SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria**
assegnata il 23 Giugno 2009

I

1) Poiché v_1, v_2 e v_3 sono autovettori, esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f(v_1) = av_1 \\ f(v_2) = bv_2 \\ f(v_3) = cv_3 \end{cases}.$$

Inoltre, essendo $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base di $\mathbb{R}^3$, v_4 è esprimibile, in modo unico, come combinazione lineare dei vettori in $\mathscr{B}$. Più precisamente si ha che $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Quindi, per la linearità di f, avremo che

$$(3,5,3) = f(v_4) = f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) \Rightarrow (3,5,3) = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3,5,3) = (a + 2b - 2c, a + c, a + b - c),$$

da cui ricaviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} a + 2b - 2c = 3 \\ a + c = 5 \\ a + b - c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Sostituendo otteniamo che

$$\begin{cases} f(v_1) = 3v_1 \\ f(v_2) = 2v_2 \\ f(v_3) = 2v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 3e_1 + 3e_2 + 3e_3 \\ 2f(e_1) + f(e_3) = 4e_1 + 2e_3 \\ -2f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = -4e_1 + 2e_2 - 2e_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = e_1 - e_2 - e_3 \\ f(e_2) = 2e_2 \\ f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 4e_3 \end{cases}.$$

Quindi si ha che

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Essendo $\mathscr{B}$ una base di autovettori, l'endomorfismo f è semplice, quindi M è diagonalizzabile. La matrice che diagonalizza M è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base di autovettori. Poiché si ha

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = 2e_1 + e_3 \\ v_3 = -2e_1 + e_2 - e_3 \end{cases},$$

tale matrice di passaggio è
$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},$$
da cui segue che
$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$
Pertanto si avrà che
$$P^{-1}MP=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

3) Si ha che
$$\begin{cases} g\circ f(v_1)=0\\ g\circ f(v_2)=0\\ g\circ f(v_3)=hv_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(3v_1)=0\\ g(2v_2)=0\\ g(2v_3)=hv_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(v_1)=0\\ g(v_2)=0\\ g(v_3)=kv_2\end{cases},$$
dove $k=\frac{h}{2}\in\mathbb{R}$, $k\neq 0$. Quindi
$$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

4) Osserviamo che $\operatorname{Im} g=\mathscr{L}(v_2)\subset W$. Quindi
$$g^{-1}(W):=\{v\in\mathbb{R}^3 \mid g(v)\in W\}=\mathbb{R}^3.$$

II

1) La circonferenza γ giace sul piano α individuato dai punti A, B e C. Tale piano ha quindi equazione
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \iff \begin{vmatrix} x & y & z\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0 \iff x+y-z=0.$$
Il centro $G(a,b,c)$ della circonferenza è quel punto del piano α equidistante da A, B e C. Le sue coordinate quindi soddisfano il sistema di equazioni
$$\begin{cases} a+b-c=0\\ a^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b+2)^2+(c+1)^2\\ a^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c+1)^2\end{cases} \iff \begin{cases} a+b-c=0\\ -2a+4b+2c+6=0\\ 2a+2c+2=0\end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} a+b-c=0\\ a-2b-c-3=0\\ a+c+1=0\end{cases} \iff \begin{cases} a=0\\ b=-1\\ c=-1\end{cases}.$$

Adesso possiamo calcolare il raggio r di γ. Si ha che

$$r^2 = d(A,G)^2 = 0 + 1 + 1 = 2.$$

Quindi la lunghezza λ di γ è

$$\lambda = 2\pi r = 2\sqrt{2}\pi.$$

2) Possiamo subito scrivere un sistema di equazioni di γ :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ x^2+y^2+z^2+2y+2z=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ x^2+y^2+(x+y)^2+2y+2(x+y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ x^2+y^2+xy+x+2y=0 \end{cases}.$$

La generica quadrica contenente γ ha equazione

$$x^2+y^2+xy+x+2y+(ax+by+cz+d)(x+y-z)=0 \iff$$

$$\iff (a+1)x^2+(a+b+1)xy+(b+1)y^2+(c-a)xz+(c-b)yz-cz^2+(d+1)x+(d+2)y-dz=0.$$

Affinché tale quadrica sia un cono di vertice V si deve avere

$$\begin{pmatrix} 2a+2 & a+b+1 & c-a & d+1 \\ a+b+1 & 2b+2 & c-b & d+2 \\ c-a & c-b & -2c & -d \\ d+1 & d+2 & -d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2a+d+3=0 \\ a+b+d+3=0 \\ a-c+d=0 \\ d+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=-2 \\ d=-1 \end{cases}.$$

Sostituendo ricaviamo l'equazione del cono richiesto:

$$xy+xz+yz-2z^2-y-z=0.$$

3) Sia S la sfera richiesta. Il centro H di S sta sulla retta passante per G e ortogonale ad α. Tale retta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=h \\ y=h-1 \\ z=-h-1 \end{cases}.$$

Imponendo che H appartenga al piano di equazione $x+y+z-1=0$, otteniamo la condizione

$$h+h-1-h-1-1=0 \iff h=3.$$

Quindi le coordinate di H sono $(3,2,-4)$. Detto r_S il raggio di S si ha che

$$r_S^2 = d(A,H)^2 = 9+4+16=29.$$

Conseguentemente la sfera S ha equazione

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29 \iff x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z=0.$$

4) Indichiamo con δ la conica di equazioni $z = y^2 + x + 2y = 0$. La generica quadrica che la contiene ha equazione

$$Q:\ y^2 + x + 2y + (ax + by + cz + d)z = 0.$$

Secando Q con il piano α otteniamo la conica

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y^2 + x + 2y + [ax + by + c(x + y) + d](x + y) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ (a + c)x^2 + (a + b + 2c)xy + (b + c + 1)y^2 + (d + 1)x + (d + 2)y = 0 \end{cases}.$$

Affinché tale conica coincida con γ deve esistere un $h \in \mathbb{R}$ tale che

$$(a + c)x^2 + (a + b + 2c)xy + (b + c + 1)y^2 + (d + 1)x + (d + 2)y = h(x^2 + y^2 + xy + x + 2y)$$

identicamente, da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} a + c = h \\ a + b + 2c = h \\ b + c + 1 = h \\ d + 1 = h \\ d + 2 = 2h \end{cases} \iff \begin{cases} b = a - 1 \\ c = 1 - a \\ d = 0 \\ h = 1 \end{cases}.$$

Pertanto la generica quadrica contenente entrambe le coniche ha equazione

$$y^2 + x + 2y + [ax + (a - 1)y + (1 - a)z]z = 0 \iff y^2 + axz + (a - 1)yz + (1 - a)z^2 + x + 2y = 0.$$

La matrice associata a tale quadrica è

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 2 & a - 1 & 2 \\ a & a - 1 & 2 - 2a & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La quadrica è un paraboloide se e solo se $\det B \neq 0$ e $\det A = 0$. D'altra parte

$$\det A = 0 \iff a = 0.$$

Per $a = 0$ si ha che

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si vede subito che $\det B \neq 0$. In definitiva esiste un solo paraboloide, necessariamente ellittico, contenente entrambe le coniche, di equazione

$$y^2 - yz + z^2 + x + 2y = 0.$$