SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 27 Gennaio 2010

I

1) Poniamo

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e procediamo per induzione su n.

Per $n = 0$ si ha che $M_0 = I = A^0$.

Supponiamo che $M_{n-1} = A^{n-1}$ e proviamo che $M_n = A^n$. Si ha che

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n-1 & n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_n.$$

Così abbiamo dimostrato che $M_n = A^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Per $n \in \mathbb{Z}^-$ basta verificare che $M_n M_{-n} = I$. Infatti

$$M_n M_{-n} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

2) Sia $f \in \mathbb{R}[x]_5$. Si ha che $f = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$. $f(A) = 0 \iff$

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_4 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

da cui ricaviamo il sisteme lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0 \\ a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = -a_3 - 3a_4 - 6a_5 \\ a_1 = 3a_3 + 8a_4 + 15a_5 \\ a_2 = -3a_3 - 6a_4 - 10a_5 \end{cases}$$

Poiché la matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, otteniamo che $\dim_{\mathbb{R}} V = 6 - 3 = 3$. Una base di V è

$$\mathscr{A} = (1 - 3x + 3x^2 - x^3, 3 - 8x + 6x^2 - x^4, 6 - 15x + 10x^2 - x^5).$$

3) Sia $f \in V \cap W_k$; si ha che $f = (a + bx + cx^2)(k - x - x^2 + x^3)$ e $f(A) = 0$. Quindi

$$\begin{aligned}&(aI + bA + cA^2)(kI - A - A^2 + A^3) = 0 \Rightarrow \\ &kaI + (-a + kb)A + (kc - b - a)A^2 + (a - b - c)A^3 + (b - c)A^4 + cA^5 = 0\end{aligned}$$

da cui ricaviamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ka - a + kb + kc - b - a + a - b - c + b - c + c = 0 \\ -a + kb + 2(kc - b - a) + 3(a - b - c) + 4(b - c) + 5c = 0 \\ kc - b - a + 3(a - b - c) + 6(b - c) + 10c = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (k-1)a + (k-1)b + (k-1)c = 0 \\ (k-1)b + 2(k-1)c = 0 \\ 2a + 2b + (k+1)c = 0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema è

$$N = \begin{pmatrix} k-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 2(k-1) \\ 2 & 2 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Studiamo il rango di N.

Per $k = 1$ si ha che

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi $\operatorname{rk} N = 1$ e $\dim_{\mathbb{R}} V \cap W_k = 3 - 1 = 2$. Una base di $V \cap W_k$ si ricava dall'equazione $a + b + c = 0$ ed è

$$\mathscr{B} = ((x - 1)(x^3 - x^2 - x + 1), (x^2 - 1)(x^3 - x^2 - x + 1)).$$

Per $k \neq 1$, per calcolarne il rango, possiamo dividere le prime due righe di N per $k - 1$, ottenendo così la matrice

$$N' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & k+1 \end{pmatrix};$$

$\det N' = k - 1 \neq 0$, da cui segue che $\operatorname{rk} N = \operatorname{rk} N' = 3$; ciò implica che $\dim_{\mathbb{R}} V \cap W_k = 3 - 3 = 0$, ovvero $V \cap W_k = \{0\}$.

4) Si ha che

$$A + A^{-2} = A + M_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di φ è quindi $P(x) = (2 - x)^3$; pertanto vi è un solo autovalore $\lambda = 2$ con $m_2 = 3$. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica:

$$g_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Per calcolare una base di V_2 basta determinare una soluzione non nulla del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} ;$$

pertanto una soluzione non nulla è $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ e quindi $V_2 = \mathscr{L}((x-1)^3)$.

II

1) La parabola giace sul piano π individuato dalla direttrice r e da F.

Fascio di piani per $r : \lambda(x + y + 1) + \mu(x + z + 2) = 0$; imponendo il passaggio per F otteniamo $4\lambda + 4\mu = 0$; una soluzione è $\lambda = 1$, $\mu = -1$, da cui si ricava l'equazione di π.

$$\pi : \;\; y - z - 1 = 0.$$

La parabola p è il luogo dei punti P del piano π equidistanti da F e da r. Sia $P \in \pi$; si ha che P ha coordinate $(x, y, y - 1)$. Calcoliamo la distanza di P da r.

Piano σ per P ortogonale a $r : (X - x) - (Y - y) - (Z - y + 1) = 0$ (usiamo coordinate X, Y, Z per non generare confusione con le coordinate di P). Cioè $\sigma : X - Y - Z - x + 2y - 1 = 0$.

$$\sigma \cap r \begin{cases} X - Y - Z - x + 2y - 1 = 0 \\ X + Y + 1 = 0 \\ X + Z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma \cap r \begin{cases} 3X = x - 2y - 2 \\ 3Y = -x + 2y - 1 \\ 3Z = -x + 2y - 4 \end{cases} .$$

Quindi $d(P, r)^2 = d(P, \sigma \cap r)^2 =$

$$\left(x - \frac{x - 2y - 2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{-x + 2y - 1}{3}\right)^2 + \left(y - 1 - \frac{-x + 2y - 4}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{9}(x + y + 1)^2 + \frac{1}{9}(x + y + 1)^2 + \frac{1}{9}(x + y + 1)^2 = \frac{2}{3}(x + y + 1)^2.$$

Si ha che $d(P, F)^2 = d(P, r)^2 \iff$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (y - 1 - 1)^2 = \frac{2}{3}(x + y + 1)^2 \iff$$

$$3(x - 1)^2 + 6(y - 2)^2 = 2(x + y + 1)^2 \iff x^2 - 4xy + 4y^2 - 10x - 28y + 25 = 0.$$

In definitiva la parabola ha equazioni

$$p : \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 - 10x - 28y + 25 = 0 \end{cases} .$$

2) L'asse di simmetria di p è la retta passante per il fuoco, ortogonale a r.

Il piano per F ortogonale a r ha equazione $x - y - z + 2 = 0$, da cui ricaviamo che l'asse di simmetria è la retta di equazioni

$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Il vertice si ottiene intersecando p con il suo asse di simmetria.

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x-y-z+2=0 \\ x^2-4xy+4y^2-10x-28y+25=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z-1=0 \\ x-2y+3=0 \\ (x-2y)^2-10x-28y+25=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=-1 \\ 3y=4 \\ 3z=1 \end{cases},$$

da cui segue che il vertice ha coordinate $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3) Troviamo il cono di vertice A, contenente p. Sia $P \in p$ un punto generico. Si ha che $P(a, b, b-1)$, tali che $a^2-4ab+4b^2-10a-28b+25=0$. Il cono è il luogo descritto dalla retta AP, al variare di P.

Dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ricaviamo che

$$AP \begin{cases} bx-ay=0 \\ (b-2)y-bz+b=0 \end{cases} \Rightarrow AP \begin{cases} (y-z+1)a-2x=0 \\ (y-z+1)b-2y=0 \end{cases}.$$

Ricordando la relazione che lega i parametri a e b otteniamo l'equazione del cono

$$(2x)^2-4(2x)(2y)+4(2y)^2-10(2x)(y-z+1)-28(2y)(y-z+1)+25(y-z+1)^2=0.$$

La proiezione γ si ottiene secando il cono con il piano $z=0$; quindi

$$\gamma \begin{cases} z=0 \\ (2x)^2-4(2x)(2y)+4(2y)^2-10(2x)(y+1)-28(2y)(y+1)+25(y+1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\gamma \begin{cases} z=0 \\ 4x^2-16xy+16y^2-20x(y+1)-56y(y+1)+25(y+1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\gamma \begin{cases} z=0 \\ 4x^2-36xy-15y^2-20x-6y+25=0 \end{cases}.$$

Si riconosce subito che γ è una iperbole.

4) Due punti $P_1(x_1, y_1, 0)$ e $P_2(x_2, y_2, 0)$ sono simmetrici rispetto a $B(0, 1, 0)$ se e solo se le loro coordinate soddisfano il sistema (formula del punto medio)

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ y_1+y_2=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=-x_2 \\ y_1=2-y_2 \end{cases}.$$

Quindi la conica simmetrica rispetto a B ha equazioni

$$\gamma' \begin{cases} z=0 \\ 4(-x)^2-36(-x)(2-y)-15(2-y)^2-20(-x)-6(2-y)+25=0 \end{cases} \iff$$

$$\gamma' \begin{cases} z=0 \\ 4x^2-36xy-15y^2+92x+66y-47=0 \end{cases}.$$