SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata il 10 Febbraio 2004

I

1) Sia

$$X = \begin{pmatrix} x & t & v \\ t & y & u \\ v & u & z \end{pmatrix}$$

la generica matrice di $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$. Allora

$$f(X) = AX - XA = \begin{pmatrix} 0 & 4t+u-3v & -x+z-3t+6v \\ -4t-u+3v & 0 & -3y+3z-t+2u \\ x-z+3t-6v & 3y-3z+t-2u & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il nucleo di f bisogna quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4t+u-3v=0 \\ x-z+3t-6v=0 \\ 3y-3z+t-2u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 3u+15v+4z \\ 12y = 9u-3v+12z \\ 4t = -u+3v \end{cases}.$$

Il sistema ammette quindi ∞^3 soluzioni, da cui segue che $\dim \mathrm{Ker}\, f = 3$ e $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) - 3 = 6-3 = 3 = \dim \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R})$, cioè $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R})$, quindi f è suriettiva. Calcoliamo una base per $\mathrm{Ker}\, f$.

$$\begin{cases} u=4 \\ v=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ t=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} u=0 \\ v=4 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=-1 \\ t=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ t=0 \end{cases}.$$

Una base per il nucleo è quindi costituita dalle tre matrici

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \; M_2 = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) La matrice aggiunta di A è

$$A_{\mathrm{agg}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -9 & -6 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$f(I) = 0; \;\; f(A) = A^2 - A^2 = 0; \;\; f(A_{\mathrm{agg}}) = AA_{\mathrm{agg}} - A_{\mathrm{agg}}A = 0 - 0 = 0.$$

Di conseguenza $V := \mathscr{L}(I, A, A_{\mathrm{agg}}) \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Per sapere se V coincide con $\mathrm{Ker}\, f$ basta vedere se esso ha dimensione tre, cioè basta controllare se I, A, A_{agg} sono linearmente indipendenti. I ed A sono ovviamente linearmente indipendenti. Quindi basta vedere se $A_{\mathrm{agg}} \in \mathscr{L}(I, A)$, cioè se l'equazione $A_{\mathrm{agg}} = xI + yA$ ammette soluzioni. Ma si verifica subito che qust'ultima equazione non ammette soluzioni, quindi $V = \mathrm{Ker}\, f$.

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_{agg} :

$$P(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 2 \\ 3 & -9-x & -6 \\ 2 & -6 & -4-x \end{vmatrix} = -x^3 - 14x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+14) = 0.$$

L'unico autovalore di molteplicità superiore a uno è $x = 0$; calcoliamo quindi la sua molteplicità geometrica:

$$g_0 = 3 - \operatorname{rk} A_{\text{agg}} = 3 - 1 = 2 = m_0.$$

Quindi possiamo affermare che A_{agg} è diagonalizzabile.

II

1) Calcoliamo una base per $\operatorname{Ker} f$:

$$\begin{cases} x = y + 3t \\ z = x - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 3t \\ z = y + 2t \end{cases} \Rightarrow v_1 = (1,1,1,0),\ v_2 = (3,0,2,1).$$

I vettori $v_1, v_2, v_3, v_4 = (1,-1,0,1)$ costituiscono una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^4$. Infatti, poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1-1) + (3-2+3) = 1 \neq 0,$$

i quattro vettori sono linearmente indipendenti.
Si ha quindi che

$$\begin{cases} f(v_1) = 0 \\ f(v_2) = 0 \\ f(v_3) = 7v_3 \\ f(v_4) = v_1 + hv_3 + 7v_4 \end{cases} \Rightarrow M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & h \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è quindi

$$P(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7-x & h \\ 0 & 0 & 0 & 7-x \end{vmatrix} = x^2(7-x)^2.$$

Le radici di $P(x)$ sono quindi $x = 0$, $m_0 = 2$; $\quad x = 7$, $m_7 = 2$.
Inoltre sappiamo che $g_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2 = m_0$, quindi dobbiamo solo calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 7.

$$g_7 = 4 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4-3 = 1 & \text{se } h \neq 0 \\ 4-2 = 2 & \text{se } h = 0 \end{cases}.$$

Quindi f non è semplice se $h \neq 0$, f è semplice se $h = 0$.

2) Calcoliamo la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=(0,0,0,0) \\ 3f(e_1)+2f(e_3)+f(e_4)=(0,0,0,0) \\ f(e_2)-f(e_3)=(0,7,-7,0) \\ f(e_1)-f(e_2)+f(e_4)=(8,h-6,1-h,7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1)=(-16,19-2h,2h-9,-14) \\ f(e_2)=(8,h-6,1-h,7) \\ f(e_3)=(8,h-13,8-h,7) \\ f(e_4)=(32,4h-31,11-4h,28) \end{cases}.$$

La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è quindi

$$M=\begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 & 32 \\ 19-2h & h-6 & h-13 & 4h-31 \\ 2h-9 & 1-h & 8-h & 11-4h \\ -14 & 7 & 7 & 28 \end{pmatrix}.$$

III

1) Verifichiamo che r ed s sono complanari, calcolando il determinante dei coefficienti dei piani che individuano le due rette:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -11+11=0.$$

Calcoliamo l'equazione del piano che contiene entrambe le rette. Fascio di piani passanti per $s : \lambda(2x-6z-1)+\mu(x-z-1)=0$. Poiché l'origine appartiene a r ma non a s, basterà imporre il passaggio per l'origine: $\lambda(-1)+\mu(-1)=0 \Rightarrow \lambda=1$ e $\mu=-1$.
Il piano π ha quindi equazione

$$2x-6z-1-x+z+1=0 \Rightarrow x-5z=0.$$

2) La circonferenza γ di π di centro l'origine e raggio 1 ha equazioni

$$x-5z=x^2+y^2+z^2-1=0 \Rightarrow x-5z=y^2+26z^2-1=0.$$

La generica quadrica Q contenente γ ha equazione

$$y^2+26z^2-1+(ax+by+cz+d)(x-5z)=0 \Rightarrow$$
$$ax^2+bxy+(c-5a)xz+dxt+y^2-5byz+(26-5c)z^2-5dzt-t^2=0.$$

Il punto $V(1,1,0)$ sarà vertice per Q se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c-5a}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 & -\frac{5b}{2} & 0 \\ \frac{c-5a}{2} & -\frac{5b}{2} & 26-5c & -\frac{5d}{2} \\ \frac{d}{2} & 0 & -\frac{5d}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b+d=0 \\ b+2=0 \\ c-5a-5b-5d=0 \\ d-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}.$$

Il cono richiesto ha quindi equazione

$$2xy-y^2-10yz-26z^2-2x+10z+1=0.$$