

ESERCIZI DI GEOMETRIA (E)

E1

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

Studiare la conica Γ di equazione

$$xy - x - 1 = 0$$

calcolandone vertici, fuochi ed assi di simmetria. Determinare la conica Γ' simmetrica di Γ rispetto all'origine e la conica Γ'' simmetrica di Γ rispetto all'asse $\vec{x}$.

E2

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

Studiare il fascio di coniche di equazione

$$x^2 + (h-1)y^2 - hxy + x - hy = 0$$

determinando, in particolare, i punti base e le coniche spezzate del fascio. Per l'unica parabola del fascio trovare vertice, fuoco, direttrice.

E3

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

Determinare e studiare il fascio Φ di coniche che ha i punti base O , $(3,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$. Dopo aver verificato che Φ contiene una sola parabola $\mathbf{p}$, determinare il vertice, il fuoco e l'asse di simmetria di $\mathbf{p}$.

E4

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

Determinare e studiare il fascio Φ delle coniche che passano per O ed hanno ivi tangente l'asse $\vec{y}$ e passano per i punti $(1,0)$, $(1,1)$. Determinare un'equazione canonica dell'unica l'iperbole equilatera di Φ .

E5

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

Determinare e studiare il fascio Φ delle coniche che passano per O con tangente la retta $x + y = 0$ e per $P \equiv (1,1)$ con tangente la retta $x + y - 2 = 0$. Determinare le rette uscenti dal punto $(-1,-1)$ e tangenti alla circonferenza di Φ .

E6

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

Determinare l'equazione del cerchio $\mathbf{c}$ avente centro nell'origine e raggio 1 e della parabola $\mathbf{p}$ tangente in O alla retta $x + y = 0$ e passante per i punti $(1,0)$, $(0,1)$. Studiare il fascio generato da $\mathbf{c}$ e da $\mathbf{p}$. In particolare determinarne i punti base e le coniche spezzate.

E7

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

Determinare l'iperbole tangente in O all'asse $\vec{y}$, avente centro sulla retta $y = 1$ e passante per i punti impropri $(1,0,0)$, $(1,1,0)$.

E8

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u$.

Sono assegnati nel piano due punti A, B distinti. Determinare il luogo dei punti P del piano tali che

$$\overline{AP} = k\overline{BP}$$

con k parametro reale. Studiare il fascio di coniche così trovato. Determinare l'equazione canonica della generica conica di questo fascio.

E9

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u$.

Dati i punti $A \equiv (1, 1)$, $B \equiv (1, 0)$, $C \equiv (2, -2)$ determinare la circonferenza iscritta e quella circoscritta al triangolo ABC . Dopo avere trovato i centri di queste circonferenze (rispettivamente incentro e circocentro) determinare il baricentro e l'ortocentro del triangolo ABC .

E10

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u$.

Detto $\mathbf{c}$ il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 4$, sia $P \in \mathbf{c}$ il suo punto generico. Detta $\mathbf{r}$ la retta tangente a $\mathbf{c}$ in P , sia Γ la parabola che ha $\mathbf{r}$ come direttrice e fuoco nell'origine. Determinare il luogo descritto dal vertice di Γ al variare di P su $\mathbf{c}$.

E11

Dati due punti A, B su un piano fissato, determinare il luogo dei punti P del piano tali che il triangolo ABP abbia perimetro $6\overline{AB}$.

E12

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u$.

Data nel piano una parabola $\mathbf{p}$, determinare il luogo dei punti P del piano tali che le tangenti a $\mathbf{p}$ uscenti da P siano tra di loro ortogonali.

E13

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u$.

Sono assegnati una parabola $\mathbf{p}$ ed il suo fuoco F . Detto $P \in \mathbf{p}$ un punto generico, siano $\mathbf{t}$ la tangente a $\mathbf{p}$ in P ed $\mathbf{r}$ la parallela all'asse della parabola passante per P . Verificare che l'angolo acuto $\widehat{\mathbf{rt}}$ è uguale all'angolo acuto formato da $\mathbf{t}$ e da PF (il raggio riflesso passa per il fuoco).

E14

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u$.

Determinare l'iperbole Γ avete per asintoti le rette $x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$ e passante per il punto $(2, 0)$. Trovare il centro di simmetria, i vertici ed i fuochi di Γ .

E15

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u$.

Sono dati le rette $\mathbf{r} : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, $\mathbf{s} : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ ed il piano $\alpha : x - z = 0$. Determinare e studiare la quadrica Q luogo delle rette complanari con $\mathbf{r}$ e con $\mathbf{s}$ e parallele ad α .

E16

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u$.

Sono dati il punto $P \equiv (1, 1, 1)$, la retta $\mathbf{r} : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$ ed il piano $\alpha : x - y + z = 0$. Determinare la sfera S avente centro nel punto C di α che ha distanza minima da P e tangente ad $\mathbf{r}$. Determinare i piani tangenti ad S ed ortogonali ad $\mathbf{r}$.

E17

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Dato il punto $P \equiv (0, 0, 2)$ si determini il cono C generato dalle rette che passano per P e formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse $\vec{z}$. Verificare che la sezione di C col piano $z = 0$ è un cerchio. Trovare il cilindro che ha questo cerchio come direttrice ed ha vertice in $Z_\infty \equiv (0, 0, 1, 0)$.

E18

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Determinare le rette $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ del piano $x - 2y = 0$ che passano per il punto $(2, 1, 1)$ e formano con l'asse $\vec{z}$ un angolo di $\frac{\pi}{4}$. Calcolare l'angolo $\widehat{\mathbf{rs}}$.

E19

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Determinare il luogo delle rette che sono incidenti con l'asse $\vec{z}$, sono parallele al piano $x + y + z = 0$ e formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta $x + y = z - 1 = 0$.

E20

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Sono assegnati il punto $P \equiv (1, 1, 1)$ e la retta $\mathbf{r} : \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$. Determinare il luogo Q delle rette che passano per P e formano con $\mathbf{r}$ un angolo di $\frac{\pi}{6}$.

E21

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Studiare le quadriche che contengono le rette

$$\begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ t = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 = 0 \end{cases}$$

E22

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

studiare il luogo delle rette complanari con $\mathbf{r}$ e con $\mathbf{s}$ che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse $\vec{z}$.

E23

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Studiare la quadrica di equazione

$$xy - yz + x + z = 0$$

precisando la sua natura.

E24

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Trovare le equazioni della circonferenza che passa per i punti $(1, 0, -1)$, $(-3, 1, 2)$, $(-1, -1, 2)$, determinandone centro e raggio.

E25

Sono assegnate due rette sghembe, $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$. Determinare il luogo dei punti P dello spazio che sono equidistanti da $\mathbf{r}$ e da $\mathbf{s}$. Studiare la quadrica così trovata.

E26

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Sono assegnate due rette sghembe, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ ed un piano α ortogonale ad $\mathbf{r}$. Determinare e studiare la quadrica luogo delle rette incidenti ad $\mathbf{r}$ e ad $\mathbf{s}$ e parallele ad α .

E27

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Determinare e studiare le quadriche che contengono le coniche

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

E28

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Dati il punto $P \equiv (1, 1, 0)$ e la retta $\mathbf{r} : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$ determinare le equazioni della circonferenza descritta da P con una rotazione attorno ad $\mathbf{r}$.

E29

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Sono assegnati il punto $A \equiv (3, -1, 2)$ e le rette

$$\mathbf{r} : \left\{ \begin{array}{l} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{array} \right. \quad \mathbf{s} : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z + 15 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

Detta $\mathbf{t}$ la retta passante per A e perpendicolare ad $\mathbf{r}$ e ad $\mathbf{s}$, determinare la sfera che ha centro su $\mathbf{t}$ ed è tangente ad $\mathbf{r}$ e ad $\mathbf{s}$.

E30

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart.ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

Data la retta $\mathbf{r} : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$ determinare il punto P di $\mathbf{r}$ equidistante dagli assi cartesiani. Determinare la sfera avente centro su $\mathbf{r}$ e tangente agli assi ed il cono luogo delle rette che passano per P e formano con $\mathbf{r}$ un angolo il cui coseno è $\frac{1}{\sqrt{3}}$.