SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata il 4 Marzo 2004

I

1) Calcoliamo il rango della matrice A.

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k^2 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2 \end{vmatrix} = -k^2(-k^2+k^2) = 0 \Rightarrow \operatorname{rk} A \leq 3.$$

Consideriamo il minore individuato dalle righe $1,2,3$ e colonne $2,3,4$.

$$\begin{vmatrix} 0 & k^2 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -k^3 = 0 \iff k = 0.$$

Quindi per $k \neq 0$, $\operatorname{rk} A = 3$.
Per $k = 0$ invece si ha

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Di conseguenza per $k \neq 0$, $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\big((0,k,-1,0),(k^2,0,-1,0),(0,0,1,-k^2)\big)$.
I vettori del nucleo sono quelli le cui componenti soddisfano il sistema di equazioni lineari

$$\begin{pmatrix} k & 0 & k^2 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} kx + k^2 z = 0 \\ -x + ky = 0 \\ -y - z + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\big((k,1,-1,0)\big).$$

Per $k = 0$ invece $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\big((0,1,0,0),(0,0,1,0)\big)$. I vettori del nucleo sono quelli le cui componenti soddisfano il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\big((0,-1,1,0),(0,1,0,1)\big).$$

2) Il polinomio caratteristico di A è

$$P(x) = \begin{vmatrix} k-x & 0 & k^2 & 0 \\ -1 & k-x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2-x \end{vmatrix} = (-k^2-x)\big[(k-x)^2(-1-x)+k^2\big].$$

Dobbiamo imporre che tale polinomio abbia la radice $x = -1$.

$$P(-1) = 0 \iff (1-k^2)k^2 = 0 \iff k = 0, 1, -1.$$

3) Per $k = 0$, $P(x) = 0 \iff x^3(x+1) = 0$. La radice $x = 0$ ha molteplicità algebrica 3, ma $g_0 = \dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2$, quindi f non è semplice.
Per $k = 1$, $P(x) = 0 \iff x(x+1)(x^2-x-1) = 0$. In questo caso il polinomio caratteristico ha 4 radici reali e distinte, quindi l'endomorfismo è semplice.
Per $k = -1$, $P(x) = 0 \iff x(x+1)(x^2+3x+3) = 0$. In questo caso vi sono due radici non reali quindi f non è semplice.

II

1) L'equazione del fascio di coniche è $6x^2 + 3xy + y^2 - 4 + h(x^2 - 1) = 0$. La matrice associata alla generica conica del fascio è quindi

$$B = \begin{pmatrix} h+6 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h-4 \end{pmatrix}.$$

Da cui $\det B = 0 \iff (h+4)(4h+15) = 0 \iff h = -4,\ h = -\dfrac{15}{4}$.
Le coniche spezzate del fascio sono quindi 3 :

— $h = -4 \Rightarrow 2x^2 + 3xy + y^2 = 0 \iff (x+y)(2x+y) = 0$.

— $h = -\dfrac{15}{4} \Rightarrow 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (3x+2y)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (3x+2y+1)(3x+2y-1) = 0$.

— La conica $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0$ utilizzata per la costruzione del fascio.

Studiamo le coniche irriducibili del fascio. Si ha che $\det A = h + \dfrac{15}{4}$.
Si avranno ellissi se e solo se $\det B \neq 0$ e $\det A > 0$ cioè per $h > -\dfrac{15}{4}$.
Si avranno iperboli se e solo se $\det B \neq 0$ e $\det A > 0$ cioè per $h < -\dfrac{15}{4}$, $h \neq -4$.
Non si hanno parabole.

2) La conica γ, come si deduce dal punto precedente, ha equazione $(x+y)(2x+y) = 0$. Dobbiamo quindi determinare l'ampiezza degli angoli individuati dalle rette $x + y = 0$ e $2x + y = 0$. Sia α uno di tali angoli. Le rette hanno vettori direttivi, rispettivamente, $u = e_1 - e_2$, $v = e_1 - 2e_2$. Quindi $u \cdot v = 1 + 2 = 3 \Rightarrow ||u||||v|| \cos\alpha = 3 \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{5}\cos\alpha = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. L'altro angolo è, naturalmente, il supplementare di α.

III

1) La generica quadrica contenente l'assegnata circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 - 1 + (ax + by + cz + d)z = 0 \Rightarrow x^2 + axz + y^2 + byz + cz^2 + dz - 1 = 0$. Dobbiamo imporre che tale quadrica sia un paraboloide ellittico. La matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a/2 & 0 \\ 0 & 1 & b/2 & 0 \\ a/2 & b/2 & c & d/2 \\ 0 & 0 & d/2 & -1 \end{pmatrix};$$

affinché sia un paraboloide occorre che

$$\begin{cases} \det B \neq 0 \\ \det A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\det A - \dfrac{d}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a/2 \\ 0 & 1 & b/2 \\ 0 & 0 & d/2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \det A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \neq 0 \\ a^2 + b^2 - 4c = 0 \end{cases}.$$

Ogni tale paraboloide è ellittico in quanto contiene una circonferenza.

2) Il piano tangente a Q in $P(1,0,0,1)$ ha equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + z - 1 = 0.$$

3) La conica all'infinito di Q è

$$\begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ (x+2z)^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

L'unico punto improprio reale di Q è quindi il punto le cui coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{cases} t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_\infty(2, 0, -1, 0).$$