, -1)\big),\ V_1 = \mathscr{L}\big((0, 1, 0)\big),\ V_2 = \mathscr{L}\big((1, 0, 1)\big).$$

Pertanto

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$P\,{}^t\!AAP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Poniamo $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. $P\,{}^t\!AAP^{-1}=D\Rightarrow {}^t\!AA=P^{-1}DP\Rightarrow({}^t\!AA)^n=P^{-1}D^nP$. Quindi

$$({}^t\!AA)^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2^n\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^n&0&2^n\\0&2&0\\2^n&0&2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Sostituendo otteniamo $({}^t\!AA)^{101}=\begin{pmatrix}2^{100}&0&2^{100}\\0&1&0\\2^{100}&0&2^{100}\end{pmatrix}$.

## II

1) Sia $r:\ x+2y=z=0$. La parabola richiesta appartiene al fascio di coniche bitangenti alla retta impropria nel punto improprio della retta $r$ ed alla retta passante per $V$ ortogonale a $r$. Il punto improprio di $r$ è $P_\infty(2,-1,0,0)$ ed il punto improprio del piano $z=0$, in direzione ortogonale a $r$ è $P_\infty^\perp(1,2,0,0)$.

Retta per $V$ ortogonale a $r:\ z=\begin{vmatrix}x&y&t\\1&0&1\\1&2&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow z=2x-y-2t=0.$

Retta per $V$ parallela a $r:\ z=\begin{vmatrix}x&y&t\\1&0&1\\2&-1&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow z=x+2y-t=0.$

Il fascio di coniche è quindi $z=\lambda t(2x-y-2t)+\mu(x+2y-t)^2=0$. Imponendo il passaggio per $O(0,0,0,1)$, otteniamo $-2\lambda+\mu=0\Rightarrow\lambda=1,\ \mu=2$. Pertanto la parabola ha equazioni

$$p:\ z=t(2x-y-2t)+2(x+2y-t)^2=0;$$

in forma non omogenea

$$p:\ z=2x^2+8xy+8y^2-2x-9y=0$$

2) La tangente nel vertice è la retta $u$, precedentemente calcolata, di equazioni $z=2x-y-2=0$. Sia $P_0(x_0,y_0,0)\in p$, quindi $2x_0^2+8x_0y_0+8y_0^2-2x_0-9y_0=0$ (*). Sia $P_s(x_s,y_s,0)$ il simmetrico di $P_0$ rispetto ad $u$ e sia $M$ il punto medio del segmento $P_0P_s$. Si ha che $M(\frac{1}{2}(x_0+x_s),\frac{1}{2}(y_0+y_s),0)$. Sia $u_0$ la retta passante per $P_0$ ed ortogonale a $u$. Si ha che $M=u\cap u_0$. Calcoliamo l'equazione di $u_0$ :

$$u_0:\ z=\begin{vmatrix}x&y&1\\x_0&y_0&1\\2&-1&0\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow z=x+2y-x_0-2y_0=0.$$

Quindi $M$ deve essere la soluzione del sistema

$$u \cap u_0 : \begin{cases} z = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - x_0 - 2y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + x_s - \frac{1}{2}(y_0 + y_s) - 2 = 0 \\ \frac{1}{2}(x_0 + x_s) + y_0 + y_s - x_0 - 2y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x_0 = -3x_s + 4y_s + 8 \\ 5y_0 = 4x_s + 3y_s - 4 \end{cases} .$$

Sostituendo nella (*) otteniamo

$$\frac{1}{25}[2(-3x_s + 4y_s + 8)^2 + 8(-3x_s + 4y_s + 8)(4x_s + 3y_s - 4) + 8(4x_s + 3y_s - 4)^2 + \\ - 10(-3x_s + 4y_s + 8) - 45(4x_s + 3y_s - 4)] = 0,$$

semplificando e sostituendo $x$ al posto di $x_s$ e $y$ al posto di $y_s$ ricaviamo le equazioni della parabola richiesta

$$p_s : \; z = 2x^2 + 8xy + 8y^2 - 6x - 7y + 4 = 0.$$

3) La famiglia di quadriche contenenti $p$ ha equazione

$$2x^2 + 8xy + 8y^2 - 2x - 9y + (2ax + 2by + cz + 2d)z = 0.$$

Imponiamo a tale quadrica di contenere la conica di equazioni $\gamma : \; y = x^2 - x = 0$. Secando con il piano di equazione $y = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 - 2x + (2ax + cz + 2d)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 + 2axz + cz^2 - 2x + 2dz = 0 \end{cases} ,$$

da cui segue subito che tale conica coincide con $\gamma$ se e solo se $a = c = d = 0$. Quindi, sostituendo sopra, ricaviamo

$$2x^2 + 8xy + 8y^2 + 2byz - 2x - 9y = 0.$$

Infine, imponendo il passaggio per $P(0, 1, \frac{1}{2})$, troviamo la condizione

$$8 + b - 9 = 0 \Rightarrow b = 1.$$

Pertanto la quadrica che soddisfa le condizioni richieste è

$$Q : \; 2x^2 + 8xy + 8y^2 + 2yz - 2x - 9y = 0.$$

Sia $B$ la matrice associata a $Q$. Si verifica subito che $\det B \neq 0$ e che $\det A \neq 0$. Poiché inoltre $Q$ contiene una parabola non può essere un ellissoide, quindi è un iperboloide. Inoltre $Q$ contiene la conica $\gamma$, spezzata in due rette reali e distinte, quindi è un iperboloide iperbolico.

4) Per quanto detto precedentemente $P$ è un punto iperbolico per $Q$. Calcoliamo l'equazione del piano tangente $\pi$ a $Q$ in $P$ :

$$\pi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : \; 6x + 8y + 2z - 9 = 0.$$

Le rette passanti per $P$ e contenute in $Q$ sono le rette in cui si spezza la conica sezione $\pi \cap Q$.

$$\pi \cap Q \begin{cases} 6x + 8y + 2z - 9 = 0 \\ 2x^2 + 8xy + 8y^2 + 2yz - 2x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 8y + 2z - 9 = 0 \\ 2x^2 + 8xy + 8y^2 + y(9 - 6x - 8y) - 2x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 8y + 2z - 9 = 0 \\ 2x(x + y - 1) = 0 \end{cases} .$$

Quindi le rette cercate sono

$$r_1 \begin{cases} 8y + 2z - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} , \quad r_2 \begin{cases} 6x + 8y + 2z - 9 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} .$$