SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria**
assegnata il 26 Febbraio 2008

I

1) Sia
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$
Si ha che
$$EX = \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} \quad \textbf{ed} \quad EXF = \begin{pmatrix} x_{32} & x_{33} & 0 \\ x_{22} & x_{23} & 0 \\ x_{12} & x_{13} & 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi
$${}^t(EX) = EX \iff \begin{cases} x_{32} = x_{21} \\ x_{33} = x_{11} \\ x_{23} = x_{12} \end{cases};$$
$$\mathrm{tr}(EX) = 0 \iff x_{31} + x_{22} + x_{13} = 0;$$
$$\mathrm{tr}(EXF) = 0 \iff x_{32} + x_{23} = 0.$$
Pertanto la generica matrice in V è del tipo
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & x_{22} & x_{12} \\ -x_{22} - x_{13} & -x_{12} & x_{11} \end{pmatrix}.$$
Poiché essa dipende dai quattro parametri liberi $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$. Una base di V è $\mathscr{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, dove
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Si ha che
$$\begin{array}{l} f(X_1) = h + x^2 \\ f(X_2) = 1 + (1-h)x - x^2 \\ f(X_3) = 1 - hx^2 \\ f(X_4) = x - hx^2 \end{array}.$$
Scegliendo, come base in $\mathbb{R}[x]_2$, $\mathscr{E} = (1, x, x^2)$, otteniamo che la matrice M, associata ad f rispetto alle basi $\mathscr{B}$ ed $\mathscr{E}$, è
$$M := M^{\mathscr{B},\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-h & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -h & -h \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango di M consideriamo il minore ottenuto eliminando la seconda colonna.

$$\begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -h & -h \end{vmatrix} = 1 + h^2 \neq 0,\ \forall h \in \mathbb{R},$$

ne segue che $\operatorname{rank} M = 3$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Quindi $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 3$ e $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = 1$. L'applicazione f è quindi suriettiva e, conseguentemente, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]_2$. Calcoliamo adesso il nucleo di f. Sia $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4X_4 \in V$.

$$X \in \operatorname{Ker} f \iff f(X) = 0 \iff \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-h & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0;$$

una soluzione non nulla del sistema si può ottenere prendendo i minori di M di ordine tre a segno alterno:

$$\begin{cases} x_1 = (h-1)^2 \\ x_2 = h^2 + 1 \\ x_3 = -h^3 + h^2 - h - 1 = -(h-1)(h^2+1) - 2 \\ x_4 = (h-1)(h^2+1) \end{cases}.$$

Quindi $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(K)$, dove

$$K = \begin{pmatrix} (h-1)^2 & h^2+1 & -(h-1)(h^2+1) - 2 \\ -(h^2+1) & (h-1)(h^2+1) & h^2+1 \\ 2 & -(h^2+1) & (h-1)^2 \end{pmatrix}.$$

3) Osserviamo che

$$a + bx + cx^2 \in \mathscr{L}(1+x^2, x+x^2) \iff \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff a + b - c = 0.$$

Inoltre

$$X = \sum_{i=1}^{4} y_iX_i \in W := f^{-1}\left(\mathscr{L}(1+x^2, x+x^2)\right) \iff \sum_{i=1}^{4} y_i f(X_i) \in \mathscr{L}(1+x^2, x+x^2) \iff$$

$$\iff y_1(1+x^2) + y_2(1-x^2) + y_3(1-x^2) + y_4(x-x^2) \in \mathscr{L}(1+x^2, x+x^2) \iff$$

$$\iff y_1 + y_2 + y_3 + y_4x + (y_1 - y_2 - y_3 - y_4)x^2 \in \mathscr{L}(1+x^2, x+x^2) \iff$$

$$\iff (y_1 + y_2 + y_3) + y_4 - (y_1 - y_2 - y_3 - y_4) = 0 \iff y_2 + y_3 + y_4 = 0 \iff y_4 = -y_2 - y_3.$$

Si ha quindi che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$ ed una base di W è $\big(X_1, X_2 - X_4, X_3 - X_4\big)$.

4) Si ha che

$$\begin{array}{l} g(X_1) = {}^tX_1 = X_1 \\ g(X_2) = {}^tX_2 = -X_2 \\ g(X_3) = {}^tX_3 = -X_3 \\ g(X_4) = {}^tX_4 = -X_3 + X_4 \end{array},$$

inoltre g è lineare, quindi g definisce un endomorfismo di V la cui matrice associata rispetto alla base $\mathscr{B}$ è

$$N := M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(x) = \det(N - xI) = (1-x)^2(-1-x)^2 = (x-1)^2(x+1)^2.$$

Calcoliamo le radici di $P(x)$:

$$P(x) = 0 \iff x = 1, \ \text{ oppure } \ x = -1; \ m_1 = 2, \ m_{-1} = 2.$$

Calcoliamo le molteplicità geometriche

$$g_1 = 4 - \operatorname{rank}(N - I) = 2, \ g_{-1} = 4 - \operatorname{rank}(N + I) = 2,$$

quindi g è semplice.

II

1) Per trovare le circonferenze, basta intersecare la generica conica in Γ con il cerchio assoluto.

$$\begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^2 - hy^2 = 0 \\ (h+7)y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ hy^2 + y^2 + (h+7)^2y^2 = 0 \\ x^2 = hy^2 \\ z = -(h+7)y \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ (h^2 + 15h + 50)y^2 = 0 \\ x^2 = hy^2 \\ z = -(h+7)y \end{cases}.$$

Se $y = 0$ allora $x = z = 0$, quindi non otteniamo soluzioni accettabili. Conseguentemente deve essere

$$h^2 + 15h + 50 = 0 \iff h = -5 \ \text{ oppure } \ h = -10.$$

Otteniamo pertanto le coniche

$$\gamma_1 \begin{cases} x^2 + 5y^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2 \begin{cases} x^2 + 10y^2 - 2x - 1 = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}.$$

Tali coniche sono sezioni dei cilindri di equazioni $x^2+5y^2-2x-1 = 0$ e $x^2+10y^2-2x-1 = 0$, entrambi di vertice $(0, 0, 1, 0)$, ed i piani secanti non passano per tale vertice, ne segue che γ_1 e γ_2 sono entrambe irriducibili e quindi circonferenze.

2) Osserviamo che $\gamma = \gamma_1$. La generica quadrica contenente γ è

$$x^2 + 5y^2 - 2x - 1 + (ax + by + cz + d)(2y + z) = 0 \iff$$

$$\iff x^2 + (2b+5)y^2 + cz^2 + 2axy + axz + (b+2c)yz - 2x + 2dy + dz - 1 = 0.$$

Affinché essa sia una sfera occorre che

$$\begin{cases} 2b+5=1 \\ c=1 \\ a=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases},$$

quindi la generica sfera contenente γ è

$$x^2+y^2+z^2-2x+2dy+dz-1=0.$$

Imponendo il passaggio per $P(1,0,1)$ otteniamo l'equazione della sfera S

$$1+1-2+d-1=0 \iff d=1 \Rightarrow S:\ x^2+y^2+z^2-2x+2y+z-1=0$$

3) Il piano p, tangente a S in P, ha equazione

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2y+3z-3=0.$$

4) La direzione ortogonale a p è data dal punto improprio $V(0,2,3,0)$. Scriviamo l'equazione del cilindro di vertice V, contenente γ. Consideriamo nuovamente la generica quadrica contenente γ

$$x^2+(2b+5)y^2+cz^2+2axy+axz+(b+2c)yz-2x+2dy+dz-1=0,$$

ed imponiamo che essa abbia vertice in V

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a}{2} & -1 \\ a & 2b+5 & \frac{b+2c}{2} & d \\ \frac{a}{2} & \frac{b+2c}{2} & c & \frac{d}{2} \\ -1 & d & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{100}{49} \\ c=\frac{20}{49} \\ d=0 \end{cases}.$$

Il cilindro cercato ha quindi equazione

$$Q:\ x^2+\frac{45}{49}y^2+\frac{20}{49}z^2-\frac{60}{49}yz-2x-1=0.$$

La proiezione γ' richiesta si ottiene intersecando Q con il piano di equazione $z=0$

$$\gamma' \begin{cases} 49x^2+45y^2-98x-49=0 \\ z=0 \end{cases}.$$