

SOLUZIONE

della prova scritta di **Geometria** assegnata il 24 Settembre 2002

A-I

Chiamiamo M la matrice associata all'applicazione lineare. Calcoliamo il rango della matrice. Vediamo per quali valori di h è nullo il minore individuato dalle colonne 1, 2 e 4. Si ha che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ h & 3 & 1 \\ h+2 & 1 & h \end{vmatrix} = 3h - (h+2) + 2h - 6(h+2) - 1 + h^2 = h^2 - 2h - 15 = 0 \iff h = 5, h = -3$$

Per $h = 5$, riducendo, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 11 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & -24 & -9 \\ 0 & 8 & -24 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(M) = 2.$$

Per $h = -3$, riducendo, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(M) = 3.$$

In conclusione per $h \neq 5$, $\text{rk}(M) = 3$; per $h = 5$, $\text{rk}(M) = 2$.

Per $h \neq 5$, f è suriettiva, cioè $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ e $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } f = 1$. Per calcolare una base di $\text{Ker } f$ bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + hz + 2w = 0 \\ hx + 3y + z + w = 0 \\ (h+2)x + y + (2h+1)z + hw = 0 \end{cases}$$

una cui soluzione è data, ad esempio, dai minori di ordine massimo, presi a segno alterno, della matrice M :

$$(-3h^2 + 14h + 5, h^3 - 5h^2 - h + 5, h^2 - 2h - 15, 0) = (h-5)(-3h-1, h^2-1, h+3, 0),$$

da cui $\text{Ker } f = \mathcal{L}((-3h-1, h^2-1, h+3, 0))$.

Per $h = 5$, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f = 2$ e $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } f = 2$. $\text{Im } f = \mathcal{L}((1, 5, 7), (-1, 3, 1)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$; una base di $\text{Ker } f$ si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x - y + 5z + 2w = 0 \\ 5x + 3y + z + w = 0 \\ 7x + y + 11z + 5w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 5z + 2w = 0 \\ 5x + 3y + z + w = 0 \end{cases}$$

da cui $\text{Ker } f = \mathcal{L}((7, -9, 0, -8), (2, -3, -1, 0))$.

Infine la controimmagine del vettore $(2, 2, 6)$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y + hz + 2w = 2 \\ hx + 3y + z + w = 2 \\ (h+2)x + y + (2h+1)z + hw = 6 \end{cases};$$

poiché $(2, 2, 6) \in \text{Im } f$ per ogni valore di h , tale sistema ammette sempre soluzioni.

Nel caso $h \neq 5$ e $h \neq -3$ si ha che

$$f^{-1}((2, 2, 6)) = \left(\frac{8}{h+3}, \frac{2-2h}{h+3}, 0, 0 \right) + \text{Ker } f;$$

se $h = -3$

$$f^{-1}((2, 2, 6)) = (0, 1, -1, 0) + \text{Ker } f;$$

se $h = 5$

$$f^{-1}((2, 2, 6)) = (1, -1, 0, 0) + \text{Ker } f.$$

A-II

Osserviamo che

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = -e_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} e_1 = v_1 - 2v_2 - v_3 \\ e_2 = v_2 + v_3 \\ e_3 = -v_3 \end{cases};$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{cases} f(e_1) = (3, 6, 3) - 2(h-2, 3h-3, 2h-1) - (-h-6, -3h-14, -2h-7) = (13-h, -3h+26, 12-2h) \\ f(e_2) = (h-2, 3h-3, 2h-1) + (-h-6, -3h-14, -2h-7) = (-8, -17, -8) \\ f(e_3) = -(-h-6, -3h-14, -2h-7) = (h+6, 3h+14, 2h+7) \end{cases}$$

quindi la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 13-h & -8 & h+6 \\ 26-3h & -17 & 3h+14 \\ 12-2h & -8 & 2h+7 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il polinomio caratteristico di f , dato che v_1 è autovettore, conviene utilizzare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} f(v_1) = 3v_1 \\ f(v_2) = (h-2)(v_1 - 2v_2 - v_3) + (3h-3)(v_2 + v_3) + (2h-1)(-v_3) = (h-2)v_1 + (h+1)v_2 \\ f(v_3) = (-6-h)(v_1 - 2v_2 - v_3) + (-3h-14)(v_2 + v_3) + (-2h-7)(-v_3) = -(h+6)v_1 - (h+2)v_2 - v_3 \end{cases},$$

quindi

$$A := M^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & h-2 & -h-6 \\ 0 & h+1 & -h-2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono quindi: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = h+1$ e $\lambda_3 = -1$.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff h = 2. \quad \lambda_3 = \lambda_2 \iff h = -2.$$

Se $h \neq \pm 2$ f è semplice perché i tre autovalori sono distinti.

Se $h = -2$ l'autovalore -1 è doppio; ma

$$\text{rk}(A + I) = \text{rk} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

quindi f è ancora semplice.

Se $h = 2$ l'autovalore 3 è doppio; ma

$$\text{rk}(A - 3I) = \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 1$$

ed f è ancora semplice.

G-I

Siano $A(1, 2)$, $A'(-1, -2)$, $B(\sqrt{5}, 0)$, $B'(-\sqrt{5}, 0)$. I quattro punti giacciono sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 5 = 0$ e sulla conica spezzata $AA' \cup BB'$ che ha equazione $y(2x - y) = 0$. Di conseguenza il fascio di coniche ha equazione

$$\lambda(x^2 + y^2 - 5) + \mu y(2x - y) = 0;$$

dividendo per λ e ponendo $k := \frac{\mu}{\lambda}$, esso diventa

$$x^2 + y^2 - 5 + ky(2x - y) = 0;$$

ovvero

$$x^2 + 2kxy + (1 - k)y^2 - 5 = 0.$$

La matrice associata a tale fascio è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 - k & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\det B = 0 \iff -5[(1 - k) - k^2] = 0 \iff k^2 + k - 1 = 0 \iff k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Le altre coniche spezzate (oltre la conica $AA' \cup BB'$) si ottengono quindi in corrispondenza dei suddetti valori del parametro.

Studiamo adesso le coniche irriducibili del fascio:

$$\det A > 0 \iff (1 - k) - k^2 > 0 \iff -k^2 - k + 1 > 0 \iff \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} < k < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Da cui si deduce che

$$\begin{array}{ll} \text{per } \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} < k < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} & \text{si hanno ellissi,} \\ \text{per } k < \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} \text{ o } k > \frac{\sqrt{5} - 1}{2} & \text{si hanno iperboli,} \end{array}$$

mentre il fascio non contiene parabole.

Le circonferenze del fascio si ottengono quando $1 = 1 - k$ cioè $k = 0$, ovvero la circonferenza $x^2 + y^2 - 5 = 0$ è l'unica del fascio.

Le iperboli equilateri si ottengono per $1 + 1 - k = 0$ ovvero $k = 2$ e quindi l'unica iperbole equilatera del fascio ha equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 5 = 0$.

G-II

Sia r_i la retta passante per P_i e ortogonale al piano $\alpha : x + y - z = 0$, $1 \leq i \leq 3$. In forma parametrica possiamo scrivere

$$r_1 \begin{cases} x = u + 1 \\ y = u \\ z = -u \end{cases} ; r_2 \begin{cases} x = u \\ y = u + 1 \\ z = -u \end{cases} ; r_3 \begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = -u + 1 \end{cases} .$$

Da cui, intersecando col piano α , otteniamo i tre punti:

$$P'_1 \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), P'_2 \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), P'_3 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Per calcolare l'area del triangolo, calcoliamo la misura dei lati

$$\overline{P'_1 P'_2} = \sqrt{2}; \quad \overline{P'_1 P'_3} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \overline{P'_2 P'_3} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

ed il semiperimetro

$$p := \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) = \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6}.$$

Applicando la formula di Erone otteniamo

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \sqrt{\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6} \left(\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6} \frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} \left(\frac{3\sqrt{2}}{6} \right)^2} = \sqrt{\frac{24 - 18}{36} \frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6} \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$