SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata il 9 Gennaio 2003

I

1) Calcoliamo la legge di $f \circ g$ e $g \circ f$:

$$\begin{aligned} f \circ g(x,y,z) &= f(g(x,y,z)) = f(-y-z, x+2y+z, -x-y) = \\ &= ((-y-z)-(x+2y+z)-3(-x-y), -(-y-z)+2(x+2y+z)+5(-x-y), \\ &\qquad -(x+2y+z)-2(-x-y)) = (2x-2z, -3x+3z, x-z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x,y,z) &= g(f(x,y,z)) = g(x-y-3z, -x+2y+5z, -y-2z) = \\ &= (-(-x+2y+5z)-(-y-2z), (x-y-3z)+2(-x+2y+5z)+(-y-2z), \\ &\qquad -(x-y-3z)-(-x+2y+5z)) = (x-y-3z, -x+2y+5z, -y-2z). \end{aligned}$$

Quindi, dette A e B le matrici associate rispettivamente a $f \circ g$ e $g \circ f$, rispetto alle basi canoniche, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Studiamo la semplicità di $f \circ g$:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -2 \\ -3 & -x & 3 \\ 1 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x[(x-2)(x+1)+2] = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0.$$

Basta quindi calcolare la molteplicità geometrica della radice $x = 0$:

$$g_0 = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 = m_0$$

quindi $f \circ g$ è semplice.

Studiamo adesso la semplicità di $g \circ f$:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & -3 \\ -1 & 2-x & 5 \\ 0 & -1 & -2-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-x)(2-x)(-2-x) - 3 + 5(1-x) + x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x)(x^2-4) - 3 + 5 - 5x + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0.$$

Ancora una volta basta calcolare la molteplicità geometrica della radice $x = 0$:

$$g_0 = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 < m_0 = 2,$$

quindi $g \circ f$ non è semplice.

2) Diagonalizziamo $f \circ g$. Calcoliamo una base di autovettori:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = z,$$

quindi una base di V_0 è costituita dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \end{cases},$$

quindi una base di V_1 è costituita dal vettore $v_3 = (2, -3, 1)$. Le matrici di passaggio dalla base canonica alla base di autovettori prescelta si calcolano dalle relazioni

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_3 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 = 2e_1 - 3e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -v_1 + 3v_2 + v_3 \\ e_2 = v_2 \\ e_3 = 2v_1 - 3v_2 - v_3 \end{cases}.$$

Di conseguenza

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Utilizzando la base di autovettori di $f \circ g$, $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, otteniamo:

$$\begin{cases} (kf \circ g + g \circ f)(v_1) = g \circ f(v_1) = (-2, 4, -2) \\ (kf \circ g + g \circ f)(v_2) = g \circ f(v_2) = (-1, 2, -1) \\ (kf \circ g + g \circ f)(v_3) = kv_3 + g \circ f(v_3) = (2k + 2, -3k - 3, k + 1) \end{cases}.$$

Quindi

$$C = \mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{E}}(kf \circ g + g \circ f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2k+2 \\ 4 & 2 & -3k-3 \\ -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2k+2 \\ 4 & 2 & -3k-3 \\ -2 & -1 & k+1 \end{vmatrix} = 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo il minore individuato dalle righe $1, 3$ e dalle colonne $2, 3$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2k+2 \\ -1 & k+1 \end{vmatrix} = -k - 1 + 2k + 2 = k + 1 = 0 \iff k = -1;$$

osserviamo inoltre che per $k = -1$ la terza colonna di C si annulla; quindi per $k \neq -1$, $\operatorname{rk} C = 2$; per $k = -1$, $\operatorname{rk} C = 1$.

Per $k \neq -1$,

$$\operatorname{Im}(kf \circ g + g \circ f) = \mathscr{L}\big((1, -2, 1), (2(k+1), -3(k+1), k+1)\big) = \mathscr{L}\big((1, -2, 1), (2, -3, 1)\big),$$

$$\mathrm{Ker}(kf \circ g + g \circ f) = \mathscr{L}\big(v_1 - 2v_2\big) = \mathscr{L}\big((1, -2, 1)\big).$$

Per $k = -1$,

$$\mathrm{Im}(-f \circ g + g \circ f) = \mathscr{L}\big((1, -2, 1)\big)$$

$$\mathrm{Ker}(-f \circ g + g \circ f) = \mathscr{L}\big(v_1 - 2v_2, v_3\big) = \mathscr{L}\big((1, -2, 1), (2, -3, 1)\big).$$

II

1) Siano $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in W$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; dobbiamo dimostrare che $a_1(f_1, g_1) + a_2(f_2, g_2) \in W$; infatti

$$a_1(f_1, g_1) + a_2(f_2, g_2) = (a_1 f_1 + a_2 f_2, a_1 g_1 + a_2 g_2);$$

e poiché

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(1) = a_1 f_1(1) + a_2 f_2(1) = a_1 g_1(2) + a_2 g_2(2) = (a_1 g_1 + a_2 g_2)(2)$$

ne segue che $(a_1 f_1 + a_2 f_2, a_1 g_1 + a_2 g_2) \in W$.

2) Siano $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ e $g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ generici polinomi di $\mathbb{R}_3[x]$.

$$(f, g) \in W \iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 \iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 + b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3.$$

Si ha quindi che la dimensione di W è 7. Una sua base si può ottenere, ad esempio, ponendo uguale ad 1 una variabile al secondo membro ed uguale a zero tutte le rimanenti, a turno, ricavando di conseguenza a_0; così facendo otteniamo la base:

$$(-1 + x, 0), (-1 + x^2, 0), (-1 + x^3, 0), (1, 1), (2, x), (4, x^2), (8, x^3).$$

III

1) Indichiamo con d la direttrice. L'ellisse è quindi il luogo dei punti $P(x, y, 0)$ del piano $z = 0$ tali che

$$\frac{d(P, F)}{d(P, d)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2d(P, F)^2 - d(P, d)^2 = 0,$$

ovvero

$$2\big[(x - 2)^2 + y^2\big] - \frac{|x - 2y|^2}{5} = 0 \iff 10(x - 2)^2 + 10y^2 - x^2 + 4xy - 4y^2 = 0;$$

quindi equazioni della richiesta ellisse sono

$$\begin{cases} 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 40x + 40 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

2) La matrice associata alla conica γ è

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -20 \\ 2 & 6 & 0 \\ -20 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Gli assi di simmetria di γ passano entrambi per il centro di simmetria $C(\alpha, \beta, 0)$ che si può calcolare risolvendo il sistema relativo alle prime due righe della matrice B :

$$\begin{cases} 9\alpha + 2\beta - 20 = 0 \\ 2\alpha + 6\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{12}{5} \\ \beta = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow C(12, -4, 0, 5).$$

Per quanto riguardo le direzioni dei due assi basta determinare gli autovettori della matrice A :

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff \lambda = 5,\ 10.$$

Il primo autovettore si ricava quindi risolvendo l'equazione

$$(9-5)\xi + 2\eta = 0 \Rightarrow 4\xi + 2\eta = 0 \Rightarrow \xi = 1,\ \eta = -2,$$

quindi il primo autovettore è $v_1 = (1, -2)$; il secondo autovettore, dovendo essere ortogonale al primo, è $v_2 = (2, 1)$.

I due assi di simmetria sono quindi le rette del piano $z = 0$ passanti per C ed aventi le direzioni suddette.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 12 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0; \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 12 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 4 = 0.$$

Di conseguenza i due assi di simmetria hanno equazioni

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

3) L'iperbole richiesta appartiene al fascio di coniche bitangenti nei due punti impropri degli assi agli assi stessi. Tale fascio, in coordinate omogenee, ha equazioni

$$\begin{cases} \lambda(2x + y - 4t)(x - 2y - 4t) + \mu t^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases};$$

imponendo il passaggio per $A(0, 5, 0, 1)$ otteniamo

$$\lambda(5-4)(-10-4) + \mu = 0 \Rightarrow -14\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 1\, \mu = 14;$$

l'iperbole richiesta ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} (2x + y - 4)(x - 2y - 4) + 14 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 2y^2 - 12x + 4y + 30 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

4) Sia $P(x_0, y_0, 0)$ il generico punto dell'ellisse γ. La retta PV ha equazioni

$$\frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y+1}{y_0+1} = \frac{z+1}{1};$$

l'equazione del cono si ottiene quindi eliminando x_0 e y_0 dal sistema

$$\begin{cases} x-1 = (x_0-1)(z+1) \\ y+1 = (y_0+1)(z+1) \\ 9x_0^2 + 4x_0y_0 + 6y_0^2 - 40x_0 + 40 = 0 \end{cases};$$

dalle prime due equazioni si ricava che

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x+z}{z+1} \\ y_0 = \dfrac{y-z}{z+1} \end{cases}$$

e, sostituendo nella terza equazione, otteniamo l'equazione del cono:

$$9(x+z)^2 + 4(x+z)(y-z) + 6(y-z)^2 - 40(x+z)(z+1) + 40(z+1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 26xz - 8yz + 11z^2 - 40x + 40z + 40 = 0.$$

5) Il piano $x + z = 0$ passa per il vertice del cono, quindi la conica sezione è spezzata. Intersecando otteniamo

$$\begin{cases} x+z = 0 \\ 6(y-z)^2 + 40(z+1)^2 = 0 \end{cases}$$

che è una conica spezzata in due rette immaginarie e coniugate.