SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 5 Settembre 2005

I

1) Verifichiamo che U è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Siano $Y_1, Y_2 \in U$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dobbiamo provare che $a_1Y_1 + a_2Y_2 \in U$.

$$Y_i \in U \Rightarrow Y_i = AX_i \Rightarrow a_1Y_1 + a_2Y_2 = a_1AX_1 + a_2AX_2 = A(a_1X_1 + a_2X_2) \in U.$$

Per calcolare una base, osserviamo che U è generato dalle 9 matrici AE_{ij} dove E_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$, sono le matrici che costituiscono la base canonica di $\mathbb{R}^{3,3}$.

$$AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$AE_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$AE_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

analogamente

$$AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \; AE_{32} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$AE_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; AE_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; AE_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che AE_{1j}, AE_{2j} sono linearmente indipendenti, mentre $AE_{3j} = -2AE_{1j} + AE_{2j}$. Di conseguenza

$$U = \mathscr{L}\big(AE_{11}, AE_{21}, AE_{12}, AE_{22}, AE_{13}, AE_{23}\big).$$

Poiché tali matrici sono linearmente indipendenti, segue che quest'ultima è una base e $\dim U = 6$.

2) La generica matrice di U è del tipo

$$aAE_{11} + bAE_{21} + cAE_{12} + dAE_{22} + eAE_{13} + fAE_{23} = \begin{pmatrix} a+b & c+d & e+f \\ b & d & f \\ a+3b & c+3d & e+3f \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è triangolare superiore se e solo se

$$\begin{cases} b=0 \\ a+3b=0 \\ c+3d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=-3d \end{cases}.$$

La generica matrice di V è quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & -2d & e+f \\ 0 & d & f \\ 0 & 0 & e+3f \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim V = 3$.

3) Una base di V è data dalle matrici

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$f(Y_1) = Y_1B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y_1 - 3Y_2 + Y_3;$$

$$f(Y_2) = Y_2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} = hY_2;$$

$$f(Y_3) = Y_3B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 3h \end{pmatrix} = hY_3.$$

Quindi la matrice associata ad f rispetto alla base (Y_1, Y_2, Y_3) è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & h & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det M = h^2$ si ha che, per $h \neq 0$, $\operatorname{rk} M = 3$, ovvero f è un isomorfismo, cioè $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Per $h = 0$, $\operatorname{rk} M = 1$, da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = 1$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Inoltre

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(Y_1 - 3Y_2 + Y_3) = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(Y_2, Y_3).$$

4) Per studiare la semplicità di f calcoliamo gli autovalori.

$$P(x) = \det(M - xI) = (1-x)(h-x)^2;\ P(x) = 0 \iff x = 1, h.$$

Se $h \neq 1$ abbiamo i due autovalori distinti $x = 1$, $m_1 = 1$ e $x = h$, $m_h = 2$. Poiché $g_h = \dim V_h = 3 - \operatorname{rk}(M - hI) = 3 - 1 = 2$, segue che f è semplice.

Se $h = 1$ abbiamo il solo autovalore $x = 1$ con $m_1 = 3$. In tal caso $g_1 = 3 - \operatorname{rk}(M - I) = 2 < m_1$ implica che f non è semplice.

II

1) L'iperbole appartiene al fascio di coniche bitangenti alle rette $y = 0$ e $2x - y = 0$ nei loro punti impropri. Tale fascio è
$$\lambda(2x - y)y + \mu t^2 = 0.$$
Imponendo il passaggio per A otteniamo $\lambda + \mu = 0$. Assegnando i valori $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ ricaviamo l'equazione dell'iperbole $\gamma : 2xy - y^2 - 1 = 0$.

2) L'equazione ridotta di γ è della forma $\alpha X^2 + \beta Y^2 - \delta = 0$. L'equazione canonica è quindi
$$\frac{\alpha}{\delta}X^2 + \frac{\beta}{\delta}Y^2 - 1 = 0,$$
da cui segue che
$$a^2 = \frac{\delta}{\alpha},\ \ b^2 = -\frac{\delta}{\beta},$$
quindi, per l'eccentricità e, si ha che
$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + (-\frac{\delta}{\beta}\frac{\alpha}{\delta}) = 1 - \frac{\alpha}{\beta}.$$
Calcoliamo adesso α, β e δ. La matrice associata all'iperbole è
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
da cui segue che
$$\begin{cases} \alpha\beta = -1 \\ -\alpha\beta\delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \delta = 1 \Rightarrow \alpha > 0 \ \text{ e } \ \beta < 0.$$
α e β sono gli autovalori della sottomatrice A di B.
$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},\ \beta = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$
quindi
$$e^2 = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\frac{2}{\sqrt{5} + 1} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \ \Rightarrow \ e = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

3) Calcoliamo l'equazione della retta r tangente a γ in A :
$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ x - 1 = 0.$$
Il centro della circonferenza sta sulla retta passante per A perpendicolare a r, che ha equazione $y - 1 = 0$, e sulla retta di equazione $x + y - 3 = 0$, quindi esso è il punto $C(2, 1)$. Il raggio è $d(C, A) = 1$.

La circonferenza ha quindi equazione
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0.$$

4) Il fascio generato da γ e δ ha equazione

$$x^2+y^2-4x-2y+4+h(2xy-y^2-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2hxy+(1-h)y^2-4x-2y+4-h=0.$$

Le coniche spezzate del fascio si ottengono per i valori di h che annullano il determinante della matrice associata alla generica conica del fascio:

$$\begin{vmatrix} 1 & h & -2 \\ h & 1-h & -1 \\ -2 & -1 & 4-h \end{vmatrix} = 0 \iff h^3-3h^2+3h-1=0 \iff (h-1)^3=0 \iff h=1.$$

L'unica conica spezzata del fascio ha quindi equazione

$$x^2+2xy-4x-2y+3=0 \Rightarrow 2y(x-1)+x^2-4x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y(x-1)+(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow (x-1)(x+2y-3)=0.$$

I punti base del fascio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x-1)(x+2y-3)=0 \\ 2xy-y^2-1=0 \end{cases}.$$

Le soluzioni del sistema sono i punti

$$A(1,1) \text{ e } B\left(\frac{13}{5},\frac{1}{5}\right).$$

5) Per classificare le coniche irriducibili calcoliamo il determinante della sottomatrice A.

$$\det A = -h^2-h+1.$$

Quindi si hanno

$$\begin{array}{llll} \text{ellissi} & \iff & \det A>0,\ \det B\neq 0 & \iff & -\frac{\sqrt{5}+1}{2}<h<\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ \text{parabole} & \iff & \det A=0,\ \det B\neq 0 & \iff & h=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ \text{iperboli} & \iff & \det A<0,\ \det B\neq 0 & \iff & h<-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ h>\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ h\neq 1. \end{array}$$