SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria**
assegnata il 20 Giugno 2006

I

1) Per calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2h+1 & 0 & h+1 & h+3 \\ 3 & h-1 & 2 & 4 \\ 1 & -h-1 & 0 & -2 \\ 0 & 2h+1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

calcoliamo la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne C_1, C_2, C_3, C_4. Si vede subito che le colonne C_1 e C_3 sono linearmente indipendenti. Vediamo quindi se $C_2 \in \mathscr{L}(C_1, C_3)$, cioè se il sistema $xC_1+yC_3 = C_2$ ammette soluzioni. Scrivendo esplicitamente tale sistema otteniamo

$$\begin{cases} (2h+1)x + (h+1)y = 0 \\ 3x + 2y = h-1 \\ x = -h-1 \\ y = 2h+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -h-1 \\ y = 2h+1 \end{cases};$$

quindi C_2 è combinazione lineare di C_1 e C_3. Adesso vediamo se $C_4 \in \mathscr{L}(C_1, C_3)$, cioè se il sistema $xC_1 + yC_3 = C_4$ ammette soluzioni. Scrivendo esplicitamente tale sistema otteniamo

$$\begin{cases} (2h+1)x + (h+1)y = h+3 \\ 3x + 2y = 4 \\ x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases};$$

quindi C_4 è combinazione lineare di C_1 e C_3. Conseguentemente

$$\dim \mathscr{L}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \dim \mathscr{L}(C_1, C_3) = 2 \Rightarrow \operatorname{rank} A = 2 \ \ \forall h \in \mathbb{R},$$

ed inoltre $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\big((2h+1, 3, 1, 0), (h+1, 2, 0, 1)\big)$. Equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ si ottengono dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 2h+1 & 3 & 1 & 0 \\ h+1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

annullando i due minori di ordine tre contenenti (ad esempio) il minore di ordine due individuato dalle righe $2, 3$ e dalle colonne $3, 4$. Quindi tali equazioni sono

$$\begin{vmatrix} x & z & w \\ 2h+1 & 1 & 0 \\ h+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} y & z & w \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - (2h+1)z - (h+1)w = 0 \\ y - 3z - 2w = 0 \end{cases}.$$

Le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} f$ sono invece date dal sistema

$$\begin{pmatrix} 2h+1 & 0 & h+1 & h+3 \\ 3 & h-1 & 2 & 4 \\ 1 & -h-1 & 0 & -2 \\ 0 & 2h+1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x-(h+1)y-2w=0 \\ (2h+1)y+z+5w=0 \end{cases}.$$

2) Le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} g$ sono date dal sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x+y-w=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$

dato che la matrice del sistema ha rango 2; poichè $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} g$ basta imporre che i generatori di $\operatorname{Im} f$ soddisfino tali equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 2h+1+3=0 \\ 2(2h+1)+3+3=0 \\ h+1+2-1=0 \\ 2(h+1)+2=0 \end{cases} \iff h=-2.$$

3) Calcoliamo una base di $\operatorname{Ker} f$

$$\operatorname{Ker} f \begin{cases} x=(h+1)y+2w \\ z=-(2h+1)y-5w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=(2,0,-5,1) \\ v_2=(h+1,1,-2h-1,0) \end{cases}.$$

Una base di $\operatorname{Im} g$ è $w_1=(0,1,1,-1), w_2=(1,0,0,3)$ (questi ultimi sono vettori multipli delle due ultime colonne della matrice che definisce g). Allora

$$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g = \mathscr{L}(w_1,w_2,v_1,v_2),$$

e, applicando il metodo degli scarti successivi, otteniamo una base di $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$. Si vede subito che $v_1 \notin \mathscr{L}(w_1,w_2)$; resta quindi solo da vedere per quali valori di h $v_2 \in \mathscr{L}(w_1,w_2,v_1)$, cioè per quali valori di h si annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ h+1 & 1 & -2h-1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff h=0.$$

Quindi per $h\neq 0$ una base di $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} g$ è (w_1,w_2,v_1,v_2); per $h=0$ una base di $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} g$ è (w_1,w_2,v_1); ne deduciamo che la somma $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} g$ è diretta per $h\neq 0$.

4) Per calcolare il polinomio caratteristico di f costruiamo la matrice associata ad f rispetto ad una base di $\mathbb{R}^4$ che estende una base di $\operatorname{Ker} f$. Una tale base è, ad esempio, $\mathscr{B}=\big(v_1,v_2,e_3,e_4\big)$; si ha che

$$\begin{aligned} &f(v_1)=0 \\ &f(v_2)=0 \\ &f(e_3)=(h+1,2,0,1)= && 2v_1-\frac{h+1}{2}v_2+\frac{3h-1}{2}e_3+\frac{h+3}{2}e_4 \\ &f(e_4)=(h+3,4,-2,5)= && 4v_1-\frac{3h+1}{2}v_2+\frac{h-1}{2}e_3+\frac{3h+11}{2}e_4 \end{aligned},$$

da cui segue che la matrice associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\dfrac{h+1}{2} & -\dfrac{3h+1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{3h-1}{2} & \dfrac{h-1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{h+3}{2} & \dfrac{3h+11}{2} \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è quindi

$$P(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -x & -\dfrac{h+1}{2} & -\dfrac{3h+1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{3h-1}{2} - x & \dfrac{h-1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{h+3}{2} & \dfrac{3h+11}{2} - x \end{vmatrix} = x^4 - (3h+5)x^3 + (2h^2 + 7h - 2)x^2.$$

L'unica radice di $P(x)$ che può avere molteplicità superiore a 2 è $x = 0$; ciò accade se e solo se $2h^2 + 7h - 2 = 0$, ovvero se e solo se $4h = -7 \pm \sqrt{65}$. Ovviamente per tali valori di h l'endomorfismo f non può essere semplice in quanto

$$g_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2 < 3 \leq m_0.$$

II

1) Calcoliamo l'equazione del piano p_i contenente la retta r_i ed il punto F, $i = 1, 2$. Il fascio di piani contenenti r_1 è $\lambda(x + y + 1) + \mu(x - z + 1) = 0$; imponendo il passaggio per F otteniamo

$$2\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \mu = -1 \Rightarrow p_1 : \ y + z = 0$$

Il fascio di piani contenenti r_2 è $\lambda(y - 2z - 1) + \mu(x + z + 2) = 0$; imponendo il passaggio per F otteniamo

$$2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \mu = 2 \Rightarrow p_2 : \ 2x - y + 4z + 5 = 0;$$

equazioni della retta s sono quindi

$$s \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{cases}.$$

2) L'ellisse γ giace sul piano individuato dalla direttrice e dal fuoco, quindi sul piano p_1; inoltre γ è il luogo dei punti P del piano p_1 tali che

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r_1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \iff 3d(P, F)^2 = 2d(P, r_1)^2.$$

Per calcolare la distanza di P da r_1 calcoliamo l'equazione del piano contenente r_1 e perpendicolare a p_1. Il fascio di piani per r_1 è $(\lambda+\mu)x+\lambda y-\mu z+\lambda+\mu=0$; imponendo la condizione di ortogonalità con p_1 otteniamo

$$(\lambda+\mu,\lambda,-\mu)\cdot(0,1,1)=0 \iff \lambda-\mu=0 \Rightarrow \lambda=1,\mu=1$$

ovvero otteniamo il piano $\pi: \ 2x+y-z+2=0$; conseguentemente per $P\in p_1$, $d(P,r_1)=d(P,\pi)$. Equazioni di γ sono quindi

$$\begin{cases} y+z=0 \\ 3[x^2+(y-1)^2+(z+1)^2]=2\dfrac{(2x+y-z+2)^2}{6} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ 9[x^2+(y-1)^2+(z+1)^2]=(2x+y-z+2)^2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ 9x^2+9(y-1)^2+9(-y+1)^2=(2x+2y+2)^2 \end{cases} \iff$$

$$\gamma\begin{cases} y+z=0 \\ 5x^2-8xy+14y^2-8x-44y+14=0 \end{cases}$$

3) Sia $P_0(x_0,y_0,-y_0)\in\gamma$; la retta P_0V ha equazioni

$$P_0V: \ \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{-y_0-1} \Rightarrow \begin{cases} (1-y-z)y_0=y \\ (1-y-z)x_0=x \end{cases};$$

poiché $P_0\in\gamma$ si ha che $5x_0^2-8x_0y_0+14y_0^2-8x_0+44y_0+14=0$; sostituendo x_0 e y_0 otteniamo

$$5x^2-8xy+14y^2-8x(1-y-z)-44y(1-y-z)+14(1-y-z)^2=0\Rightarrow$$

$$5x^2+72y^2+8xz+72yz+14z^2-8x-72y-28z+14=0$$

che è l'equazione del cono richiesto.

4) Per studiare la conica proiezione, basta studiare la sezione del precedente cono con il piano p di equazione $x-kz=0$. Tale conica è spezzata se e solo se p passa per il vertice V, ovvero se e solo se $k=0$. Per $k\neq 0$ tale conica è irriducibile. Per classificarla è sufficiente andare a calcolare i suoi punti impropri, che si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} t=0 \\ x-kz=0 \\ 5x^2+72y^2+8xz+72yz+14z^2-8xt-72yt-28zt+14t^2=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} t=0 \\ x-kz=0 \\ 5x^2+72y^2+8xz+72yz+14z^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t=0 \\ x-kz=0 \\ 72y^2+72yz+(5k^2+8k+14)z^2=0 \end{cases}.$$

Studiamo il $\Delta/4$ dell'ultima equazione.

$\Delta/4=-360k^2-576k+288=-72(5k^2+8k-4)=-72(5k-2)(k+2)$.

Quindi

$\Delta=0 \iff k\in\{-2,\frac{5}{2}\}\Rightarrow$ la proiezione è una parabola.

$\Delta>0 \iff -2<k<\frac{5}{2}\Rightarrow$ la proiezione è una iperbole (se $k\neq 0$).

$\Delta<0 \iff k\in]-\infty,-2[\cup]\frac{5}{2},+\infty[\Rightarrow$ la proiezione è una ellisse.