SOLUZIONE

della prova scritta di **Algebra** assegnata il 9 Novembre 2002

I

Si ha che

$$f(x, y, z, w) = (x + 3z + 2w, x + y + 2z + 3w, x + 2y + z + 4w, y - z + w).$$

1) Consideriamo la base $\mathscr{B}$ di W :

$$w_1 = (3, 2, 0, 0), w_2 = (0, 1, 0, 3), w_3 = (0, 0, 1, -1).$$

Allora $f(w_1) = (3, 5, 7, 2)$, $f(w_2) = (6, 10, 14, 4)$, $f(w_3) = (1, -1, -3, -2)$. Di conseguenza se poniamo $\varphi = f_{|W}$ e indichiamo con $\mathscr{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ si ha che

$$M = \mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 7 & 14 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

poiché la seconda colonna è doppia della prima si vede subito che $\operatorname{rk} M = 2$, quindi $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$. Inoltre $\operatorname{Im} \varphi = \mathscr{L}\big((3, 5, 7, 2), (1, -1, -3, -2)\big)$ e $\operatorname{Ker} \varphi = \mathscr{L}\big((2, 1, 0, -1)\big)$.

2) Una base di V è costituita dai vettori $u_1 = (1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 2, h)$, $u_3 = (h, 1, 1, 1)$.
$f(u_1) = (4, 4, 4, 0)$, $f(u_2) = (2h + 6, 3h + 5, 4h + 4, h - 1)$, $f(u_3) = (h + 5, h + 6, h + 7, 1)$.

$$\begin{aligned} &f(u_1) \in V \quad \forall h \in \mathbb{R}; \\ &f(u_2) \in V \iff (h - 1)^3 = 0 \iff h = 1; \\ &f(u_3) \in V \iff (h - 1)^2 = 0 \iff h = 1. \end{aligned}$$

Quindi f induce un endomorfismo g di V solo per $h = 1$.

3) Per $h = 1$ l'equazione di V diventa $x - 2y + z = 0$.

$$\mathscr{L}\big((1, 2, 3, 1)\big) = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = 3x - z = x - w = 0\big\}.$$

Sia $(x, y, z, w) \in V$; allora imponendo che $g(x, y, z, w) \in V$ si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2(x + 3z + 2w) - (x + y + 2z + 3w) = 0 \\ 3(x + 3z + 2w) - (x + 2y + z + 4w) = 0 \\ x + 3z + 2w - (y - z + w) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y + 4z + w = 0 \end{cases},$$

quindi una base di $g^{-1}\big(\mathscr{L}((1, 2, 3, 1))\big)$ è costituita dai vettori: $(1, 0, -1, 3), (2, 1, 0, -1)$.

II

Osserviamo che I, A e A^2 sono lineamente indipendenti. Consideriamo quindi la base $\mathscr{B} = (I, A, A^2)$ di V. Si ha che

$$\begin{cases} f(I) = A - I \\ f(A) = -A \\ f(A^2) = A^3 = I - 3A + 3A^2 \end{cases}$$

quindi la matrice associata ad f rispetto a $\mathscr{B}$ è

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico

$$P(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 1 \\ 1 & -1-x & -3 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)(-1-x)^2 = 0,$$

cioè $x = -1$ e $x = 3$. Ovviamente $m_3 = g_3 = 1$; $m_{-1} = 2$; calcoliamo g_{-1} :

$$g_{-1} = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} -1+1 & 0 & 1 \\ 1 & -1+1 & -3 \\ 0 & 0 & 3+1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1;$$

quindi f non è semplice.
Per calcolare l'autospazio V_{-1} dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

che ammette la soluzione $(0, 1, 0)$, quindi V_{-1} è generato da A.
Per calcolare l'autospazio V_3 dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

che ammette la soluzione $(4, -11, 16)$, quindi V_3 è generato da

$$4I - 11A + 16A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 37 \\ 0 & 9 & 21 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

III

Calcoliamo i polinomi caratteristici delle due matrici.

Il polinomio caratteristico di M è

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 4 & 2 \\ 2 & -1-x & -2 \\ 0 & 4 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1-x)(3-x)+16+8(1-x)-8(3-x) = (1-x^2)(x-3)$$

Il polinomio caratteristico di N è

$$Q(x) = \begin{vmatrix} 2h-1-x & -2h & 2-2h \\ 0 & -1-x & 0 \\ h-1 & 1-h & 2-h-x \end{vmatrix} = (-1-x)\begin{vmatrix} 2h-1-x & 2-2h \\ h-1 & 2-h-x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-x)\big[(2h-1-x)(2-h-x)-(2-2h)(h-1)\big] = (-1-x)\big[x^2-(h+1)x+h\big]$$

Se M ed N sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. M ha i tre autovalori distinti $-1, 1, 3$. N ha i tre autovalori: $-1, 1, h$. Perchè i due polinomi coincidano si deve quindi avere $h = 3$. Inoltre, per $h = 3$, entrambe le matrici sono diagonalizzabili e sono simili alla stessa matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

quindi sono tra esse simili.