

SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata il 27 Marzo 2003

I

1) Il generico vettore in V è della forma $(2a, b, c, a)$. Scegliamo in V la base $\mathcal{B}$:

$$v_1 = (2, 0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0, 0) = e_2, v_3 = (0, 0, 1, 0) = e_3.$$

Si ha quindi che

$$f(v_1) = 2f(e_1) + f(e_4) = 2(7-2h, 4-2h, h-1, 3-h) + e_4 = (14-4h, 8-4h, 2h-2, 7-2h) \in V;$$

$$f(v_2) = f(e_2) = (2h-4, 2h-1, -h, h-2) \in V;$$

$$f(v_3) = f(e_3) = e_3 \in V.$$

Quindi f induce un endomorfismo su V .

2) Osserviamo che

$$f(v_1) = (7-2h)v_1 + (8-4h)v_2 + (2h-2)v_3$$

$$f(v_2) = (h-2)v_1 + (2h-1)v_2 - hv_3$$

$$f(v_3) = v_3,$$

quindi la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 7-2h & h-2 & 0 \\ 8-4h & 2h-1 & 0 \\ 2h-2 & -h & 1 \end{pmatrix}.$$

Studiamo il rango di M :

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} 7-2h & h-2 \\ 8-4h & 2h-1 \end{vmatrix} = (7-2h)(2h-1) - (h-2)(8-4h) = \\ &= 14h - 7 - 4h^2 + 2h - 8h + 4h^2 + 16 - 8h = 9 \neq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Di conseguenza f è un isomorfismo, quindi $\text{Im } f = V$ e $\text{Ker } f = \{0\}$.

3) Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico di M :

$$\begin{aligned} P(x) &= \begin{vmatrix} 7-2h-x & h-2 & 0 \\ 8-4h & 2h-1-x & 0 \\ 2h-2 & -h & 1-x \end{vmatrix} = 0 \iff (1-x) \begin{vmatrix} 7-2h-x & h-2 \\ 8-4h & 2h-1-x \end{vmatrix} = 0 \iff \\ &\iff (1-x)(x^2 - 6x + 9) = 0 \iff (1-x)(x-3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Le radici sono quindi $x = 1$, $m_1 = 1$ e $x = 3$, $m_3 = 2$.

Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 :

$$g_3 = 3 - \text{rk}(M - 3I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 4-2h & h-2 & 0 \\ 8-4h & 2h-4 & 0 \\ 2h-2 & -h & -2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il minore 2×2 della matrice $M - 3I$ individuato dalle righe 2, 3 e dalle colonne 2, 3. Tale minore è $-2(2h - 4) = -4(h - 2) = 0 \iff h = 2$.

Quindi, per $h \neq 2$, $g_3 = 3 - 2 = 1$, quindi f non è semplice.

Per $h = 2$ si ha invece

$$g_3 = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

di conseguenza f è semplice.

4) Nel caso $h = 0$ si ha che

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

calcoliamo i due autospazi.

I generatori $xv_1 + yv_2 + zv_3$ di V_1 si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}.$$

Una soluzione del sistema è quindi

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) \Rightarrow V_1 = \mathcal{L}(v_3) = \mathcal{L}((0, 0, 1, 0)).$$

I generatori $xv_1 + yv_2 + zv_3$ di V_3 si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$$

Una soluzione del sistema è quindi

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) \Rightarrow V_3 = \mathcal{L}(v_1 + 2v_2 - v_3) = \mathcal{L}((2, 2, -1, 1)).$$

Di conseguenza equazioni cartesiane di $V_1 \oplus V_3$ si ottengono imponendo

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow x - 2t = y - 2t = 0.$$

II

- 1) La retta r' simmetrica di r rispetto all'origine ha equazione $-12x - 5y - 12 = 0$ ovvero $r' : 12x + 5y + 12 = 0$, mentre il punto simmetrico di A rispetto all'origine è $A'(-1, 0)$.

Il fascio richiesto è quindi costituito dalle coniche bitangenti nei punti A ed A' alle rette r ed r' :

$$(12x + 5y - 12)(12x + 5y + 12) + hy^2 = 0 \Rightarrow 144x^2 + 120xy + (h + 25)y^2 - 144 = 0.$$

La matrice associata alla generica conica del fascio è

$$B = \begin{pmatrix} 144 & 60 & 0 \\ 60 & h + 25 & 0 \\ 0 & 0 & -144 \end{pmatrix};$$

per $h \neq 0$ tale conica è irriducibile perché le uniche coniche spezzate del fascio sono le due coniche che abbiamo utilizzato per generarlo. Studiamo le coniche irriducibili

$$\det A = 144(h + 25) - 60^2 = 144(h + 25 - 25) = 144h$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} \det A < 0 &\iff h < 0 && \text{iperboli} \\ \det A = 0 &\iff h = 0 && \text{conica spezzata} \\ \det A > 0 &\iff h > 0 && \text{ellissi.} \end{aligned}$$

2) L'iperbole equilatera δ si ottiene imponendo $\text{tr } A = 0$:

$$144 + h + 25 = 0 \iff h = -169;$$

quindi la sua equazione è

$$144x^2 + 120xy - 144y^2 - 144 = 0 \iff 6x^2 + 5xy - 6y^2 - 6 = 0.$$

Gli asintoti di δ sono le tangenti nei suoi punti impropri. Calcoliamo i punti impropri:

$$\begin{cases} t = 0 \\ 6x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_\infty(3, -2, 0), Q_\infty(2, 3, 0)$$

$$(x \ y \ t) \begin{pmatrix} 6 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 0;$$

$$(x \ y \ t) \begin{pmatrix} 6 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 0.$$

III

1) La circonferenza γ giace sul piano individuato dalla retta r e dall'origine. Equazioni cartesiane della retta r sono

$$\begin{cases} x = -11z + 14 \\ y = 16z - 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 11z - 14 = 0 \\ y - 16z + 14 = 0 \end{cases};$$

il fascio di piani che ha per asse la retta r è

$$\lambda(x + 11z - 14 = 0) + \mu(y - 16z + 14) = 0;$$

imponendo il passaggio per l'origine otteniamo

$$-14\lambda + 14\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 1;$$

quindi la circonferenza giace sul piano di equazione

$$q: x + y - 5z = 0.$$

Calcoliamo adesso il raggio r di γ . Piano per O perpendicolare a r :

$$p: 11x - 16y - z = 0;$$

intersechiamo tale piano con r :

$$11(11u + 14) - 16(-16u - 14) + u = 0 \Rightarrow 378u = -378 \Rightarrow u = -1;$$

quindi il punto $P = p \cap r$ ha coordinate $P(-11 + 14, 16 - 14, 1) = P(3, 2, 1)$ e

$$r^2 = (3 - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (1 - 0)^2 = 9 + 4 + 1 = 14.$$

La circonferenza giace quindi sulla sfera S di centro O e raggio r :

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0;$$

equazioni della circonferenza sono quindi

$$\gamma \begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0 \end{cases}.$$

- 2) I centri delle sfere di raggio $R = \sqrt{122}$ contenenti γ giacciono sulla retta per O ortogonale a q , che ha equazioni parametriche $x = u, y = u, z = -5u$. Quindi se C è uno di tali centri, le sue coordinate sono della forma $C(u, u, -5u)$; inoltre si ha che

$$d(C, O)^2 = R^2 - r^2 = 122 - 14 = 108$$

da cui ricaviamo che

$$u^2 + u^2 + 25u^2 = 108 \Rightarrow 27u^2 = 108 \Rightarrow u = \pm 2.$$

Le sue sfere richieste hanno quindi equazione

$$(x \pm 2)^2 + (y \pm 2)^2 + (z \mp 10)^2 = 122 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm 4x \pm 4y \mp 20z + 4 + 4 + 100 - 122 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm 4x \pm 4y \mp 20z - 14 = 0.$$