SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata il 14 Dicembre 2002

I

1) La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & k-1 \\ 0 & 2k-1 & 1-k & k-2 \\ 0 & 2k-2 & 2-k & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico di M :

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & k & -1 & k-1 \\ 0 & 2k-1-x & 1-k & k-2 \\ 0 & 2k-2 & 2-k-x & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (x-1)(x-2) \begin{vmatrix} 2k-1-x & 1-k \\ 2k-2 & 2-k-x \end{vmatrix} = 0 \iff (x-1)(x-2)[x^2 - (k+1)x + k] = 0$$

$$\iff (x-1)^2(x-2)(x-k) = 0.$$

Se $k \neq 1, 2$ abbiamo le radici $x = 1, m_1 = 2; x = 2; x = k$. Basta quindi calcolare la molteplicità geometrica g_1 della radice $x = 1$:

$$g_1 = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & k & -1 & k-1 \\ 0 & 2k-2 & 1-k & k-2 \\ 0 & 2k-2 & 1-k & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 < m_1$$

perché il minore individuato dalle righe 1, 3, 4 e dalle colonne 2, 3, 4 è

$$\begin{vmatrix} k & -1 & k-1 \\ 2k-2 & 1-k & k-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-k)k + 2(k-1) = (k-1)(2-k) \neq 0$$

quindi f non è semplice.

Nel caso $k = 1$ abbiamo le due radici $x = 1, m_1 = 3; x = 2$. Inoltre

$$g_1 = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2 < m_1$$

quindi f non è semplice.

Infine, per $k = 2$, abbiamo le due radici $x = 1, m_1 = 2; x = 2, m_2 = 2$. Inoltre

$$g_1 = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2 = m_1;$$

$$g_2 = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2 = m_2,$$

quindi f è semplice.

2) f è semplice solo nel caso $k = 2$.

Le equazioni di V_1 sono date dal sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 2y \\ w = 0 \end{cases},$$

quindi una base di V_1 è costituita dai vettori $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 2, 0)$.

Le equazioni di V_2 sono date dal sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z + w \\ y = z \end{cases},$$

quindi una base di V_2 è costituita dai vettori $v_3 = (1, 1, 1, 0)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 1)$.

Una base di autovettori di $\mathbb{R}^4$ è quindi (v_1, v_2, v_3, v_4) .

3) Nel caso $k = 1$ le equazioni di V_1 sono date dal sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ w = 0 \end{cases},$$

quindi una base di V_1 è costituita dai vettori $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 1, 0)$.

Le equazioni di V_2 sono date dal sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -w \\ z = -w \end{cases}$$

quindi una base di V_2 è costituita dal vettore $u_3 = (0, 1, 1, -1)$.

L'equazione cartesiana di $V = V_1 \oplus V_2$ è quindi

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - z = 0.$$

4) Scegliamo, come base di V , $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Si ha che

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = (k-1, k, k, 0) = (k-1)u_1 + ku_2 \\ f(u_3) = (0, 2, 2, -2) = 2u_3. \end{cases}$$

Come base di $\mathbb{R}^4$ scegliamo $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, dove $u_4 = (0, 0, 1, 0)$. Allora, detta g la restrizione di $f - 1_{\mathbb{R}^4}$ a V , si ha che

$$M = \mathfrak{M}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k = 1$ il rango di M è 1, quindi $\dim \text{Ker } g = 2$ e $\dim \text{Im } g = 1$; $\text{Ker } g = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ e $\text{Im } g = \mathcal{L}(u_3)$.

Per $k \neq 1$ il rango di M è 2; quindi $\dim \text{Ker } g = 1$ e $\dim \text{Im } g = 2$; $\text{Ker } g = \mathcal{L}(u_1)$ e $\text{Im } g = \mathcal{L}(u_1 + u_2, u_3)$.

II

Osserviamo che I ed A sono linearmente indipendenti, mentre $A^2 = -2I + 3A$; quindi deve essere

$$f(A^2) = -2f(I) + 3f(A) = -2(I - 2A) + 3(2I + A) = 4I + 7A.$$

Si dovrà quindi avere $k + 1 = 7$, cioè $k = 6$.

III

1) Applicando la formula della retta per due punti, si ha che

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z}{-1};$$

Quindi la retta r ha equazioni $x - z - 1 = y + z - 1 = 0$.

2) Fascio di piani avente per asse la retta r :

$$\lambda(x - z - 1) + \mu(y + z - 1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per C :

$$\lambda(1 - 1 - 1) + \mu(1 + 1 - 1) = 0 \Rightarrow -\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 1.$$

Il piano π ha quindi equazione:

$$\pi) \quad x + y - 2 = 0.$$

- 3) La direzione di r è data dal vettore $v_r = (1, -1, 1)$; quindi l'equazione del piano passante per A e ortogonale a r è

$$1(x - 1) - 1(y - 1) + 1z = 0 \Rightarrow x - y + z = 0.$$

La retta richiesta ha quindi equazione

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

- 4) Prima di tutto calcoliamo le coordinate del punto P intersezione di r col piano π_2 di equazione: $x + y + 2z = 0$.

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases};$$

cioè $P(0, 2, -1)$.

Calcoliamo adesso le coordinate del punto A'' simmetrico di A , rispetto al piano π_2 . Per fare ciò determiniamo la proiezione ortogonale A' di A sul piano π_2 ; la retta per A ortogonale a π_2 ha equazioni parametriche: $x = k + 1, y = k + 1, z = 2k$. Intersecando con π_2 otteniamo $A' \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$; il punto A' deve essere punto medio del segmento di estremi A ed $A''(x_0, y_0, z_0)$.

Quindi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x_0 + 1}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{z_0}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A'' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right).$$

La retta r' è la retta congiungente P e A'' :

$$r' \begin{cases} 7x + y + 2z = 0 \\ 5x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

- 5) Un vettore direttivo di r' è $v' = (2, -4, 1)$. Allora si ha che $v_r \cdot v' = (1, -1, 1) \cdot (2, -4, 1) = 5$. Detto α l'angolo formato dalle rette r ed r' si ha che

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{27}} = \frac{5}{9} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{5}{9}.$$

- 6) Il raggio della sfera è la distanza di D da r .

Il piano per D ortogonale a r ha equazione: $x - y + z - 4 = 0$. Esso interseca la retta r nel punto $Q \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$, quindi, detto R il raggio della sfera,

$$R^2 = \overline{DQ}^2 = \frac{8}{3}.$$

L'equazione della sfera è quindi

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{8}{3}.$$