

SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata il 3 Dicembre 2002

I

- 1) Le rette r_1 ed r_2 sono complanari. Infatti r_2 ammette l'espressione parametrica $x = u, y = u - 2, z = u$ e sostituendo nell'equazione di r_2 otteniamo

$$\begin{cases} u + 2u - 4 + 1 = 0 \\ 3u + 4u - 8 + u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u - 3 = 0 \\ 8u - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow u = 1,$$

quindi esse hanno in comune il punto $P(1, -1, 1)$.

Il piano che le contiene appartiene al fascio di asse r_1 di equazione

$$\lambda(x + 2y + 1) + \mu(3x + 4y + z) = 0;$$

imponendo che tale fascio contenga un punto di r_2 distinto da P , ad esempio $Q(0, -2, 0)$, otteniamo l'equazione $\lambda(-3) + \mu(-8) = 0 \Rightarrow \lambda = 8, \mu = -3$ e quindi l'equazione del piano p contenete r_1 ed r_2 è $8(x + 2y + 1) - 3(3x + 4y + z) = 0$ cioè $x - 4y + 3z - 8 = 0$.

Affinché tutte e tre le rette siano complanari occorre quindi che r_3 sia contenuta in tale piano. Cioè occorre che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 2(k-1) & 3 & 0 & 5-2k \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Calcoliamo il minore costituito dalle prime tre colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2(k-1) & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2(k-1) & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8(k-1) + 3 - 3 = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Per $k = 1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2. Quindi le tre rette sono complanari per $k = 1$.

- 2) Il piano che le contiene, come visto in precedenza, è p di equazione $x - 4y + 3z - 8 = 0$.
- 3) Determiniamo i vettori direttivi v_2 e v_3 di r_2 ed r_3 . v_2 si ottiene direttamente dall'espressione parametrica di r_2 ; quindi $v_2 = (1, 1, 1)$.

Per calcolare v_3 basta determinare i minori a segno alterno della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2(k-1) & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $v_2 = (-9, 6(k-1), 3) = -3(3, -2(k-1), -1)$.

Imponiamo che l'angolo formato da r_2 ed r_3 sia di $\frac{\pi}{4}$:

$$(1, 1, 1) \cdot (3, -2(k-1), -1) = \sqrt{3}\sqrt{9 + 4(k-1)^2 + 1} \cos \frac{\pi}{4};$$

$$3 - 2(k-1) - 1 = \sqrt{3}\sqrt{10 + 4k^2 - 8k + 4} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}(4 - 2k) = \sqrt{3}\sqrt{4k^2 - 8k + 14}$$

$$2(4 - 2k)^2 = 3(4k^2 - 8k + 14)$$

$$16 - 16k + 4k^2 = 6k^2 - 12k + 21$$

$$2k^2 + 4k + 5 = 0$$

poiché quest'ultima equazione non ammette soluzioni reali, non esistono i valori di k richiesti.

II

1) La matrice associata alla conica è

$$B = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 0 \\ -4 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$\det B = 2 \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -52 \neq 0; \quad \det A = \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 91 - 16 = 75 > 0$$

quindi γ è un'ellisse.

2) Calcoliamo gli autovalori di A :

$$\begin{vmatrix} 13 - \lambda & -4 \\ -4 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = 0 \Rightarrow \lambda = 5, \quad \lambda = 15.$$

Gli autovettori associati si ottengono risolvendo i sistemi

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Gli autovettori normalizzati sono quindi

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \quad v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Per calcolare il centro di simmetria di γ dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 13a - 4b = 0 \\ 4a - 7b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{75} \\ b = \frac{26}{75} \end{cases}.$$

Quindi la rototraslazione richiesta è

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) + \frac{8}{75} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) + \frac{26}{75} \end{cases}.$$

Per verificare le formule trovate poniamo

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y), \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y), \quad a = \frac{8}{75}, \quad b = \frac{26}{75};$$

sostituendo nell'equazione di γ , otteniamo:

$$\begin{aligned} 13(A + a)^2 - 8(A + a)(B + b) + 7(B + b)^2 - 4(B + b) &= \\ = 13A^2 - 8AB + 7B^2 + 2(13a - 4b)A - 2(4a - 7b + 2)B + 13a^2 - 8ab + 7b^2 - 4b &= \\ = 13A^2 - 8AB + 7B^2 + 13a^2 - 8ab + 7b^2 - 4b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13A^2 - 8AB + 7B^2 &= \frac{1}{5}[13(X - 2Y)^2 - 8(X - 2Y)(2X + Y) + 7(2X + Y)^2] = \\ &= \frac{1}{5}[13X^2 - 52XY + 52Y^2 - 16X^2 + 24XY + 16Y^2 + 28X^2 + 28XY + 7Y^2] = \\ &= \frac{1}{5}(25X^2 + 75Y^2) = 5X^2 + 15Y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13a^2 - 8ab + 7b^2 - 4b &= 13\frac{8^2}{75^2} - 8\frac{8}{75}\frac{26}{75} + 7\frac{26^2}{75^2} - 4\frac{26}{75} = \\ &= \frac{52}{75} \frac{16 - 32 + 91 - 150}{75} = -\frac{52}{75} \frac{75}{75} = -\frac{52}{75}. \end{aligned}$$

In conclusione un'equazione ridotta di γ è

$$5X^2 + 15Y^2 - \frac{52}{75} = 0.$$

III

1) La matrice associata a Q è

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & h/2 & 0 \\ 0 & h+1 & h/2 & 0 \\ h/2 & h/2 & 1 & -h-1 \\ 0 & 0 & -h-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det B = 0 \iff (h+1)^4 = 0 \iff h = -1.$$

Per $h = -1$ otteniamo la quadrica $z^2 - xz - yz = 0$, ovvero $z(z - x - y) = 0$, che è spezzata in due piani distinti.

Per $h \neq -1$ la quadrica è non degenere. La conica all'infinito è

$$C_\infty \begin{cases} t = 0 \\ (h+1)x^2 + (h+1)y^2 + z^2 + hxz + hyz = 0 \end{cases}.$$

C_∞ è riducibile se e solo se

$$\begin{vmatrix} h+1 & 0 & h/2 \\ 0 & h+1 & h/2 \\ h/2 & h/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (h+1)^2 - (h+1)\frac{h^2}{4} - (h+1)\frac{h^2}{4} = 0$$

$$\iff (h+1)(h^2 - 2h - 2) = 0 \iff h = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Quindi, per tali valori di h , Q è un paraboloide.

Per $h \neq -1$ e $h \neq 1 \pm \sqrt{3}$ vediamo se C_∞ ha punti reali.

Dividendo per $h+1$ possiamo riscrivere

$$C_\infty \begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{h+1}z^2 + \frac{h}{h+1}xz + \frac{h}{h+1}yz = 0 \end{cases},$$

inoltre

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + \frac{1}{h+1}z^2 + \frac{h}{h+1}xz + \frac{h}{h+1}yz = \\ & = x^2 + \frac{h}{h+1}xz + \frac{h^2}{4(h+1)^2}z^2 + y^2 + \frac{h}{h+1}yz + \frac{h^2}{4(h+1)^2}z^2 - \frac{h^2}{2(h+1)^2}z^2 + \frac{1}{h+1}z^2 = \\ & = \left[x + \frac{h}{2(h+1)}z \right]^2 + \left[y + \frac{h}{2(h+1)}z \right]^2 + \frac{2+2h-h^2}{2(h+1)^2}z^2. \end{aligned}$$

Quindi C_∞ è priva di punti reali se e solo se

$$\frac{2+2h-h^2}{2(h+1)^2} > 0 \iff 1 - \sqrt{3} < h < 1 + \sqrt{3}.$$

Di conseguenza

- Q è un ellissoide per $1 - \sqrt{3} < h < 1 + \sqrt{3}$;
- Q è un iperboloide per $h < 1 - \sqrt{3}$, $h \neq -1$ e $h > 1 + \sqrt{3}$.

Studiamo infine la natura dei punti di Q . Poiché Q passa per l'origine basta studiare la sezione di Q col piano $z = 0$, che è tangente a Q nell'origine:

$$C \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Essendo C una conica sempre spezzata in rette immaginarie e coniugate, ne deduciamo che Q ha sempre punti ellittici. Quindi

- per $h = 1 \pm \sqrt{3}$, Q è un paraboloide ellittico;
- per $h < 1 - \sqrt{3}$, $h \neq -1$ e $h > 1 + \sqrt{3}$, Q è un iperboloide ellittico.

2) Affinché Q sia una sfera occorre che siano nulli i termini misti e siano tra loro uguali i coefficienti di x^2 , y^2 e z^2 . Ciò accade per $h = 0$. La sfera S ha quindi equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0.$$

3) Possiamo riscrivere l'equazione di S nella forma $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$; da cui si ricava che il centro di S è il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ ed il raggio è $r = 1$.