

SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra Lineare** assegnata il 22 Novembre 2004

I-A

- 1) Prima di tutto calcoliamo il rango della matrice A , al variare di h . Riduciamo A per colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h-1 & 2 & h & 3 \\ 1 & h+2 & 1 & 4h \\ h-2 & 4-h & h+1 & 4h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \mapsto C_1 - C_3} \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ -1 & 2 & h & 3 \\ 0 & h+2 & 1 & 4h \\ -3 & 4-h & h+1 & 4h+1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} C_2 \mapsto C_2 - hC_1 \\ C_4 \mapsto C_4 - C_1 \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & h+2 & h & 4 \\ 0 & h+2 & 1 & 4h \\ -3 & 2(h+2) & h+1 & 4(h+1) \end{pmatrix};$$

se $h \neq -2$ possiamo dividere la C_2 per $h+2$ e la C_4 per 4 e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ -3 & 2 & h+1 & h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} C_3 \mapsto -C_3 + hC_2 \\ C_4 \mapsto C_4 - C_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & h-1 \\ -3 & 2 & h-1 & h-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{C_4 \mapsto C_4 - C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 0 \\ -3 & 2 & h-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi per $h = 1$, $\text{rk } A = 2$; per $h \neq 1$ e $h \neq -2$, $\text{rk } A = 3$.

Per $h = -2$, sostituendo otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

da cui si vede subito che, anche per $h = -2$, $\text{rk } A = 3$.

Per $h = 1$, $\text{Im } f = \mathcal{L}((1, -1, 0, -3), (0, 1, 1, 2))$, cioè

$$\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0, x - 2y + t = 0\}.$$

Per $h \neq 1$ e $h \neq -2$, $\text{Im } f = \mathcal{L}((1, -1, 0, -3), (0, 1, 1, 2), (0, 0, 1, 1))$.

Per $h = -2$, $\text{Im } f = \mathcal{L}((1, -1, 0, -3), (0, -2, 1, -1), (0, 1, -2, -1))$.

Osserviamo che nel caso $h \neq 1$, $\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z + t = 0\}$.

Per $h \neq 1$, $\text{Ker } f$ è definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h-1 & 2 & h & 3 \\ 1 & h+2 & 1 & 4h \\ h-2 & 4-h & h+1 & 4h+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + hy + t = 0 \\ (h-1)x + 2y + hz + 3t = 0 \\ x + (h+2)y + z + 4ht = 0 \end{cases},$$

in quanto le prime tre righe della matrice sono indipendenti per ogni $h \neq 1$.

Per $h = 1$, $\text{Ker } f$ è definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + t = 0 \\ 2y + z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - t \\ z = -2y - 3t \end{cases};$$

posto quindi $v_1 = (1, -1, 2, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 3, -1)$, si ha che $\text{Ker } f = \mathcal{L}(v_1, v_2)$

- 2) Per $h = 1$ estendiamo la base (v_1, v_2) di $\text{Ker } f$ ad una base di $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{B} = (v_1, v_2, e_3, e_4)$. Si ha quindi che

$$\begin{cases} f(v_1) = 0 \\ f(v_2) = 0 \\ f(e_3) = (0, 1, 1, 2) = -v_1 + v_2 + 3e_4 \\ f(e_4) = (1, 3, 4, 5) = -3v_1 + 4v_2 - 2e_3 + 9e_4 \end{cases};$$

di conseguenza

$$M = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico di M :

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -x & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -x & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 9-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 9x + 6) = 0;$$

otteniamo quindi l'autovalore $x = 0$, $m_0 = 2$; le altre due radici si ottengono risolvendo l'equazione $x^2 - 9x + 6 = 0$; $\Delta = 81 - 24 > 0$, quindi otteniamo altre due radici reali e distinte, non nulle, entrambe di molteplicità 1. Poiché $\dim V_0 = \dim \text{Ker } f = 2 = g_0$, concludiamo che f è semplice.

- 3) Nel caso $h = 0$ la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche (di rango 3) è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\text{Im } g = \mathcal{L}((1, 0, 0, 1), (-1, 2, 0, 3), (1, 2, 1, 0))$; l'equazione cartesiana di $\text{Im } g$ è quindi

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 5z - t = 0.$$

Di conseguenza $W = \text{Im } f \cap \text{Im } g$ è definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - y - z + t = 0 \\ x + 2y - 5z - t = 0 \end{cases};$$

essendo tali equazioni indipendenti, deduciamo che $\dim W = 2$.

Nel caso $h = 1$ la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche (di rango 2) è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\text{Im } g = \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (0, 2, 1, 3))$; le equazioni cartesiane di $\text{Im } g$ sono quindi definite dalla condizione

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - 3y + 2t = 0 \end{cases}.$$

Di conseguenza $W = \text{Im } f \cap \text{Im } g$ è definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - 3y + 2t = 0 \end{cases};$$

essendo tali equazioni indipendenti, deduciamo che $\dim W = 0$, quindi $W = (0)$.

II-A

- 1) Ovviamente $\dim V = 3$. Consideriamo la base $\mathcal{B}$ di V costituita dai vettori $v_1 = (1, 0, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 2, 1)$. Si ha che

$$\begin{cases} f(v_1) = (1, 0, 2, 0) = v_1 \in V \\ f(v_2) = (2, 1, 3, 0) = 2v_1 + v_2 \in V \\ f(v_3) = (2, 2, 14, 6) = 2v_1 + 2v_2 + 6v_3 \in V \end{cases},$$

da cui deduciamo che g induce un endomorfismo f su V .

2) La matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori di f

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & 6-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-x)^2(6-x) = 0,$$

da cui notiamo subito che l'unico autovalore di molteplicità algebrica superiore a 1 è $x = 1$, con $m_1 = 2$. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica:

$$g_1 = \dim V - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 < m_1,$$

quindi f non è semplice.

3) L'autospazio V_1 è costituito dai vettori $xv_1 + yv_2 + zv_3$ soddisfacenti la condizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

perciò $V_1 = \mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}((1, 0, 2, 0))$.

L'autospazio V_6 è costituito dai vettori $xv_1 + yv_2 + zv_3$ soddisfacenti la condizione

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 2z = 0 \\ 5y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14\rho \\ y = 10\rho \\ z = 25\rho \end{cases},$$

perciò $V_6 = \mathcal{L}(14v_1 + 10v_2 + 25v_3) = \mathcal{L}((14, 10, 68, 25))$.

I-B

La soluzione è analoga a quella del caso I-A.

II-B

1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1$$

da cui segue che A è diagonalizzabile. Calcoliamo gli autovettori

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 0);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow v_2 = (1, -1).$$

Quindi si ha che

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_1 - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 \\ e_2 = v_1 - v_2 \end{cases}.$$

Di conseguenza

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

la matrice diagonalizzante è quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}.$$

2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

sia

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

la matrice generica di $\mathbb{R}^{2,2}$; dobbiamo imporre che

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ z(x+t) & yz + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 4 \\ y(x+t) = 3 \\ z(x+t) = 0 \\ yz + t^2 = 1 \end{cases}.$$

Dalla terza equazione deduciamo che $z = 0$ oppure $x+t = 0$; ma $x+t = 0$ è incompatibile con la seconda equazione, quindi necessariamente $z = 0$; ciò implica che

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ y(x+t) = 3 \\ z = 0 \\ t^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y(x+t) = 3 \\ z = 0 \\ t = \pm 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che

$$S = \{A, -A, B, -B\} \text{ dove } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Ovviamente $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(A, B)$. Dal fatto che A e B sono linearmente indipendenti segue che $\dim \mathcal{L}(S) = 2$.

4)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

A^2 e A^3 sono linearmente indipendenti, quindi è sufficiente verificare che $A^2, A^3 \in \mathcal{L}(S)$. Per fare ciò è sufficiente verificare che esse sono esprimibili come combinazione lineare

di A e B . Quindi cerchiamo x e y in modo tale che $A^2 = xA + yB$, da cui ricaviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A^2 = \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}B.$$

Analogamente si vede che $A^3 = \frac{5}{2}A + \frac{3}{2}B$.

5) Si ha che

$$2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prima di tutto esprimiamo I , A e $2A^{-1}$ come combinazione lineare di A^2 e A^3 :

$$\begin{cases} I &= \frac{7}{4}A^2 - \frac{3}{4}A^3 \\ A &= \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3 \\ 2A^{-1} &= \frac{15}{4}A^2 - \frac{7}{4}A^3; \end{cases}$$

quindi

$$\begin{aligned} &\begin{cases} g(I) = A \Rightarrow g(\frac{7}{4}A^2 - \frac{3}{4}A^3) = \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3 \\ g(A) = I - 2A^{-1} \Rightarrow g(\frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3) = \frac{7}{4}A^2 - \frac{3}{4}A^3 - \frac{15}{4}A^2 + \frac{7}{4}A^3 = -2A^2 + A^3 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{4}g(A^2) - \frac{3}{4}g(A^3) = \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3 \\ \frac{3}{2}g(A^2) - \frac{1}{2}g(A^3) = -2A^2 + A^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7g(A^2) - 3g(A^3) = 6A^2 - 2A^3 \\ 3g(A^2) - g(A^3) = -4A^2 + 2A^3 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} g(A^2) = -9A^2 + 4A^3 \\ g(A^3) = -23A^2 + 10A^3 \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathfrak{M}^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -9 & -23 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$