SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata l' 11 Aprile 2003

I

1) Determiniamo prima le relazioni cartesiane di U e W. Equazione cartesiana di U :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 3y + z = 0;$$

detto $m + nx + px^2$ il generico polinomio in $\mathbb{R}_2[x]$, i coefficienti dei polinomi che stanno in W devono soddisfare la relazione:

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m + n - p = 0.$$

Possiamo adesso calcolare le controimmagini. La controimmagine di U è definita dalla relazione:

$$2(a - b) - 3(c - d) + (e - a) = 0 \Rightarrow a - 2b - 3c + 3d + e = 0;$$

la controimmagine di W è invece definita dalla relazione:

$$b - c + (d - e) - (a - d) = 0 \Rightarrow a - b + c - 2d + e = 0.$$

Lo spazio cercato ha quindi equazioni cartesiane

$$\begin{cases} a - 2b - 3c + 3d + e = 0 \\ a - b + c - 2d + e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5c + 7d - e \\ b = -4c + 5d \end{cases}$$

da cui ricaviamo che una base $\mathscr{B}$ di V è costituita dai vettori

$$v_1 = (5, 4, -1, 0, 0), v_2 = (7, 5, 0, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0, 0, -1).$$

2) Studiamo la restrizione $g' : V \to \mathbb{R}_2[x]$, di g a V.

$$g'(v_1) = 5 + 5x^2,\ \ g'(v_2) = 5 + x + 6x^2,\ \ g'(v_3) = x + x^2;$$

la matrice associata a g' rispetto alla base $\mathscr{B}$ ed alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{rk} M = 2$ quindi $\dim \operatorname{Im} g' = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} g' = 1$. Poichè $\operatorname{Im} g' \subseteq W$ si ha che $\operatorname{Im} g' = W$. Per calcolare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ y + z = 0 \\ 5x + 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

cioè $\operatorname{Ker} g' = \mathscr{L}(v_1 - v_2 + v_3) = \mathscr{L}(1, 1, 1, 1, 1)$.

II

1) L'equazione cartesiana di V è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + z + w = 0.$$

2) Scegliendo in V la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ otteniamo che

$$\begin{aligned} f(v_1) &= hv_1 \\ f(v_2) &= (h-4)v_1 + 4v_2 \\ f(v_3) &= (h-4)v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

quindi la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathscr{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} h & h-4 & 0 \\ 0 & 4 & h-4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di f sono quindi $\lambda = h, 4, 2$. Se $h \neq 4$ e $h \neq 2$ i tre autovalori sono distinti e l'endomorfismo è quindi semplice.

Se $h = 4$, l'autovalore 4 ha molteplicità 2; la molteplicità geometrica è

$$g_4 = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2,$$

quindi f è semplice.

Se $h = 2$, l'autovalore 2 ha molteplicità 2; la molteplicità geometrica è

$$g_2 = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

quindi f non è semplice.

3) Determiniamo, al variare di h, gli autospazi di f.

Se $h \neq 4$ e $h \neq 2$ gli autospazi V_h, V_4 e V_2 sono dati rispettivamente dai sistemi di equazioni:

$$\begin{pmatrix} 0 & h-4 & 0 \\ 0 & 4-h & h-4 \\ 0 & 0 & 2-h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_h = \mathscr{L}(v_1);$$

$$\begin{pmatrix} h-4 & h-4 & 0 \\ 0 & 0 & h-4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_4 = \mathscr{L}(v_1 - v_2);$$

$$\begin{pmatrix} h-2 & h-4 & 0 \\ 0 & 2 & h-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = (h-4)^2\rho \\ y = (2-h)(h-4)\rho \\ z = 2(h-2)\rho \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \mathscr{L}\big((h-4)^2 v_1 - (h-2)(h-4)v_2 + 2(h-2)v_3\big).$$

Se $h = 4$ gli autospazi V_4 e V_2 sono dati rispettivamente dai sistemi di equazioni:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow V_4 = \mathscr{L}(v_1, v_2);$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \mathscr{L}(v_3);$$

Se $h = 2$ gli autospazi V_4 e V_2 sono dati rispettivamente dai sistemi di equazioni:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \mathscr{L}(v_1);$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_4 = \mathscr{L}(v_1 - v_2);$$

III

La matrice associata a γ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 3 & 9 & 13/2 \\ 1/2 & 13/2 & -12 \end{pmatrix};$$

$$\det B = -108 + \frac{39}{4} + \frac{39}{4} - \frac{9}{4} - \frac{169}{4} + 108 = -25 \neq 0; \ \det A = 0$$

quindi γ è una parabola.
Per calcolare l'asse di simmetria della parabola determiniamo prima il suo punto improprio.

$$\begin{cases} (x+3y)^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow P_\infty(3, -1, 0) \Rightarrow P_\infty^\perp(1, 3, 0).$$

L'asse di simmetria di γ è la polare di $P_\infty^\perp$:

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 3 & 9 & 13/2 \\ 1/2 & 13/2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y + 2 = 0.$$

Il vertice di γ si ottiene intersecando la parabola con l'asse di simmetria:

$$\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ (x+3y)^2 + x + 13y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow V(-5, 1).$$

Per determinare il fuoco calcoliamo la distanza d fuoco-vertice, utilizzando la forma ridotta dell'equazione di γ; sappiamo che $Y^2 - 4dX = 0$ è l'equazione canonica quindi una forma ridotta dell'equazione di γ è del tipo $aY^2 - 4adX = 0$ da cui vediamo che $\det B = -4a^3d^2$ e $\operatorname{tr} A = a$, quindi

$$d^2 = -\frac{\det B}{4(\operatorname{tr} A)^3} = -\frac{-25}{4 \cdot 10^3} = \frac{25}{4000} = \frac{1}{160}.$$

Determiniamo adesso i punti sull'asse di simmetria aventi distanza d dal vertice. Il generico punto sull'asse di simmetria ha coordinate $F(-3k-2, k)$. Quindi

$$d(F,V)^2 = d^2 \iff (-3k-2+5)^2 + (k-1)^2 = \frac{1}{160} \iff (3k-3)^2 + (k-1)^2 = \frac{1}{160} \iff$$

$$\iff 10(k-1)^2 = \frac{1}{160} \iff (k-1)^2 = \frac{1}{1600} \iff k = 1 \pm \frac{1}{40}.$$

I punti cercati hanno quindi coordinate $F(-\frac{197}{40}, \frac{39}{40})$, $F'(-\frac{203}{40}, \frac{41}{40})$; per individuare chi tra i due è il fuoco intersechiamo la parabola con l'asse delle $\vec{x}$:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-4,0),\ B(3,0).$$

Il fuoco è quindi il punto di ascissa più alta, cioè $F(-\frac{197}{40}, \frac{39}{40})$.
La direttrice di γ non è altro che la polare del fuoco:

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 3 & 9 & 13/2 \\ 1/2 & 13/2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -197/40 \\ 39/40 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 12x - 4y + 65 = 0.$$

Sia adesso $P(k,k,k)$ il generico punto della retta $x = y = z$. Calcoliamo l'area del triangolo PAB; per fare ciò determiniamo la distanza h di P dalla retta AB. La retta AB è l'asse delle $\vec{x}$ di equazioni $y = z = 0$; il piano passante per P ortogonale ad AB ha equazione $x - k = 0$. Esso interseca quindi la retta AB nel punto $Q(k,0,0)$. Quindi

$$h^2 = d(P,Q)^2 = 2k^2 \Rightarrow \text{Area } PAB = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,h = \frac{1}{2}7\sqrt{2}\,|k| = 1 \iff |k| = \frac{\sqrt{2}}{7}.$$

I punti richiesti hanno quindi coordinate

$$P(\pm\frac{\sqrt{2}}{7}, \pm\frac{\sqrt{2}}{7}, \pm\frac{\sqrt{2}}{7}).$$