SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria**
assegnata il 2 Marzo 2011

I

1) Lo spazio U è definito dal sistema di equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} 2x+y+z-4t-w=0 \\ x+y+2z-7t+w=0 \\ -x+3y+z-6t+2w=0 \\ x+2y-z+t-2w=0 \end{cases};$$

riduciamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -7 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -11 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & -14 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+y+z-4t-w=0 \\ 3x+2y+3z-11t=0 \\ y-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z-w=-2x+4t \\ 2y+3z=-3x+11t \\ y=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=t \\ z=-x+3t \\ w=x \end{cases}.$$

Poiché vi sono 2 variabili libere, $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$ ed una sua base è costituita dai vettori

$$u_1 = (1,0,-1,0,1),\ u_2 = (0,1,3,1,0).$$

2) Si ha che

$$U + V_h = \mathscr{L}\big(u_1, u_2, (0,1,h-1,1,3-h), (1,0,1,0,h-2)\big).$$

Per calcolare la sua dimensione, calcoliamo il rango della matrice delle componenti dei generatori. Nuovamente utilizziamo il metodo di riduzione.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 1 & 3-h \\ 1 & 0 & 1 & 0 & h-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 1 & 3-h \\ 0 & 0 & 2 & 0 & h-3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h-4 & 0 & 3-h \\ 0 & 0 & 2 & 0 & h-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h-4 & 0 & 3-h \\ 0 & 0 & h-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$, $\operatorname{rk} M = 4$ e $\dim_{\mathbb{R}}(U+V_h) = 4$.

Altrimenti $\operatorname{rk} M = 3$ e $\dim_{\mathbb{R}}(U+V_2) = \dim_{\mathbb{R}}(U+V_3) = 3$.

Se $h \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$ l'equazione di $U+V_h$ è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t & w \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h-4 & 0 & 3-h \\ 0 & 0 & h-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & t & w \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-h \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - t = 0.$$

Un sistema di equazioni di $U+V_2$ si ottiene invece dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t & w \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

annullando i due orlati del minore (non nullo) individuato dalle righe $2,3,4$ e dalle colonne $1,2,3$. Quindi

$$U+V_2 \begin{cases} y-t=0 \\ x+3y-z-2w=0 \end{cases}.$$

Un sistema di equazioni di $U+V_3$ si ottiene dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t & w \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

annullando, nuovamente, i due orlati del minore (non nullo) individuato dalle righe $2,3,4$ e dalle colonne $1,2,3$. Quindi

$$U+V_3 \begin{cases} y-t=0 \\ x-w=0 \end{cases}.$$

3) Consideriamo la seguente base $\mathscr{B}$ di W

$$w_1 = (1,0,1,0,0),\ w_2 = (0,1,3,1,0),\ w_3 = (0,0,-2,0,1),$$

e la base canonica $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Si ha che

$$\begin{array}{rlr} f(w_1) = & (2,0,2) = & 2e_1 + 2e_3 \\ f(w_2) = & (4,1,5) = & 4e_1 + e_2 + 5e_3 \\ f(w_3) = & (-2,1,1) = & -2e_1 + e_2 + e_3 \end{array}.$$

Quindi

$$N := \mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\operatorname{rk} N = 2$, da cui segue che $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 2$ e $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = 1$.

Più precisamente $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\big((1,0,1),(4,1,5)\big)$. I vettori del nucleo sono i vettori $aw_1 + bw_2 + cw_3$ tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3b \\ c = -b \end{cases}.$$

Pertanto $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(3w_1 - w_2 + w_3) = \mathscr{L}\big((3,-1,-2,-1,1)\big)$.

4) Scegliamo una base $\mathscr{A}$ di W che estende una base di $\operatorname{Ker} f$. Per esempio

$$z_1 = (3,-1,-2,-1,1) \in \operatorname{Ker} f,\ z_2 = w_1,\ z_3 = w_3.$$

Dal fatto che $f \circ g = 0$, segue che $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$; quindi

$$g(z_1) = az_1,\ g(z_2) = bz_1,\ g(z_3) = cz_1,\quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Conseguentemente

$$\mathfrak{M}^{\mathscr{A},\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di g sono 0 con $2 \leq m_0 \leq 3$ e a.

Se $a \neq 0$, allora $m_a = 1 = g_a$ e $m_0 = 2 = g_0$, quindi g è diagonalizzabile.

Se $a = 0$, allora $m_0 = 3$ e g è diagonalizzabile se e solo se $b = c = 0$, cioè $g = 0$.

In conclusione g non è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$ ed almeno uno tra b e c è non nullo.

II

1) La quadrica di equazione $y^2 + 2yz - 2z^2 - 1 = 0$ è un cilindro iperbolico di vertice $(1,0,0,0)$; il piano di equazione $x = 0$ non passa per il vertice, di conseguenza la conica C_1 è irriducibile ed è quindi un'iperbole.

La quadrica di equazione $2yz - 2z^2 + 2y - 1 = 0$ è un cilindro iperbolico di vertice $(1,0,0,0)$; il piano di equazione $x - y = 0$ non passa per il vertice, di conseguenza la conica C_2 è irriducibile ed è quindi anch'essa un'iperbole.

2) La generica quadrica contenente C_1 ha equazione

$$y^2 + 2yz - 2z^2 - 1 + (ax + by + cz + d)x = 0.$$

Intersecando con il piano di equazione $x - y = 0$, otteniamo la conica

$$\begin{cases} (a+b+1)y^2 + (c+2)yz - 2z^2 + dy - 1 = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Imponendo che tale conica coincida con C_2 otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ c + 2 = 2 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a - 1 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Quindi otteniamo il fascio di quadriche

$$ax^2 - (a+1)xy + y^2 + 2yz - 2z^2 + 2x - 1 = 0.$$

La matrice associata alla generica quadrica del fascio è

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & -a-1 & 0 & 2 \\ -a-1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le quadriche degeneri si ottengono per i valori di a che annullano $\det B$.

$$\det B = 0 \iff \begin{vmatrix} 2a & -a-1 & 0 & 2 \\ -a-1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2a+2 & -a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} -a-1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2a+2 & -a-1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (a+1)^2 - 6(a+1) = 0 \iff a = -1 \text{ oppure } a = 5.$$

Per $a = -1$ si ottiene un cono di vertice $V_1(1, 0, 0)$.

Per $a = 5$ si ottiene un altro cono di vertice $V_2(1, 2, 1)$.

3) Sia $P_0(y_0, y_0, z_0) \in C_2$ e sia $P_1(y_1, y_1, z_1)$. Dalla formula del punto medio di un segmento si ricava che P_1 è il simmetrico di P_0 rispetto al punto $D(-2, -2, -1)$ se solo se

$$\begin{cases} y_0 + y_1 = -4 \\ z_0 + z_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -y_0 - 4 \\ z_1 = -z_0 - 2 \end{cases},$$

cioè $P_1(-y_0 - 4, -y_0 - 4, -z_0 - 2)$. Adesso verifichiamo che $P_1 \in C_2$. Ovviamente P_1 sta sul piano di equazione $x - y = 0$, così basta controllare che appartiene anche alla quadrica di equazione $2yz - 2z^2 + 2y - 1 = 0$. Infatti

$$\begin{aligned} &2(-y_0 - 4)(-z_0 - 2) - 2(-z_0 - 2)^2 + 2(-y_0 - 4) - 1 = \\ &= 2(y_0 + 4)(z_0 + 2) - 2(z_0 + 2)^2 + 2(-y_0 - 4) - 1 = \\ &= 2(y_0 z_0 + 2y_0 + 4z_0 + 8) - 2(z_0^2 + 4z_0 + 4) - 2y_0 - 8 - 1 = \\ &= (2y_0 z_0 - 2z_0^2 + 4y_0 - 2y_0 - 1) + 8z_0 + 16 - 8z_0 - 8 - 8 = 0 \end{aligned}$$

in quanto $P_0 \in C_2$.

4) Gli asintoti di C_2 sono le rette che congiungono il centro di simmetria con i punti impropri. Calcoliamo pertanto i punti impropri di C_2 :

$$\begin{cases} 2yz - 2z^2 + 2yt - t^2 = 0 \\ x - y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z(y - z) = 0 \\ x - y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_\infty(1, 1, 0, 0) \\ Q_\infty(1, 1, 1, 0) \end{matrix}.$$

Gli asintoti sono quindi

$$DP_\infty \begin{cases} z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad DQ_\infty \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$