1. Intorni di un punto. Punti di accumulazione.

1.1. Intorni circolari.

Assumiamo come *distanza* di due numeri reali x e y il numero non negativo $|x-y|$ (che, come sappiamo, esprime la distanza tra i punti immagine dei due numeri x e y su una retta cartesiana).

Definizione 1.1. Sia $c \in \mathbb{R}$. Se r è un numero reale positivo, si chiama *intorno circolare* di c di *raggio* r, e si indica con il simbolo $I(c,r)$, l'insieme costituito dai numeri reali x la cui distanza da c è minore di r:

$$I(c,r) \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-c| < r\} \ .$$

Poichè

$$|x-c| < r \iff -r < x-c < r \iff c-r < x < c+r \ ,$$

si riconosce subito che l'insieme $I(c,r)$ non è altro che l'intervallo aperto $]c-r, c+r[$.

Si ha inoltre la seguente

Proposizione 1.1. *L'intersezione di un numero finito di intorni circolari di c è ancora un intorno circolare di c.*

Dimostrazione. Infatti, dati gli intorni circolari di c :

$$I(c,r_1),\ I(c,r_2),\ \ldots\ ,\ I(c,r_n)\ ,$$

se si indica con r^* il numero positivo

$$r^* \ = \ \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \ ,$$

si ha

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} I(c,r_k) \iff x \in I(c,r_k) \ \ \forall k = 1,\ldots,n \iff$$

$$\iff |x-c| < r_k \ \ \forall k = 1,\ldots,n \iff |x-c| < r^* \ ,$$

dunque l'intersezione

$$\bigcap_{k=1}^{n} I(c,r_k)$$

coincide con l'intorno circolare $I(c,r^*)$.

1.2. Intorni.

Definizione 1.2. Sia $c \in \mathbb{R}$. Si chiama *intorno* di c ogni sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ avente la proprietà di contenere almeno un intorno circolare di c.

Ad esempio, l'intervallo $[5,12[$ è un intorno di 7 poichè risulta

$$I(7,2) \ = \ ]7-2,7+2[\ = \ ]5,9[\ \subseteq \ [5,12[\ .$$

Invece, $[5,12[$ non è un intorno di 5 poichè, qualunque sia il raggio $r>0$, vi sono elementi di $I(5,r)$ (precisamente, i numeri dell'intervallo $]5-r,5[$) che non appartengono a $[5,12[$.

Più in generale, abbiamo che $[5,12[$ è un intorno di c se $c \in \ ]5,12[$, mentre non lo è se $c \in \mathbb{R} \setminus]5,12[$. Infatti, nel primo caso il numero

$$\min\{c-5, 12-c\}$$

è positivo e quindi, osservando che per $r>0$ si ha

$$I(c,r) \subseteq [5,12[\iff \begin{cases} c-r \geq 5 \\ c+r \leq 12 \end{cases} \iff \begin{cases} r \leq c-5 \\ r \leq 12-c \end{cases} \iff r \leq \min\{c-5, 12-c\} \ ,$$

si conclude che è possibile scegliere $r>0$ in modo che il corrispondente intorno circolare $I(c,r)$ sia contenuto in $[5,12[$. Nel secondo caso, invece, si ha $c \leq 5$ oppure $c \geq 12$ e quindi, qualunque sia il raggio $r>0$, vi sono elementi dell'intorno circolare $I(c,r)$ che non fanno parte di $[5,12[$.

Dato $c \in \mathbb{R}$, la *famiglia degli intorni* di c (cioè l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono intorni di c) si indica con il simbolo $\mathcal{U}(c)$. In altri termini, se U è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, si ha

$$U \in \mathcal{U}(c) \overset{\text{def.}}{\iff} \exists r > 0 \ : \ I(c,r) \subseteq U \ .$$

Proposizione 1.2. (Proprietà della famiglia degli intorni). *Sia $c \in \mathbb{R}$. La famiglia degli intorni $\mathcal{U}(c)$ ha le seguenti proprietà:*

1) $c \in U \quad \forall U \in \mathcal{U}(c)$;
2) $U \in \mathcal{U}(c), \ U \subseteq V \subseteq \mathbb{R} \implies V \in \mathcal{U}(c)$;
3) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(c) \implies U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{U}(c)$.

Dimostrazione. La proprietà 1) segue dalla definizione di $\mathcal{U}(c)$ e dalla ovvia constatazione che il punto c appartiene ad ogni suo intorno circolare. Anche la proprietà 2) è un'immediata conseguenza della definizione di $\mathcal{U}(c)$. Infine, per dimostrare la proprietà 3), osserviamo che, sempre per la definizione di $\mathcal{U}(c)$, in corrispondenza degli intorni $U_1, \ldots, U_n$ di c , esistono altrettanti intorni circolari $I(c,r_1), \ldots, I(c,r_n)$ tali da aversi

$$I(c,r_1) \subseteq U_1 \ , \ldots , \ I(c,r_n) \subseteq U_n$$

e quindi

$$I(c, r_1) \cap \ldots \cap I(c, r_n) \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n \ ;$$

poichè, per la Proposizione 1.1, l'insieme $I(c, r_1) \cap \ldots \cap I(c, r_n)$ è un intorno circolare di c, si conclude che l'insieme $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ è un intorno di c.

Osservazione 1.1. Osserviamo che, a differenza di quanto accade per l'intersezione di un numero finito di intorni di un punto c (proprietà 3) della precedente proposizione), l'intersezione di infiniti intorni di c non è necessariamente un intorno di c. Per convincersi di questa affermazione basta considerare l'esempio della famiglia di tutti gli intorni di c. Risulta infatti

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}(c)} U = \{c\} \ , \tag{1.1}$$

e quindi l'intersezione di tutti gli intorni $U \in \mathcal{U}(c)$ non è un intorno di c. Per dimostrare l'uguaglianza insiemistica (1.1) osserviamo che, mentre c appartiene all'intersezione di tutti gli intorni $U \in \mathcal{U}(c)$ (proprietà 1) della Proposizione 1.2), un qualunque altro punto $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$ non può essere un elemento di tale intersezione perchè vi sono intorni di c (ad esempio, gli intorni circolari $I(c, r)$ aventi raggio $r \leq |x - c|$) ai quali x non appartiene.

1.3. Punti interni, esterni, di frontiera.

Supponiamo adesso che E sia un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.3. Si dice che $c \in \mathbb{R}$ è un *punto interno* all'insieme E se $E \in \mathcal{U}(c)$ (cioè se esistono intorni circolari di c contenuti in E).

Definizione 1.4. Si dice che $c \in \mathbb{R}$ è un *punto esterno* all'insieme E se c è interno all'insieme $\mathbb{R} \setminus E$ (cioè se esistono intorni circolari di c contenuti in $\mathbb{R} \setminus E$).

Definizione 1.5. Si dice che $c \in \mathbb{R}$ è un *punto di frontiera* per l'insieme E se c non è nè interno nè esterno all'insieme E (cioè se un qualunque intorno circolare di c non è nè sottoinsieme di E nè sottoinsieme di $\mathbb{R} \setminus E$ ovvero, in maniera equivalente, se un qualunque intorno circolare di c contiene sia elementi di E che elementi di $\mathbb{R} \setminus E$).

Dalle precedenti definizioni segue subito che, dato l'insieme E, un qualunque $c \in \mathbb{R}$ rientra in una, ed una sola, delle tre categorie di punti: interni, esterni e di frontiera. Inoltre, i punti interni a E appartengono a E mentre i punti esterni non appartengono a E. Invece, un punto di frontiera per l'insieme E può appartenere a E oppure no (ciò sarà confermato dai successivi esempi).

Esempio 1.1. Consideriamo l'insieme $A = [-2, 5[\cup\{\frac{13}{2}, 9\}$.

I punti dell'intervallo $]-2, 5[$ sono interni a A. Infatti, se $c \in]-2, 5[$, tutti gli intorni circolari $I(c, r)$ aventi il raggio minore o uguale al numero positivo $\min\{c-(-2), 5-c\}$ risultano contenuti in $]-2, 5[$ e quindi in A .

I punti dell'unione di intervalli

$$]-\infty, -2[\cup]5, \tfrac{13}{2}[\cup]\tfrac{13}{2}, 9[\cup]9, +\infty[$$

sono esterni a A. Infatti, se $c \in]-\infty, -2[$, risulta $I(c, r) \subseteq]-\infty, -2[\subseteq \mathbb{R} \setminus A$ quando il raggio r è minore o uguale a $-2-c$; se $c \in]5, \frac{13}{2}[$, risulta $I(c, r) \subseteq]5, \frac{13}{2}[\subseteq \mathbb{R} \setminus A$ quando il raggio r è minore o uguale al $\min\{c-5, \frac{13}{2}-c\}$; in maniera analoga si ragiona quando c appartiene a $]\frac{13}{2}, 9[$ oppure a $]9, +\infty[$.

Infine, è facile convincersi che i punti $-2, 5, \frac{13}{2}$ e 9 sono di frontiera per A (un qualsiasi intorno circolare di uno di essi contiene sia elementi di A che elementi di $\mathbb{R}\setminus A$). Osserviamo che -2, $\frac{13}{2}$ e 9 appartengono a A, mentre 5 non è un elemento di A.

Esempio 1.2. Nel caso dell'insieme $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha, con considerazioni analoghe a quelle svolte a proposito dell'insieme A prima considerato, che ogni punto di B è interno a B, mentre 0 è un punto di frontiera per B. In questo caso non vi sono punti esterni.

Esempio 1.3. Consideriamo, adesso, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. In questo caso, tenendo presente la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (cioè: ogni intervallo di $\mathbb{R}$ contiene sia elementi di $\mathbb{Q}$ che elementi di $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$), si verifica immediatamente che ogni $c \in \mathbb{R}$ è un punto di frontiera per $\mathbb{Q}$.

Esempio 1.4. Consideriamo, infine, l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi. Ogni punto di $\mathbb{Z}$ è di frontiera per $\mathbb{Z}$ (se $c \in \mathbb{Z}$, ogni intorno circolare di c contiene, ovviamente, elementi di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ma contiene anche almeno un elemento di $\mathbb{Z}$: il punto c medesimo). Ogni punto di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è esterno a $\mathbb{Z}$; infatti, essendo

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \; = \; \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[\; ,$$

se $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{Z}$ tale che $c \in]\overline{n}, \overline{n}+1[$, e pertanto $I(c, r) \subseteq]\overline{n}, \overline{n}+1[\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ se il raggio r è minore o uguale al $\min\{c-\overline{n}, \overline{n}+1-c\}$.

1.4. Punti di accumulazione.

Definizione 1.6. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Si dice che $c \in \mathbb{R}$ è un *punto di accumulazione* per l'insieme E se ogni intorno di c contiene almeno un elemento dell'insieme E diverso da c.

In altre parole:

$$c \text{ è punto di accumulazione per } E \overset{\text{def.}}{\iff} U \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset \;\; \forall U \in \mathcal{U}(c) \; .$$

Poichè ogni intorno di c contiene un intorno circolare di c e, d'altra parte, ogni intorno circolare è un particolare intorno, è chiaro che nella precedente definizione di punto di accumulazione il ruolo degli intorni di c può essere preso dagli intorni circolari, vale a dire risulta:

$$c \text{ è punto di accumulazione per } E \iff I(c,r) \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \ .$$

Esercizio 1.1. Provare l'equivalenza

$$U \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(c) \iff I(c,r) \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \ .$$

Esempio 1.5. Riprendiamo in esame l'insieme $A = [-2, 5[\cup \{\frac{13}{2}, 9\}$, già considerato nell'Esempio 1.1.

I punti dell'intervallo chiuso $[-2, 5]$ sono di accumulazione per A; infatti, se $c \in [-2, 5]$, l'intersezione di un qualunque intorno circolare di c e dell'intervallo $[-2, 5[$ è un intervallo e pertanto ha infiniti elementi; dunque è vero che un qualunque intorno circolare di c contiene elementi di $[-2, 5[$ diversi da c (e quindi, a maggior ragione, contiene elementi di A diversi da c).

I punti appartenenti all'unione di intervalli

$$]-\infty, -2[\cup]5, \tfrac{13}{2}[\cup]\tfrac{13}{2}, 9[\cup]9, +\infty[$$

non sono di accumulazione per A; infatti, se c è uno di tali punti, allora, come abbiamo già visto, c è esterno ad A, cioè esistono intorni circolari di c che non contengono alcun punto di A.

Neanche i punti $\frac{13}{2}$ e 9 sono di accumulazione per A; infatti, gli intorni circolari $I(\frac{13}{2}, r)$ con $r \leq \frac{3}{2}$ non contengono elementi di A diversi da $\frac{13}{2}$; analogamente, gli intorni circolari $I(9, r)$ con $r \leq \frac{5}{2}$ non contengono elementi di A diversi da 9.

Esempio 1.6. Nel caso dell'insieme $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, già preso in esame nell'Esempio 1.2, si ha che ogni punto $c \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per B; infatti un qualunque intorno circolare di c contiene infiniti elementi di B e pertanto contiene elementi di $B \setminus \{c\}$.

Esempio 1.7. Con lo stesso ragionamento del precedente esempio (ricordando che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali) si ha che ogni punto $c \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per $\mathbb{R}$.

Esempio 1.8. Invece, nel caso dell'insieme $\mathbb{Z}$, non vi sono punti di accumulazione; infatti, i punti $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sono esterni (e quindi non sono di accumulazione), mentre per i punti $c \in \mathbb{Z}$ si ha $I(c, r) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{c\}) = \emptyset$ se il raggio r è minore o uguale a 1.

Come mostrato dagli esempi precedenti, un punto di accumulazione per un insieme E può appartenere a E oppure no.

Proposizione 1.3 (Caratterizzazione dei punti di accumulazione). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Si ha:*

$$c \text{ è punto di accumulazione per } E \iff \text{l'insieme } U \cap E \text{ è infinito } \forall U \in \mathcal{U}(c) \ .$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Longleftarrow$ è ovvia (ed è già stata utilizzata in occasione dei precedenti esempi).

Dimostriamo l'implicazione $\Longrightarrow$. Sia c un punto di accumulazione per E e supponiamo, per assurdo, che esista un intorno $U \in \mathcal{U}(c)$ tale che $U \cap E$ sia un insieme finito. Allora anche l'insieme $U \cap (E \setminus \{c\})$ (che, per ipotesi, non è vuoto) è finito; indichiamo con $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi di tale insieme. Fissiamo poi un raggio r minore o uguale al numero positivo

$$\min\{|x_1 - c|, \ldots, |x_n - c|\}$$

ed indichiamo con V l'intorno di c così ottenuto: $V = U \cap I(c, r)$. Si ha

$$V \cap (E \setminus \{c\}) \ \subseteq\ U \cap (E \setminus \{c\}) \ = \{x_1, \ldots, x_n\}\ ,$$

ma, d'altra parte, nessuno dei punti $x_1, \ldots, x_n$ può appartenere a $V \cap (E \setminus \{c\})$ (infatti l'ipotesi $x_i \in V \cap (E \setminus \{c\})$ implica che $x_i \in I(c, r)$ e da ciò segue la contraddizione

$$|x_i - c| \ < r \ \leq \min\{|x_1 - c|, \ldots, |x_n - c|\} \ \leq \ |x_i - c| \ ).$$

Conseguentemente, l'insieme $V \cap (E \setminus \{c\})$ è vuoto, ma ciò è assurdo perchè c è un punto di accumulazione per E.

1.5. Interno, frontiera e derivato di un insieme.

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Definizione 1.7. Si chiama *interno* di E , e si indica con il simbolo E°, l'insieme che ha come elementi tutti i punti interni a E.

Definizione 1.8. Si chiama *frontiera* di E, e si indica con il simbolo ∂E, l'insieme che ha come elementi tutti i punti di frontiera per E.

Definizione 1.9. Si chiama *derivato* di E, e si indica con il simbolo $\mathrm{D}E$, l'insieme che ha come elementi tutti i punti di accumulazione per E.

Ad esempio, se E è uno qualunque dei quattro intervalli $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$), allora $E^\circ =]a, b[$, $\partial E = \{a, b\}$ e $\mathrm{D}E = [a, b]$. Se, invece, E è uno qualunque dei due intervalli $]-\infty, b]$ e $]-\infty, b[$ ($b \in \mathbb{R}$), allora $E^\circ =]-\infty, b[$, $\partial E = \{b\}$ e $\mathrm{D}E =]-\infty\, b]$. Un analogo risultato si ha per gli intervalli $[a, +\infty[$ e $]a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$).

Definizione 1.10. Se $c \in E \setminus \mathrm{D}E$, cioè se c è un punto dell'insieme E che possiede alemeno un intorno U per cui risulta $U \cap E = \{c\}$, si dice che c è un *punto isolato* dell'insieme E.

Esempio 1.9. Per l'insieme A considerato negli Esempi 1.1 e 1.5 risulta:

$$A^\circ =]-2, 5[\ ,\quad \partial A = \{-2, 5, \frac{13}{2}, 9\}\ ,\quad \mathrm{D}A = [-2, 5]\ .$$

I punti $\frac{13}{2}$ e 9 sono punti isolati di A.

Esempio 1.10. Per l'insieme B degli Esempi 1.2 e 1.6 si ha: $B^\circ = B$, $\partial B = \{0\}$, $\mathrm{D}B = \mathbb{R}$. L'insieme B non ha punti isolati.

Esempio 1.11. Per l'insieme $\mathbb{Q}$ si ha: $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathrm{D}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. L'insieme $\mathbb{Q}$ non ha punti isolati.

Esempio 1.12. Infine, per l'insieme $\mathbb{Z}$ si ha $\mathbb{Z}^\circ = \mathrm{D}\mathbb{Z} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Questa volta ogni punto dell'insieme è un punto isolato.

Proviamo, infine, la

Proposizione 1.4. *Sia E un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Risulta:*
(i) $E^\circ \subseteq \mathrm{D}E$;
(ii) $E \setminus \mathrm{D}E \subseteq \partial E$.

Dimostrazione. (i). Sia $c \in E^\circ$, vale a dire $E \in \mathcal{U}(c)$. Per la Proposizione 1.2 (proprietà 3)), per ogni $U \in \mathcal{U}$ risulta $U \cap E \in \mathcal{U}$, dunque $U \cap E$ è un insieme infinito; pertanto (Proposizione 1.3) c è un elemento di $\mathrm{D}E$.

(ii). Sia $c \in E \setminus \mathrm{D}E$. Poichè $c \notin \mathrm{D}E$ esiste un intorno circolare $I(c, \overline{r})$ di c tale che $I(c, \overline{r}) \setminus \{c\} \subseteq \mathbb{R} \setminus E$; di conseguenza ogni intorno circolare $I(c, r)$ di c contiene sia elementi di E (il punto c) che elementi di $\mathbb{R} \setminus E$ (tutti gli elementi dell'insieme $I(c, r') \setminus \{c\}$, essendo $r' = \min\{r, \overline{r}\}$); pertanto c è un punto di frontiera per E.

Esercizio 1.2. Trovare l'interno, la frontiera ed il derivato di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: $E_1 = [0, 1[\cup ([2, 3[\cap \mathbb{Q})$, $E_2 = (]-\infty, -\sqrt{2}[\setminus \mathbb{Z}) \cup ([\sqrt{2}, +\infty[\setminus \mathbb{Q})$, $E_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, $E_4 = \{m + \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\}$.

Esercizio 1.3. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $\partial E \setminus E \subseteq \mathrm{D}E$.

Esercizio 1.4. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che $\mathrm{D}E \setminus E \subseteq \partial E$.

Esercizio 1.5. Utilizzando i risultati dei precedenti due esercizi, provare che per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ sussiste l'uguaglianza: $E \cup (\partial E) = E \cup (\mathrm{D}E)$.

Esercizio 1.6. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato superiormente e sia $L = \sup X$. Provare che: a) $L \in \partial X$; b) se l'insieme X non ha il massimo, allora $L \in \mathrm{D}X$.

Esercizio 1.7. Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$. Provare che $E^\circ \cup F^\circ \subseteq (E \cup F)^\circ$, ma che, in generale, non si ha l'uguaglianza.

Esercizio 1.8. Trovare l'interno, la frontiera ed il derivato dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$G_1 = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\} \ , \quad G_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}[\ .$$

2. Le successioni.

Le successioni sono particolari funzioni; la loro particolarità sta nel fatto che esse hanno come dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

In maniera più formale, abbiamo la seguente

Definizione 2.1. Sia A un insieme non vuoto. Si chiama *successione a valori in* A (o anche *successione di elementi di* A) una funzione definita in $\mathbb{N}$ ed a valori in A.

Se $a : \mathbb{N} \to A$ è una successione a valori in A, per indicare il corrispondente in A dell'elemento $n \in \mathbb{N}$, anzichè la notazione consueta per le funzioni, cioè $a(n)$, si preferisce adoperare il simbolo a_n (si legge "a con enne"), usando la variabile indipendente n come un indice. Inoltre, per indicare la successione stessa, si adopera o la notazione "per elenco"

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

(si elencano di seguito il corrispondente di 0, quello di 1, quello di 2, ..., quello di n ecc. ecc.) oppure la notazione abbreviata

$$\{a_n\}\ ,$$

dove la coppia di parentesi graffe racchiude il *termine generale* della successione, cioè il corrispondente in A del generico elemento n di $\mathbb{N}$.

Consideriamo alcuni esempi di successioni a valori in $\mathbb{R}$.

La successione

$$0,\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{10},\ \ldots,\ \frac{n}{n+7},\ \ldots \tag{2.1}$$

è la funzione che a 0 associa 0, a 1 associa $\frac{1}{8}$, a 2 associa $\frac{2}{9}$, a 3 associa $\frac{3}{10}$ e, in generale, al numero naturale n associa il numero reale $\frac{n}{n+7}$. La stessa successione può essere indicata con la notazione abbreviata

$$\left\{\frac{n}{n+7}\right\}\ .$$

Analogamente, la successione

$$-1,\ 0,\ \sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-1,\ \ldots,\ \sqrt{n}-1,\ \ldots \tag{2.2}$$

è la funzione che al numero $n \in \mathbb{N}$ associa il numero reale $\sqrt{n}-1$ e può essere indicata con

$$\{\sqrt{n}-1\}\ .$$

La successione

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots \tag{2.3}$$

fa corrispondere il numero reale 0 ad ogni numero naturale pari ed il numero reale 1 ad ogni numero naturale dispari. Anche questa successione può essere indicata mediante la notazione abbreviata, precisamente:

$$\left\{\frac{1-(-1)^n}{2}\right\} .$$

Nel caso della successione

$$0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ \ldots \tag{2.4}$$

il ricorso alla notazione abbreviata è un po' più complicato se si ha la pretesa di scriverne il termine generale usando un'espressione analitica unica per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ (la cosa peraltro è possibile; cfr. l'Esercizio 2.3). Un modo per aggirare l'ostacolo è quello di distinguere vari casi nella legge che esprime il termine generale della successione, dicendo che la (2.4) è la successione $\{b_n\}$ così definita:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in \{3k :\ k \in \mathbb{N}\}, \\ 1 & \text{se } n \in \{3k+1 :\ k \in \mathbb{N}\}, \\ -1 & \text{se } n \in \{3k+2 :\ k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Non sempre è agevole passare dalla notazione per elenco a quella abbreviata, o viceversa.

Ad esempio, per la successione

$$0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \ldots \tag{2.5}$$

(dove si suppone che il lettore immagini il seguito dell'elenco) l'uso della notazione abbreviata è un po' problematico.

Viceversa, nel caso delle successioni $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ di seguito definite:

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in \{1999k^2 :\ k \in \mathbb{N}\}, \\ \frac{n}{n+7} & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{1999k^2 :\ k \in \mathbb{N}\}, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$d_n = \begin{cases} \sqrt{2}+\sqrt{3} & \text{se } n \le 1999, \\ n-1 & \text{se } n > 1999 \text{ e } n \text{ è un numero primo}, \\ n^3+1 & \text{se } n > 1999 \text{ e } n \text{ non è un numero primo}, \end{cases} \tag{2.7}$$

si capisce che, volendo scriverle per elenco, si incontra qualche difficoltà.

Esercizio 2.1. Trovare il termine generale di ognuna delle seguenti successioni:
a) $0,\ \frac{1}{1001},\ \frac{2}{2001},\ \frac{3}{3001},\ \frac{4}{4001},\ \dots$;
b) $0,\ 1,\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[5]{3},\ \sqrt[6]{4},\ \dots$;
c) $-3,\ 4,\ -5,\ 6,\ -7,\ \dots$;
d) $-1,\ 0,\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{15}{17},\ \frac{12}{13},\ \frac{35}{37},\ \dots$.

Esercizio 2.2. Scrivere "per elenco" le successioni:

a) $\{n+(-1)^{7n+2}\}$, b) $\{r_n\}$, c) $\{r_{n+1}\}$ e d) $\{r_n - s_n\}$,

dove r_n è il resto della divisione $n : 3$ e s_n è il resto della divisione $n : 2$.

Esercizio 2.3. Scrivere il termine generale della successione (2.4) adoperando la stessa espressione analitica per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ (suggerimento: usare la successione c) dell'esercizio precedente oppure la funzione sen$x$).

Ritorniamo alle successioni in generale per introdurre un modo di dire che è tradizionale per le successioni e che sarà usato frequentemente nel seguito.

Supponiamo che $\{a_n\}$ sia una successione a valori nell'insieme A e che $\mathcal{P}$ sia una proprietà definita in A, intendendo dire con ciò che la proprietà $\mathcal{P}$ è tale che, per un qualunque elemento $a \in A$, la proposizione "l'elemento a ha la proprietà $\mathcal{P}$" ha un valore logico ben preciso (è vera oppure è falsa) ([1]).

Definizione 2.1. Si dice che i termini della successione $\{a_n\}$ hanno *definitivamente* la proprietà $\mathcal{P}$ se esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che tutti i termini a_n della successione, che hanno indice $n \geq \overline{n}$, godono della proprietà $\mathcal{P}$:

$$a_n \text{ ha definitivamente la proprietà } \mathcal{P} \overset{\text{def.}}{\iff} \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n \text{ ha la proprietà } \mathcal{P} \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Evidentemente, si ha:

$$a_n \text{ ha definitivamente la proprietà } \mathcal{P} \iff$$

$$\iff \text{l'insieme } \{n \in \mathbb{N} \ : a_n \text{ non ha la proprietà } \mathcal{P}\} \text{ è finito oppure vuoto.}$$

Esercizio 2.4. Provare la precedente affermazione.

Esaminiamo alcuni esempi.

La frase "i termini della successione $\{\frac{n}{n+7}\}$ sono definitivamente positivi" è corretta; infatti, prendendo $\overline{n} = 1$ (o anche $\overline{n} > 1$), è vero che $\frac{n}{n+7} > 0 \ \forall n \geq \overline{n}$. Anche "i termini della successione $\{\frac{n}{n+7}\}$ sono definitivamente maggiori di $\frac{7}{10}$" è un'affermazione corretta; infatti, se osserviamo che per $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\frac{n}{n+7} > \frac{7}{10} \iff 10n > 7(n+7) \iff 3n > 49 \iff n > \frac{49}{3} = 16,\overline{3} \ ,$$

([1]) In altre parole, $\mathcal{P}$ è la proprietà che definisce un sottoinsieme B di A e dire che un elemento $a \in A$ ha la proprietà $\mathcal{P}$ significa dire che a appartiene a B .

concludiamo che, non appena si prende $\overline{n} = 17$ (o anche $\overline{n} > 17$), è vero che $\frac{n}{n+7} > \frac{7}{10}$ $\forall n \geq \overline{n}$.

La proposizione "i termini della successione (2.3) sono definitivamente non negativi" è vera; infatti, tutti i termini di tale successione sono non negativi, quindi si può prendere come indice $\overline{n}$, a partire dal quale la proprietà è vera, un qualunque $\overline{n} \in \mathbb{N}$. Invece, la proposizione "i termini della successione (2.3) sono definitivamente positivi" è falsa; infatti, l'insieme degli indici $n \in \mathbb{N}$ per i quali la proprietà è falsa, cioè l'insieme dei numeri naturali pari, è un insieme infinito.

La proposizione "i termini della successione (2.2) sono definitivamente maggiori di $\frac{11}{2}$" è vera; infatti, risolvendo la disequazione, nell'incognita $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n} - 1 \ > \ \frac{11}{2} \ ,$$

si trova

$$\sqrt{n} - 1 > \frac{11}{2} \iff \sqrt{n} > \frac{13}{2} \iff n > \frac{169}{4} = 42,25 \ ,$$

quindi, prendendo $\overline{n} \geq 43$, risulta $\sqrt{n} - 1 \ > \ \frac{11}{2}$ $\forall n \geq \overline{n}$. È invece falsa la proposizione "i termini della successione (2.2) sono definitivamente dei numeri non interi"; infatti, l'insieme degli indici n per cui la proprietà è falsa è l'insieme infinito $\{0, \ 1, \ 4, \ 9, \ 16, \ \ldots\}$.

Esercizio 2.5. Stabilire quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali false:
a) "I termini della successione (2.1) sono definitivamente minori di $\frac{4}{5}$";
b) "I termini della successione (2.1) sono definitivamente maggiori di $\frac{47}{50}$";
c) "I termini della successione (2.6) sono definitivamente minori di $\frac{47}{50}$";
d) "I termini della successione (2.7) sono definitivamente dei numeri irrazionali";
e) "I termini della successione (2.5) sono definitivamente minori di $\frac{1}{15}$".

Un'ultima, importante, avvertenza riguardante le successioni in generale: non bisogna fare confusione tra la successione (cioè la funzione) e l'insieme che ha come elementi i termini della successione (cioè il codominio della funzione); ad esempio, una cosa è la successione (2.4), ben altra cosa è l'insieme che ha come elementi i suoi termini, cioè l'insieme finito $\{-1, \ 0, \ 1\}$.

3. Successioni convergenti.

D'ora in poi considereremo soltanto successioni a valori in $\mathbb{R}$.

In questo paragrafo il lettore inizierà a familiarizzare con uno dei concetti più importanti - forse il più importante - tra quelli che dovrà acquisire nel corso di Istituzioni di Matematiche: il concetto di limite.

3.1. Alcuni esempi.

Per un primo approccio con il concetto di limite, prendiamo in esame alcuni esempi.

Consideriamo le successioni:

$$1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; \dots \; , \tag{3.1}$$

$$1, \; -\frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; -\frac{1}{4}, \; \dots \; , \tag{3.2}$$

$$1, \; \frac{1}{200}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{400}, \; \frac{1}{5}, \; \frac{1}{600}, \; \dots \; , \tag{3.3}$$

$$1, \; 0, \; \frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{5}, \; 0, \; \dots \; , \tag{3.4}$$

e, per ognuna di esse, cerchiamo di rappresentarne i termini su una retta cartesiana. Ovviamente, possiamo disegnare soltanto un numero finito dei termini $a_0, \; a_1, \; a_2, \; \dots$ e limitarci ad immaginare il resto. Compiendo un ulteriore, piccolo sforzo di immaginazione, pensiamo che il disegno sia un cartone animato, nel quale ad ogni istante si illumini un ben preciso punto della retta cartesiana: dapprima quello che rappresenta a_0, poi quello che rappresenta a_1, poi quello che rappresenta a_2 ecc. ecc. Vediamo allora che all'aumentare dell'indice $n \in \mathbb{N}$ (la variabile indipendente, che stiamo supponendo indichi lo scorrere del tempo) il numero a_n (la variabile dipendente) "si muove" sulla retta cartesiana. Naturalmente, la sensazione di movimento del numero a_n, che si ricava in questo modo, è diversa da esempio a esempio. Tuttavia, la disposizione che nel nostro disegno hanno i primi termini della successione (quelli che siamo riusciti a raffigurare) e la disposizione che, seguendo la nostra intuizione, immaginiamo per i termini successivi ci suggeriscono che in ognuno dei quattro esempi, anche se con modalità diverse, il numero a_n, al crescere di n, ha la tendenza ad essere vicino al numero zero (naturalmente pensiamo di assumere come distanza di due numeri reali x e y il numero non negativo $|x-y|$). Vicino, ma quanto? Una breve riflessione, basata questa volta su qualche semplice calcolo, mostra che la risposta a questa domanda è "Vicino quanto si vuole". Ci accorgiamo infatti che le quattro successioni (3.1) - (3.4) sono accomunate dall'avere la seguente proprietà: *comunque si prefissi un numero positivo* ε (il valore al di sotto del quale vogliamo che scenda la distanza tra a_n e 0) *i termini della successione* $\{a_n\}$ *sono tali che la loro distanza dal numero zero* (cioè $|a_n - 0| = |a_n|$) *è definitivamente minore di* ε*;* in altri termini si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; |a_n| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \overline{n} \; . \tag{3.5}$$

Verifichiamo che la successione (3.1), vale a dire la successione $\{\frac{1}{n+1}\}$, ha la proprietà (3.5). Infatti, fissato comunque il numero $\varepsilon > 0$, risolvendo la disequazione (nell'incognita $n \in \mathbb{N}$) $|a_n| < \varepsilon$, otteniamo

$$|a_n| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \ ;$$

di conseguenza, se prendiamo come indice $\overline{n}$ un qualunque numero naturale maggiore del numero reale $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, è vero che

$$|a_n| < \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Anche la successione (3.2) ha la proprietà (3.5). Infatti il termine generale della successione (3.2) è $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ ed il suo valore assoluto è dato da $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$, pertanto, qualunque sia $\varepsilon > 0$, la disequazione $|a_n| < \varepsilon$ è esattamente la stessa di quella che abbiamo già considerato e risolto nel caso della successione (3.1), constatando che essa è definitivamente soddisfatta.

Esaminiamo adesso la successione (3.3). Il suo termine generale può essere scritto nel modo seguente:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{1}{100(n+1)} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$, si ha che:

se n è pari allora $\quad |a_n| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$,

se n è dispari allora $\quad |a_n| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{100\varepsilon} - 1$;

essendo $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > \frac{1}{100\varepsilon} - 1$, concludiamo che, se $\overline{n}$ è un qualunque numero naturale maggiore di $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, la disuguaglianza $|a_n| < \varepsilon$ è verificata per ogni indice $n \geq \overline{n}$, pari o dispari che sia.

Esercizio 3.1. Verificare che anche la successione (3.4) ha la proprietà (3.5).

Esercizio 3.2. Portare l'esempio di una la successione che non ha la proprietà (3.5).

Quando una successione $\{a_n\}$ ha la proprietà (3.5), si dice che *la successione* $\{a_n\}$ *è convergente a zero* ovvero che *il limite della successione* $\{a_n\}$*, per* n *che tende a infinito, è uguale a zero.*

3.2. La definizione di limite.

È chiaro che possiamo generalizzare la proprietà espressa dalla (3.5) in una maniera molto semplice: anzichè considerare le distanze dei termini della successione dal numero zero, consideriamo le loro distanze da un qualsiasi numero reale a. Perveniamo in questo modo al concetto di successione convergente ad un numero $a \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.1. Si dice che *la successione* $\{a_n\}$ *è convergente al numero* $a \in \mathbb{R}$, o che *il limite della successione* $\{a_n\}$*, per* n *che tende a infinito, è il numero* a, se accade che, comunque si assegni un numero $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza $|a_n - a| < \varepsilon$ è definitivamente vera.

In altri termini, dire che la successione $\{a_n\}$ è convergente al numero a significa dire che la $\{a_n\}$ gode della seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \overline{n} \; . \tag{3.6}$$

Per indicare che la successione $\{a_n\}$ è convergente ad a si adopera la notazione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(si legge: "il limite di a con enne, per enne che tende a infinito, è uguale ad a").

Esempio 3.1. Considerata la successione $\{\frac{n}{n+7}\}$, facciamo vedere che risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+7} = 1 \; .$$

Bisogna provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; \left| \frac{n}{n+7} - 1 \right| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \overline{n} \; . \tag{3.7}$$

A tale scopo, fissato il numero $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione, nell'incognita $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{n}{n+7} - 1 \right| < \varepsilon \; .$$

Otteniamo

$$\left| \frac{n}{n+7} - 1 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{n-n-7}{n+7} \right| < \varepsilon \iff \frac{7}{n+7} < \varepsilon \iff \frac{n+7}{7} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{7}{\varepsilon} - 7 \; ,$$

quindi, se come indice $\overline{n}$ prendiamo un qualunque numero naturale maggiore di $\frac{7}{\varepsilon} - 7$, è vero che

$$\left| \frac{n}{n+7} - 1 \right| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \overline{n} \; .$$

Essendo pervenuti a questa conclusione per qualunque scelta del numero $\varepsilon > 0$, abbiamo dimostrato la validità della (3.7).

Esempio 3.2. Verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5-2n} = -\frac{3}{2} \; .$$

Occorre provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; \left| \frac{3n-1}{5-2n} - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \overline{n} \; . \tag{3.8}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione, nell'incognita $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{3n-1}{5-2n} - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| < \varepsilon \ . \tag{3.9}$$

Otteniamo:

$$\left| \frac{3n-1}{5-2n} - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{3n-1}{5-2n} + \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \left| \frac{2(3n-1)+3(5-2n)}{2(5-2n)} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{13}{2(5-2n)} \right| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \frac{13}{2|5-2n|} < \varepsilon \iff |5-2n| > \frac{13}{2\varepsilon} \iff$$
$$\iff 5-2n < -\frac{13}{2\varepsilon} \ \text{ oppure } \ 5-2n > \frac{13}{2\varepsilon} \iff$$
$$\iff n > \frac{5}{2} + \frac{13}{4\varepsilon} \ \text{ oppure } \ n < \frac{5}{2} - \frac{13}{4\varepsilon} \ .$$

In particolare, abbiamo trovato che tutti i numeri naturali maggiori di

$$\frac{5}{2} + \frac{13}{4\varepsilon}$$

sono soluzioni della (3.9); pertanto, per dimostrare la validità della (3.8), basta prendere $\overline{n} \in \mathbb{N}$ in modo che

$$\overline{n} > \frac{5}{2} + \frac{13}{4\varepsilon} \ .$$

Esempio 3.3. Verifichiamo che, se $a \in]0,1[$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \ .$$

La (3.6) in questo caso si scrive:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ |a^n| < \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{3.10}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ si ha:

$$|a^n| < \varepsilon \iff a^n < \varepsilon \iff a^n < a^{\log_a \varepsilon} \iff$$

(poichè la base degli esponenziali è compresa tra 0 e 1)

$$\iff n > \log_a \varepsilon \ ,$$

dunque per confermare la validità della (3.10) basta prendere l'indice $\overline{n}$ in modo che $\overline{n} > \log_a \varepsilon$.

Osservazione 3.1. Talora è utile scrivere la (3.6) nella forma equivalente

$$(3.6') \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Consideriamo, in proposito, il successivo esempio.

Esempio 3.4. Verifichiamo che

$$\lim_{n \to \infty} 2^{\frac{1}{n+1}} = 1 \ .$$

La (3.6′) in questo caso diventa

$$(3.11) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ 1 - \varepsilon < 2^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Osserviamo che, fissato $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza

$$1 - \varepsilon < 2^{\frac{1}{n+1}}$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ dato che $2^{\frac{1}{n+1}} > 2^0 = 1$, mentre per quanto riguarda l'altra disequazione

$$2^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \varepsilon$$

si ha

$$2^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \varepsilon \iff 2^{\frac{1}{n+1}} < 2^{\log_2(1+\varepsilon)} \iff \frac{1}{n+1} < \log_2(1+\varepsilon) \iff$$

(tenendo presente che primo e secondo membro sono entrambi positivi)

$$\iff n + 1 > \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)} \iff n > -1 + \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)} \ ;$$

pertanto, scelto $\overline{n} \in \mathbb{N}$ in modo che

$$\overline{n} > -1 + \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)} \ ,$$

risulta

$$1 - \varepsilon < 2^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ;$$

ciò prova la (3.11).

Osservazione 3.2. Un'altra formulazione equivalente della (3.6) è

$$(3.6'') \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in I(a, \varepsilon) \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

La proprietà espressa dalla (3.6′′) può essere enunciata così : "Comunque si consideri un intorno circolare $I(a, \varepsilon)$ di a, i termini della successione $\{a_n\}$ appartengono definitivamente a tale intorno." Poichè gli intorni circolari di a sono particolari intorni di a e, d'altra parte, ogni intorno contiene un intorno circolare, si riconosce facilmente che, a sua volta, la (3.6$''$) (e quindi la (3.6)) è equivalente a:

$$\text{(3.6}'''\text{)} \qquad \forall U \in \mathcal{U}(a) \ \ \exists \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U \ \ \forall n \geq \overline{\overline{n}}$$

(cioè: "Comunque si consideri un intorno U di a, i termini della successione $\{a_n\}$ appartengono definitivamente ad U.")

Esercizio 3.3. Provare l'equivalenza tra la (3.6$''$) e la (3.6$'''$).

Esempio 3.5. Se $\{a_n\}$ è la successione costante

$$a, \ a, \ a, \ \dots, \ a, \ \dots \ ,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ .$$

Infatti, per ogni $U \in \mathcal{U}(a)$ si ha $a_n = a \in U \ \forall n \in \mathbb{N}$, dunque è vera la (3.6$'''$).

Esempio 3.6. La successione $\{(-1)^n\}$, cioè

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \ ,$$

non è convergente.

Infatti, qualunque sia il numero reale a, se si considera un suo intorno circolare $I(a, \varepsilon)$ avente raggio $\varepsilon \leq 1$, si ha che tale intorno non può contenere entrambi i numeri 1 e -1 (in caso contrario, dato che la distanza tra i due numeri 1 e -1 è minore o uguale alla somma delle loro distanze dal numero a ([2]), si otterrebbe $2 \leq |1 - a| + |-1 - a| < 2\varepsilon$, da cui la contraddizione $\varepsilon > 1$); di conseguenza, per un siffatto intorno, l'affermazione "$(-1)^n \in I(a, \varepsilon)$ definitivamente" è falsa.

Esercizio 3.4. Provare che la successione (2.3) non è convergente.

Esercizio 3.5. Provare che la successione $\{x_n\}$ così definita:

$$x_n = \begin{cases} 500n & \text{se } n \leq 500, \\ 22 & \text{se } n > 500, \end{cases}$$

è convergente.

([2]) Dati $x, y, z \in \mathbb{R}$, si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \ ,$$

quindi

$$|x - y| \leq |x - z| + |y - z| \ ,$$

cioè la *distanza tra i due numeri x e y è minore o uguale alla somma delle loro distanze dal numero z.*

Esercizio 3.6. Provare che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{8n+3}} = \frac{1}{2} \; .$$

Esercizio 3.7. Provare che
$$\lim_{n\to\infty} \log_5 \left(25 + \frac{1}{2^n}\right) = 2 \; .$$

Esercizio 3.8. Provare che una successione nella quale infiniti termini sono uguali a 1 non può convergere ad un numero diverso da 1.

Esercizio 3.9. Provare che la successione $\{y_n\}$ così definita:
$$x_n = \begin{cases} \frac{n}{n+7} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$
è convergente.

4. Successioni divergenti.

4.1. La definizione di limite.

Nel n. 3.1, aiutandoci un po' con la fantasia, abbiamo dato un'interpretazione, di tipo "dinamico", della successione $\{a_n\}$, secondo la quale il numero a_n indica la posizione occupata all'istante $n \in \mathbb{N}$ da un punto che si muove lungo una retta cartesiana. In quest'ordine di idee, il concetto di successione convergente descrive in termini rigorosi il comportamento di un punto mobile che, al crescere del tempo $n \in \mathbb{N}$, tende ad avvicinarsi, di quanto si vuole, ad una data posizione: quella indicata dal valore del limite.

Naturalmente, quello sopra considerato non è l'unico comportamento che è possibile immaginare per un punto mobile. Un'altra situazione, alla quale è spontaneo pensare, è quella in cui il punto tende ad allontanarsi di quanto si vuole, a "scappare", in una delle due direzioni della retta cartesiana, ad esempio in quella positiva. Tale circostanza può essere espressa con parole più precise nel seguente modo: comunque venga prefissata una posizione sulla retta (la "soglia di allontanamento"), rappresentata da un numero positivo k, accade che definitivamente la posizione del punto mobile è al di là di tale soglia, cioè $a_n > k$.

Quello che abbiamo in questo modo formulato è il concetto di successione divergente positivamente. In maniera analoga, considerando la direzione negativa della retta cartesiana anzichè quella positiva, si perviene alla nozione di successione divergente negativamente.

In maniera più formale, abbiamo le seguenti definizioni.

Definizione 4.1. Si dice che *la successione* $\{a_n\}$ *è divergente positivamente*, o che *il limite della successione* $\{a_n\}$*, per n che tende a infinito, è uguale a più infinito*, se accade che, comunque si assegni un numero $k > 0$, la disuguaglianza $a_n > k$ è definitivamente vera:

$$\forall k > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; a_n > k \;\; \forall n \geq \overline{n} \; . \tag{4.1}$$

Per indicare che la successione $\{a_n\}$ è divergente positivamente si adopera la notazione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad .$$

Definizione 4.2. Si dice che *la successione* $\{a_n\}$ *è divergente negativamente*, o che *il limite della successione* $\{a_n\}$*, per* n *che tende a infinito, è uguale a meno infinito*, se accade che, comunque si assegni un numero $k > 0$, la disuguaglianza $a_n < -k$ è definitivamente vera:

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n < -k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{4.2}$$

Per indicare che la successione $\{a_n\}$ è divergente negativamente si adopera la notazione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad .$$

Osservazione 4.1. È facile constatare che una formulazione equivalente della condizione (4.1) è

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n > a \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ . \tag{4.1$'$}$$

Analogamente, la (4.2) equivale a

$$\forall b \in \mathbb{R} \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n < b \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ . \tag{4.2$'$}$$

Esercizio 4.1. Provare le equivalenze:

$$(4.1) \iff (4.1') \ , \ \ (4.2) \iff (4.2') \ .$$

Esempio 4.1. Ognuna delle tre successioni:

$$0, \ 1, \ 4, \ 9, \ 16, \ 25, \ldots \ , \tag{4.3}$$

$$10, \ 9, \ 30, \ 29, \ 50, \ 49, \ldots \ , \tag{4.4}$$

$$0, \ 100, \ 2, \ 300, \ 4, \ 500, \ \ldots \tag{4.5}$$

è divergente positivamente.

Infatti, per quanto riguarda la successione (4.3), vale a dire la successione $\{n^2\}$, abbiamo che, fissato $k > 0$, risulta

$$a_n > k \iff n^2 > k \iff n > \sqrt{k} \quad ,$$

pertanto, per provare la validità della (4.1), basta prendere come $\overline{n}$ un qualunque numero naturale maggiore di $\sqrt{k}$.

Il termine generale della successione (4.4) può essere scritto nel modo seguente:

$$a_n = \begin{cases} 10(n+1) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 10n-1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

quindi, fissato $k > 0$, si ha che:

se n è pari allora $\quad a_n > k \iff n > \frac{k-10}{10}$,

se n è dispari allora $\quad a_n > k \iff n > \frac{k+1}{10}$;

pertanto, osservando che $\frac{k+1}{10} > \frac{k-10}{10}$, possiamo concludere che, se $\overline{n}$ è un qualunque numero naturale maggiore di $\frac{k+1}{10}$, la disuguaglianza $a_n > k$ è verificata per ogni indice $n \geq \overline{n}$, pari o dispari che sia.

Un ragionamento analogo al precedente dimostra che anche la successione (4.5) è divergente positivamente.

Esercizio 4.2. Provare che la successione (4.5) diverge positivamente.

Lo studente compirà a questo punto un interessante esperimento cercando di visualizzare il movimento delle tre precedenti successioni (naturalmente si pensa alla interpretazione dinamica). In questo modo si renderà conto che le tre successioni, sebbene abbiano in comune la proprietà che a_n tende ad allontanarsi di quanto si vuole nella direzione positiva della retta cartesiana, presentano d'altra parte delle caratteristiche di tipo diverso: nella (4.3) il punto a_n si muove sempre nella stessa direzione con velocità crescente; nella (4.4) accade che a_n compie, alternativamente, un balzo avanti ed un passetto indietro; infine, nella (4.5), si ha la sensazione di un convoglio formato da due parti che viaggiano a velocità diverse. Tutto ciò serve ad avere ben chiaro che il fatto che $\{a_n\}$ diverga positivamente significa quello che è detto nella (4.1) e null'altro.

Esempio 4.2. Verifichiamo che, se $a \in]1, +\infty[$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty \ .$$

La (4.1) in questo caso si scrive:

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a^n > k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{4.6}$$

Fissato $k > 0$ si ha:

$$a^n > k \iff a^n > a^{\log_a k} \iff$$

(essendo la base degli esponenziali maggiore di 1)

$$\iff n > \log_a k \ ,$$

dunque per confermare la validità della (4.6) basta prendere l'indice $\overline{n}$ in modo che $\overline{n} > \log_a k$.

Esempio 4.3. Verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}}(3n+5) = -\infty \ .$$

Occorre provare che

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ \log_{\frac{1}{2}}(3n+5) < -k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{4.7}$$

Fissato $k > 0$, risolviamo la disequazione, nell'incognita $n \in \mathbb{N}$,

$$\log_{\frac{1}{2}}(3n+5) < -k \ ;$$

otteniamo:

$$\log_{\frac{1}{2}}(3n+5) < -k \iff \log_{\frac{1}{2}}(3n+5) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \iff$$

(tenendo presente che la base dei logaritmi è minore di 1)

$$\iff 3n+5 > \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \iff n > \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} - 5}{3} \ ,$$

dunque, per confermare la validità della (4.7), basta prendere l'indice $\overline{n}$ in modo che $\overline{n} > \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}-5}{3}$.

Esempio 4.3. La successione $\{(-1)^n\}$ non è divergente (nè positivamente nè negativamente).

Infatti, fissato $k > 0$, si ha che nessuna delle due diseguaglianze $(-1)^n > k$ e $(-1)^n < -k$ è definitivamente verificata (la prima è falsa se n è dispari, la seconda se n è pari).

Esempio 4.5. Dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty}(1999n^2 - 2000n + 2001) = +\infty \ .$$

Occorrre provare che

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ 1999n^2 - 2000n + 2001 > k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{4.8}$$

Fissato $k > 0$, consideriamo la disequazione, nell'incognita $n \in \mathbb{N}$,

$$1999n^2 - 2000n + 2001 > k \ ,$$

cioè

$$1999n^2 - 2000n + 2001 - k > 0 \ , \tag{4.9}$$

e, senza risolverla, ragioniamo nel seguente modo: indicato con Δ il discriminante del trinomio $1999x^2 - 2000x + 2001 - k$, distinguiamo le tre possibilità: a)$\Delta < 0$, b)$\Delta = 0$ e c)$\Delta > 0$;

a) in questo caso tutti i numeri $n \in \mathbb{N}$ sono soluzioni della (4.9), quindi, per verificare la (4.8), possiamo prendere come indice $\overline{n}$ un qualunque numero naturale;

b) in questo caso l'equazione, nell'incognita $x \in \mathbb{R}$,

$$1999x^2 - 2000x + 2001 - k = 0 \tag{4.10}$$

ha un'unica soluzione $\overline{x}$ e quindi l'insieme delle soluzioni della (4.9) è $\mathbb{N}\setminus\{\overline{x}\}$; di conseguenza come indice $\overline{n}$ possiamo prendere un qualunque numero naturale se $\overline{x} \notin \mathbb{N}$, ovvero un qualsiasi numero naturale maggiore di $\overline{x}$ se $\overline{x} \in \mathbb{N}$;

c) in quest'ultimo caso la (4.10) ha due soluzioni reali e ci si convince subito che come indice $\overline{n}$ va bene un qualunque numero naturale maggiore della più grande delle due radici.

Esercizio 4.3. Verificare che

$$\lim_{n\to\infty} (-4^n + 2^n + 1) = -\infty \ .$$

Esercizio 4.4. Verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n^2+1}{n}} = +\infty \ .$$

Esercizio 4.5. Provare che

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{(3n-5)^{11}} = +\infty \quad , \quad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{(5-3n)^{11}} = -\infty \ .$$

4.2. Intorni di $+\infty$ e di $-\infty$.

Così come si è fatto per le successioni convergenti (cfr. l'Osservazione 3.2), anche il concetto di successione divergente può essere espresso mediante il "linguaggio degli intorni". Occorre però prima definire che cosa si intende per intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.

Definizione 4.3. Si chiama *intorno di* $+\infty$ ogni sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ avente la proprietà di contenere un intervallo del tipo $]a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$).

Ad esempio, gli insiemi $]-1, 3] \cup \{\frac{7}{2}, 10\} \cup [12, +\infty[$ e $\mathbb{R} \setminus \{100\}$ sono intorni di $+\infty$, mentre $]-\infty, 1000]$ e $\mathbb{Q}$ non lo sono.

Indichiamo con $\mathcal{U}(+\infty)$ la famiglia degli intorni di $+\infty$.

Riprendiamo la condizione (4.1′) (equivalente alla (4.1)) e osserviamo che essa può essere riscritta come segue:

$$(4.1'') \qquad \forall a \in \mathbb{R} \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in]a, +\infty[\ \ \forall n \geq \tilde{n} \ .$$

Poichè ogni insieme $U \in \mathcal{U}(+\infty)$ contiene un intervallo del tipo $]a, +\infty[$ e, viceversa, ogni intervallo del tipo $]a, +\infty[$ è un elemento della famiglia $\mathcal{U}(+\infty)$, è facile riconoscere che la condizione (4.1″) (e quindi la (4.1)) è equivalente a

$$(4.1''') \qquad \forall U \in \mathcal{U}(+\infty) \ \ \exists \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U \ \ \forall n \geq \overline{\overline{n}}$$

(cioè: "Comunque si consideri un intorno U di $+\infty$, i termini della successione $\{a_n\}$ appartengono definitivamente ad U.")

Esercizio 4.6. Provare l'equivalenza tra la (4.1″) e la (4.1‴).

In questo modo, tramite la (4.1‴), anche la nozione di successione divergente a $+\infty$ è stata formulata adoperando il linguaggio degli intorni; ma c'è di più che la (4.1‴) è formalmente identica, a parte che per il nome del limite, alla (3.6‴); questo ci permetterà di "unificare" la definizione di limite di una successione, mettendo insieme il caso delle successioni convergenti con quello delle successioni divergenti (ciò sarà fatto nel successivo n. 5.1).

Le considerazioni sopra svolte a proposito delle successioni divergenti a $+\infty$ si estendono nella maniera più ovvia al caso delle successioni divergenti negativamente. Precisamente, introdotta la definizione di intorno di $-\infty$:

Definizione 4.4. Si chiama *intorno di* $-\infty$ ogni sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ avente la proprietà di contenere un intervallo del tipo $]-\infty, b[$ $(b \in \mathbb{R})$.

e denotata, anche in questo caso, con $\mathcal{U}(-\infty)$ la famiglia degli intorni di $-\infty$, si verifica, ragionando esattamente come prima, che una successione $\{a_n\}$ è divergente a $-\infty$ se e soltanto se è verificata la condizione

$$(4.2''') \qquad \forall U \in \mathcal{U}(-\infty) \ \ \exists \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U \ \ \forall n \geq \overline{\overline{n}} \ ,$$

anche questa formalmente identica alla (3.6‴).

Esercizio 4.7. Provare l'equivalenza:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad (4.2''') \ .$$

Proposizione 4.1. (Proprietà della famiglia degli intorni di $+\infty$ e di $-\infty$). *Sia* $c = +\infty$ *oppure* $c = -\infty$. *La famiglia degli intorni* $\mathcal{U}(c)$ *ha le seguenti proprietà:*

a) $U \in \mathcal{U}(c), \ U \subseteq V \subseteq \mathbb{R} \implies V \in \mathcal{U}(c)$ *;*

b) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(c) \implies U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{U}(c)$ *.*

Dimostrazione. La proprietà a) è ovvia. Dimostriamo la b). Supponiamo, per fissare le idee, che sia $c = +\infty$. Se $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(+\infty)$ esistono $a_1, \ldots, a_n$ tali che

$$U_1 \supseteq]a_1, +\infty[, \ldots, U_n \supseteq]a_n, +\infty[\ ;$$

indicato con a il $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$, risulta

$$U_1 \cap \ldots \cap U_n \supseteq]a_1, +\infty[\cap \ldots \cap]a_n, +\infty[=]a, +\infty[\ ,$$

pertanto anche $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ è un intorno di $+\infty$.

A differenza del caso $c \in \mathbb{R}$ (Proposizione 1.2) adesso non vale più la proprietà "$c \in U \ \forall U \in \mathcal{U}(c)$". Il motivo è ovvio: mentre gli intorni di $+\infty$ e di $-\infty$ sono, per definizione, sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali, i due simboli $+\infty$ e $-\infty$ non sono elementi di $\mathbb{R}$.

4.3. L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$. Punti di accumulazione in $\overline{\mathbb{R}}$.

Introduciamo adesso alcune convenzioni, riguardanti la terminologia ed il simbolismo, che consentiranno nel seguito una semplificazione dell'esposizione.

Spesso dovremo considerare l'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, che si ottiene aggiungendo all'insieme dei numeri reali i due elementi $-\infty$ e $+\infty$; indicheremo tale insieme con $\overline{\mathbb{R}}$.

Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, scriveremo $\sup A = +\infty$ [risp. $\inf A = -\infty$] per indicare il fatto che l'insieme A non è limitato superiormente [risp. non è limitato inferiormente]. Si ha la seguente proposizione:

Proposizione 4.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sono fatti equivalenti:*

i) $\sup A = +\infty$ *;*

ii) $U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}(+\infty)$ (cioè: *ogni intorno di $+\infty$ contiene almeno un elemento di A);*

iii) *$U \cap A$ è un insieme infinito* $\forall U \in \mathcal{U}(+\infty)$ (cioè: *ogni intorno di $+\infty$ contiene infiniti elementi di A*).

Dimostrazione. i) $\Rightarrow$ ii). Sia $U \in \mathcal{U}(+\infty)$; ciò vuol dire U è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Poichè $\sup A = +\infty$, il numero reale a non è maggiorante di A, dunque esiste $x \in A$ tale che $x > a$. Evidentemente si ha $x \in U \cap A$, pertanto $U \cap A \neq \emptyset$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Sia $U \in \mathcal{U}(+\infty)$. Per ipotesi l'insieme $U \cap A$ non è vuoto. Supponiamo, per assurdo, che $U \cap A$ sia un insieme finito; esiste allora il $\max(U \cap A)$. Posto $M = \max(U \cap A)$, si ottiene la seguente contraddizione: da una parte si ha $]M, +\infty[\in \mathcal{U}(+\infty)$, quindi anche $]M, +\infty[\cap U \in \mathcal{U}(+\infty)$, pertanto, per l'ipotesi ii), l'insieme $(]M, +\infty[\cap U) \cap A$ non è vuoto; d'altra parte, per la definizione di M, è chiaro che

$$(]M, +\infty[\cap U) \cap A =]M, +\infty[\cap (U \cap A) = \emptyset \ .$$

iii) $\Rightarrow$ i). Sia t un qualunque numero reale. Poichè $]t,+\infty[\in \mathcal{U}(+\infty)$, dall'ipotesi iii) segue, in particolare, che $]t,+\infty[\cap A \neq \emptyset$, cioè esiste $x \in A$ tale che $x > t$; in altri termini: t non è un maggiorante di A. Per l'arbitrarietà di $t \in \mathbb{R}$ concludiamo che $\sup A = +\infty$.

Analogamente si dimostra la

Proposizione 4.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sono fatti equivalenti:*
j) $\inf A = -\infty$ *;*
jj) $U \cap A \neq \emptyset$ $\forall U \in \mathcal{U}(-\infty)$*;*
jjj) $U \cap A$ *è un insieme infinito* $\forall U \in \mathcal{U}(-\infty)$*.*

Le precedenti proposizioni giustificano la seguente terminologia: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$; si dice che $+\infty$ *è un punto di accumulazione per l'insieme* A se $\sup A = +\infty$; analogamente, si dice che $-\infty$ *è un punto di accumulazione per l'insieme* A se $\inf A = -\infty$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Abbiamo chiamato derivato di A, e lo abbiamo denotato con DA, l'insieme

$$DA = \{y \in \mathbb{R} : y \text{ è un punto di accumulazione per } A\} .$$

Per analogia chiameremo *derivato di A in $\overline{\mathbb{R}}$*, e lo indicheremo con $\overline{D}A$, l'insieme

$$\overline{D}A = \{z \in \overline{\mathbb{R}} : z \ \text{ è un punto di accumulazione per } A\} .$$

Ad esempio, si ha: $D]0,+\infty[=[0,+\infty[$, mentre $\overline{D}]0,+\infty[=[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$; $D\mathbb{Z} = \emptyset$, mentre $\overline{D}\mathbb{Z} = \{-\infty,+\infty\}$.

Esercizio 4.8. Quali sono gli insiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ tali che $DA = \overline{D}A$?

5. Successioni regolari.

5.1. La definizione generale di limite.

Come abbiamo già anticipato nel corso del precedente paragrafo, le tre condizioni (3.6$'''$), (4.1$'''$) e (4.2$'''$), che esprimono, rispettivamente, la convergenza di una successione, la divergenza a $+\infty$ e la divergenza a $-\infty$ mediante il linguaggio degli intorni, sono formalmente identiche; esse possono pertanto essere compendiate in un'unica condizione. Precisamente, si ha la seguente proposizione.

Proposizione 5.1. *Sia $\{a_n\}$ una successione e sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè il limite della successione $\{a_n\}$ sia uguale a L è che:*

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists n^* \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U \ \ \forall n \geq n^* . \tag{5.1}$$

La condizione (5.1) può quindi essere considerata la definizione generale di limite di una successione.

5.2. Successioni regolari e successioni oscillanti.

Le successioni dotate di limite, cioè le successioni che sono convergenti oppure divergenti, vengono dette *successioni regolari.*

È naturale porsi la domanda: "È vero che una qualunque successione è regolare?"
La risposta è "No." Infatti la successione $\{(-1)^n\}$ non è nè convergente (Esempio 3.6) nè divergente (Esempio 4.4).

Le successioni che non hanno limite prendono il nome di *successioni oscillanti.*

5.3. Unicità del limite.

Un'altra domanda che viene spontaneo porsi, subito dopo avere introdotto la nozione di limite di una successione, è: "Quanti limiti può avere una successione regolare?" La risposta, come asserisce il successivo Teorema 5.1 e come, d'altra parte, si poteva prevedere avendo in mente l'interpretazione dinamica della successione, è: "Uno solo."

Teorema 5.1. (Teorema di unicità del limite). *Sia* $\{a_n\}$ *una successione e supponiamo che risulti:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L_2 \ ,$$

essendo L_1, L_2 *elementi di* $\overline{\mathbb{R}}$. *Allora* $L_1 = L_2$.

Premettiamo un lemma alla dimostrazione del Teorema 5.1.

Lemma 5.1. *Due elementi distinti di* $\overline{\mathbb{R}}$ *possiedono intorni disgiunti.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che se è $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $L_1 \neq L_2$, allora esistono $U_1 \in \mathcal{U}(L_1)$, $U_2 \in \mathcal{U}(L_2)$ tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Vi sono quattro possibilità:

1) L_1 e L_2 appartengono entrambi a $\mathbb{R}$; in questo caso, denotata con d la distanza tra L_1 e L_2, cioè $d = |L_1 - L_2|$, basta considerare, come U_1 e U_2, due intorni circolari, di L_1 e di L_2 rispettivamente, aventi raggio $r \leq \frac{d}{2}$;

2) uno degli elementi, ad es. L_1, appartiene a $\mathbb{R}$ e l'altro è uguale a $+\infty$; in questo caso basta prendere come U_1 un qualunque intorno circolare $I(L_1, r)$ di L_1 e come U_2 l'intervallo $]L_1 + r, +\infty[$;

3) uno degli elementi, ad es. L_1, appartiene a $\mathbb{R}$ e l'altro è uguale a $-\infty$; basta considerare $U_1 = I(L_1, r)$ e $U_2 =]-\infty, L_1 - r[$;

4) $L_1 = -\infty$ e $L_2 = +\infty$; prendiamo $U_1 =]-\infty, a[$ e $U_2 =]a, +\infty[$, essendo a un qualsiasi numero reale.

Dimostrazione del Teorema 5.1. Per ipotesi la successione $\{a_n\}$ ha il limite L_1, cioè:

$$\forall U_1 \in \mathcal{U}(L_1) \ \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U_1 \ \ \forall n \geq n_1 \ , \tag{5.2}$$

ed anche il limite L_2, vale a dire:

$$\forall U_2 \in \mathcal{U}(L_2) \ \ \exists n_2 \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U_2 \ \ \forall n \geq n_2 \ ; \tag{5.3}$$

dalla (5.2) e dalla (5.3), indicando con $\overline{n}$ il maggiore dei due indici n_1 e n_2, otteniamo che per ogni indice $n \geq \overline{n}$ sono vere entrambe le affermazioni: $a_n \in U_1$ e $a_n \in U_2$, cioè è vero che $a_n \in U_1 \cap U_2$. In definitiva possiamo asserire che

$$\forall U_1 \in \mathcal{U}(L_1), \ \forall U_2 \in \mathcal{U}(L_2) \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U_1 \cap U_2 \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ;$$

ciò, in particolare, implica che

$$\forall U_1 \in \mathcal{U}(L_1), \ \forall U_2 \in \mathcal{U}(L_2) \quad \Longrightarrow \quad U_1 \cap U_2 \ \neq \emptyset \ ,$$

ma questo, tenuto conto del precedente lemma, è possibile solo se $L_1 = L_2$.

Osservazione 5.1. Nel corso della precedente dimostrazione abbiamo sostanzialmente utilizzato, oltre alla proprietà espressa dal Lemma 5.1, il fatto che se una successione $\{a_n\}$ ha definitivamente la proprietà $\mathcal{P}_1$ ed ha anche definitivamente la proprietà $\mathcal{P}_2$, allora essa ha definitivamente la proprietà "$\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$" (infatti se a_n ha la proprietà $\mathcal{P}_1$ per $n \geq n_1$ e la proprietà $\mathcal{P}_2$ per $n \geq n_2$, allora a_n ha la proprietà "$\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$" per $n \geq \overline{n}$, essendo $\overline{n}$ il $\max\{n_1, n_2\}$). Analogamente si ha che, se la la successione $\{a_n\}$ ha definitivamente la proprietà $\mathcal{P}$ e la successione $\{b_n\}$ ha definitivamente la proprietà $\mathcal{Q}$, allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che l'affermazione "a_n ha la proprietà $\mathcal{P}$ e b_n ha la proprietà $\mathcal{Q}$" è vera per ogni indice $n \geq \overline{n}$. Tale genere di considerazioni sarà alla base di molte delle dimostrazioni che verranno svolte in seguito.

5.4. Generalizzazione del concetto di successione.

Abbiamo sin qui chiamato successione una funzione avente come dominio l'insieme dei numeri naturali. È però possibile - ed anche conveniente per motivi pratici - generalizzare tale definizione, assumendo che il dominio possa essere un sottoinsieme M di $\mathbb{N}$, purchè a tale insieme M appartengano tutti i numeri naturali da un certo posto in poi.

Definizione 5.1. Sia A un insieme non vuoto. Si chiama *successione a valori in A* una funzione definita in un insieme $M \subseteq \mathbb{N}$ ed a valori nell'insieme A, il cui dominio M ha la proprietà che:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\} \subseteq M \ .$$

Sono, ad esempio, successioni secondo questa accezione più generale, $\{\frac{1}{n^2 - 9}\}$ (che ha come dominio $\mathbb{N} \setminus \{3\}$), $\{\sqrt{3n - 25}\}$ (che ha come dominio $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 9\}$) e $\{\log_2(n^2 - 7n + 10)\}$ (il cui dominio è $\mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$).

Tutto quello che è stato detto sinora per le successioni (secondo la Definizione 2.1) continua a valere, fatte le ovvie modifiche, anche quando si adotta la Definizione 5.1. Ad esempio, la definizione di successione convergente, cioè la (3.6), diventa:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \in M, \; n \geq \overline{n} \; .$$

Nei paragrafi seguenti, per semplicità, limiteremo l'esposizione (a meno che non si dica esplicitamente il contrario) alle successioni definite in tutto $\mathbb{N}$. Avvertiamo però che quanto verrà detto per le successioni definite in $\mathbb{N}$ conserva la sua validità nel caso generale.

Terminiamo questo numero con lo studio di due successioni notevoli che hanno come dominio l'insieme $\mathbb{N}^+$.

Esempio 5.1. (La successione $\{n^p\}$).
Fissato il numero $p \in \mathbb{R}$ studiamo il comportamento al limite della successione $\{n^p\}$ (il dominio M di $\{n^p\}$ è tutto $\mathbb{N}$ oppure $\mathbb{N}^+$, secondo che l'esponente p appartenga a $\mathbb{N}^+$ oppure no). Si hanno tre casi.
Se $p > 0$ la successione $\{n^p\}$ è divergente a $+\infty$. Occorre provare che

$$\forall k > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; n^p > k \;\; \forall n \in M, \; n \geq \overline{n} \; . \tag{5.4}$$

Fissato $k > 0$, risolviamo la disequazione (nell'incognita $n \in M$) $n^p > k$. Osserviamo che da $n^p > k$ segue (tenendo presente che la funzione potenza $x^{\frac{1}{p}}$ è fortemente crescente in $]0, +\infty[$) $(n^p)^{\frac{1}{p}} > k^{\frac{1}{p}}$ cioè $n > k^{\frac{1}{p}}$; viceversa, da $n > k^{\frac{1}{p}}$ segue (dato che x^p è fortemente crescente in $]0, +\infty[$) $n^p > (k^{\frac{1}{p}})^p$, cioè $n^p > k$. In conclusione abbiamo che

$$n^p > k \iff n > k^{\frac{1}{p}} \; ,$$

quindi per verificare la (5.4) basta prendere come indice $\overline{n}$ un qualunque numero naturale maggiore di $k^{\frac{1}{p}}$.
Se $p = 0$ la successione $\{n^p\}$ è una successione costante, di termine generale uguale a 1, quindi (Esempio 3.5) essa è convergente a 1.
Se $p < 0$ la successione $\{n^p\}$ è convergente a zero. Dobbiamo provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \;\; |n^p| < \varepsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N}^+, \; n \geq \overline{n} \; . \tag{5.5}$$

Questa volta le funzioni $x^{\frac{1}{p}}$ e x^p sono fortemente decrescenti in $]0, +\infty[$, quindi, fissato $\varepsilon > 0$, si ha (con ragionamento analogo a quello svolto nel caso $p > 0$)

$$|n^p| < \varepsilon \iff n^p < \varepsilon \iff n > \varepsilon^{\frac{1}{p}} \; .$$

In conclusione, per verificare la (5.5), basta prendere $\overline{n} > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$.
Ricapitolando, la successione $\{n^p\}$ è regolare per ogni valore di $p \in \mathbb{R}$ e risulta

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 0, \\ 1 & \text{se } p = 0, \\ 0 & \text{se } p < 0. \end{cases}$$

Esempio 5.2. (La successione $\{\log_a n\}$).

Fissato $a \in]0, +\infty[$, $a \neq 1$, studiamo la successione $\{\log_a n\}$. Si hanno i seguenti risultati:

$$\lim_{n\to\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Eseguiamo la verifica nel caso $0 < a < 1$. Bisogna provare che:

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ \log_a n < -k \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+, \ n \geq \overline{n} \ .$$

Fissato $k > 0$, abbiamo

$$\log_a n < -k \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a n < \log_a a^{-k} \quad \Longleftrightarrow \quad n > a^{-k} \ ,$$

quindi è sufficiente prendere $\overline{n} > a^{-k}$.

6. Primi teoremi sulle successioni.

6.1. Il teorema della permanenza del segno.

Prolunghiamo la relazione d'ordine (ordinamento aritmetico), considerata nell'insieme dei numeri reali, all'insieme $\overline{\mathbb{R}}$, assumendo per convenzione che $-\infty < c$ e $c < +\infty$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ e che $-\infty < +\infty$.

Teorema 6.1. (Teorema della permanenza del segno). *Se $\{a_n\}$ è una successsione regolare, il cui limite L ($L \in \overline{\mathbb{R}}$) è diverso da zero, i termini della successione hanno definitivamente lo stesso segno di L.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che se è $L > 0$ [risp. $L < 0$], allora si ha definitivamente $a_n > 0$ [risp. $a_n < 0$]. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $L > 0$, cioè L o è un numero reale positivo oppure è uguale a $+\infty$; in ogni caso l'intervallo $]0, +\infty[$ è un intorno di L, pertanto, per la (5.1), risulta definitivamente $a_n \in]0, +\infty[$, che è quanto dovevamo provare.

6.2. I teoremi del confronto.

I teoremi del confronto consentono di avere informazioni sul limite di una successione, conoscendo il limite di altre successioni con le quali quella che è oggetto di studio si "confronta", cioè è legata per mezzo di disuguaglianze.

Teorema 6.2. (Il teorema "dei carabinieri"). *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni verificanti la catena di disuguaglianze*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{6.1}$$

Supponiamo che le due successioni $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ (i due carabinieri) *siano convergenti ad uno stesso numero reale a. Allora anche la successione $\{b_n\}$ è convergente ad a.*

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, cioè

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_1 \in \mathbb{N} \;:\;\; a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \;\; \forall n \geq n_1 \;, \tag{6.2}$$

e che $\lim_{n\to\infty} c_n = a$, vale a dire

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_2 \in \mathbb{N} \;:\;\; a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \;\; \forall n \geq n_2 \;. \tag{6.3}$$

Dalla (6.2) e dalla (6.3), posto $\overline{n} = \max\{n_1, n_2\}$, segue che per ogni indice $n \geq \overline{n}$ sono vere entrambe le catene di disuguaglianze

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \;, \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$$

e quindi, tenuto conto della (6.1), è vero che

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \;,$$

da cui, in particolare,

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \;.$$

In definitiva, abbiamo verificato che

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\overline{n} \in \mathbb{N} \;:\;\; a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \;\; \forall n \geq \overline{n} \;,$$

ma ciò è proprio quello che dovevamo dimostrare: $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Esempio 6.1. Cerchiamo il limite della successione $\{u_n\}$ definita nel modo che segue:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ è un multiplo di 5,} \\ \dfrac{1}{3^n} & \text{se } n \text{ non è un multiplo di 5.} \end{cases}$$

Essendo $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^n} \; \forall n \in \mathbb{N}$, possiamo affermare che

$$\frac{1}{3^n} \leq u_n \leq \frac{1}{2^n} \; \forall n \in \mathbb{N} \;;$$

d'altra parte (Esempio 3.3) si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \;, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \;;$$

il teorema dei carabinieri ci permette allora di concludere che si ha pure

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \;.$$

Esercizio 6.1. Risolvere l'Esercizio 3.9 con l'aiuto del Teorema 6.2.

Teorema 6.3. (Teorema del confronto; caso della divergenza a $+\infty$). *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni verificanti la disuguaglianza*

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{6.4}$$

Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ *sia divergente a* $+\infty$*. Allora anche la successione* $\{b_n\}$ *è divergente a* $+\infty$*.*

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, cioè

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n > k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{6.5}$$

Dalla (6.5), ricordando la (6.4), segue che per ogni $n \geq \overline{n}$ è vero che $b_n \geq a_n > k$ e quindi $b_n > k$. In conclusione, abbiamo che

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ b_n > k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ,$$

cioè la tesi: $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

In maniera perfettamente analoga si dimostra il

Teorema 6.4. (Teorema del confronto; caso della divergenza a $-\infty$). *Siano* $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *due successioni verificanti la disuguaglianza*

$$b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{6.6}$$

Supponiamo che la successione $\{c_n\}$ *sia divergente a* $-\infty$*. Allora anche la successione* $\{b_n\}$ *è divergente a* $-\infty$*.*

Esercizio 6.2. Trovare il limite della successione $\{v_n\}$ definita nel modo seguente:

$$v_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ è un multiplo di 5,} \\ 3^n & \text{se } n \text{ non è un multiplo di 5.} \end{cases}$$

Osservazione 6.1. I tre teoremi di confronto continuano a valere anche se si suppone che le disuguaglianze contenute nelle (6.1), (6.4) e (6.6) siano verificate non per ogni $n \in \mathbb{N}$ ma solo definitivamente; le dimostrazioni, in questo caso più generale, sono sostanzialmente le stesse.

Esercizio 6.3. Provare che il teorema dei carabinieri continua a valere anche quando l'ipotesi (6.1) è sostituita da

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \leq b_n \leq c_n \ \ \forall n \geq n_0 \ . \tag{6.1'}$$

Nello spirito dell'Osservazione 6.1 si ha anche la seguente

Proposizione 6.1. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni verificanti la condizione che $a_n = b_n$ definitivamente. Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia regolare. Allora anche la successione $\{b_n\}$ è regolare ed ha lo stesso limite di $\{a_n\}$.*

Esercizio 6.4. Dimostrare la Proposizione 6.1.

Esercizio 6.5. Risolvere l'Esercizio 3.5 con l'aiuto della precedente proposizione.

6.3. Funzioni reali limitate.

Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ sia una funzione a valori reali. È consuetudine adoperare la seguente terminologia.

Si dice che *la funzione f è limitata* (*inferiormente, superiormente*) se il suo codominio $f(A)$ (sottoinsieme di $\mathbb{R}$) è limitato (inferiormente, superiormente).

Se la funzione f è limitata inferiormente [risp. superiormente], l'estremo inferiore [risp. superiore] dell'insieme $f(A)$ viene chiamato anche *estremo inferiore* [risp. *superiore*] *della funzione* f e viene indicato, oltre che con $\inf f(A)$ [risp. $\sup f(A)$], con uno dei due simboli

$$\inf_A f \quad \text{oppure} \quad \inf_{x\in A} f(x) \qquad [\text{risp.} \quad \sup_A f \quad \text{oppure} \quad \sup_{x\in A} f(x)\ ]\ .$$

Se l'estremo inferiore [risp. superiore] dell'insieme $f(A)$ è anche minimo [risp. massimo], si dice che esso è il *minimo* [risp. *massimo*] della funzione f e lo si denota, oltre che con $\min f(A)$ [risp. $\max f(A)$], con uno dei due simboli

$$\min_A f \quad \text{oppure} \quad \min_{x\in A} f(x) \qquad [\text{risp.} \quad \max_A f \quad \text{oppure} \quad \max_{x\in A} f(x)\ ]\ .$$

Talvolta, parlando del minimo o del massimo di una funzione, si dice anche *minimo assoluto* o *massimo assoluto*; ciò serve per evitare la confusione con un'altra nozione (quella di minimo o di massimo relativo), di cui dovremo occuparci in seguito.

Per comodità dello studente richiamiamo in maniera esplicita alcuni dei precedenti concetti.

Dire che la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è limitata inferiormente significa dire che

$$\exists h \in \mathbb{R} \ :\ \ h \le f(x) \ \ \forall x \in A \ ;$$

dire che il numero l è l'estremo inferiore della funzione f vuol dire che esso ha le due proprietà:

$$\text{i)} \ \ f(x) \ge l \ \ \forall x \in A \ ; \ \ \text{ii)} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{x} \in A \ :\ f(\overline{x}) < l + \varepsilon \ ;$$

infine, dire che la funzione f è dotata di minimo significa dire che

$$\exists x^* \in A \ :\ \ f(x^*) \le f(x) \ \ \forall x \in A \ ;$$

in questo caso si ha

$$f(x^*) = \min_A f \ .$$

6.4. Successioni regolari e successioni limitate.

Per le successioni, in quanto funzioni a valori reali, si applica la nomenclatura introdotta nel numero precedente. Ad esempio, dire che la successione $\{a_n\}$ è limitata significa dire che è limitato l'insieme (sottoinsieme di $\mathbb{R}$) $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, cioè che

$$\exists b, c \in \mathbb{R} \ : \quad b \leq a_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{6.7}$$

Non bisogna quindi fare confusione tra i due concetti di "successione limitata" e "successione dotata di limite".

I teoremi che seguono mettono a confronto la regolarità di una successione (nei tre casi: convergenza, divergenza a $+\infty$ e divergenza a $-\infty$) con la sua limitatezza (superiore, inferiore).

Teorema 6.5. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione. Supponiamo che sia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \ .$$

Dobbiamo dimostrare che vale la (6.7). Dalla definizione di limite abbiamo che, in corrispondenza del numero positivo $\varepsilon = 1$, esiste un indice $\overline{n}$ tale che

$$a - 1 < a_n < a + 1 \quad \forall n \geq \overline{n} \ , \tag{6.8}$$

dunque i numeri $a - 1$ e $a + 1$ sono, rispettivamente, un minorante ed un maggiorante dell'insieme

$$\{a_{\overline{n}}, a_{\overline{n}+1}, a_{\overline{n}+2}, \ldots\} \ . \tag{6.9}$$

Se l'indice $\overline{n}$, che abbiamo così determinato, è uguale a zero, l'insieme (6.9) coincide con il codominio della successione $\{a_n\}$ e quindi $\{a_n\}$ è limitata. Se, invece, è $\overline{n} \geq 1$, per dimostrare la validità della (6.7) possiamo prendere

$$b = \min\{a - 1, a_0, \ldots, a_{\overline{n}-1}\} \ , \quad c = \max\{a + 1, a_0, \ldots, a_{\overline{n}-1}\}$$

(l'esistenza del minimo e del massimo è assicurata dal fatto che gli insiemi che stiamo considerando:

$$B = \{a - 1, a_0, \ldots, a_{\overline{n}-1}\} \ , \quad C = \{a + 1, a_0, \ldots, a_{\overline{n}-1}\}$$

sono insiemi finiti); infatti, con tale scelta di b e c, preso un qualunque $n \in \mathbb{N}$, si ha che:

se $n < \overline{n}$ allora $b \leq a_n$ (poichè $b = \min B$ e $a_n \in B$);
se $n \geq \overline{n}$ allora $b \leq a - 1 < a_n$ (poichè $b = \min B$, $a - 1 \in B$ e per la (6.8));
quindi, in ogni caso , $b \leq a_n$; analogamente si verifica che $a_n \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 6.2. Il Teorema 6.5 può essere enunciato schematicamente come segue:

$$\{a_n\} \text{ è convergente } \implies \{a_n\} \text{ è limitata .}$$

Osserviamo che la precedente implicazione non può essere rovesciata, cioè vi sono successioni che, pur essendo limitate, non sono convergenti. Ad esempio, la successione $\{(-1)^n\}$ è, ovviamente, limitata (-1 e 1 sono, rispettivamente, il minimo ed il massimo della successione), ma, come abbiamo già visto (n. 5.2), non è dotata di limite.

Teorema 6.6. *Ogni successione divergente positivamente è limitata inferiormente e non limitata superiormente.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ una successione divergente positivamente. Dalla definizione di limite segue che, in corrispondenza del numero positivo $k = 1$, esiste un indice $\overline{n}$ tale che

$$a_n > 1 \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ,$$

dunque 1 è un minorante dell'insieme (6.8). A questo punto, per ottenere un minorante b dell'intera successione $\{a_n\}$, basta ragionare come nel teorema precedente e prendere $b = 1$ nel caso in cui $\overline{n} = 0$, ovvero

$$b = \min\{1, a_0, \ldots, a_{\overline{n}-1}\}$$

se $\overline{n} \geq 1$. Abbiamo così dimostrato che $\{a_n\}$ è limitata inferiormente. Per provare che, invece, la successione $\{a_n\}$ non è limitata superiormente basta osservare che, per la definizione di limite, nessun numero reale a può essere un maggiorante di tale successione (si tenga presente la (4.1′)).

In maniera del tutto analoga si dimostra il

Teorema 6.7. *Ogni successione divergente negativamente è limitata superiormente e non limitata inferiormente.*

Osservazione 6.3. Neanche le implicazioni contenute nei Teoremi 6.6 e 6.7, e cioè, rispettivamente,

$$\{a_n\} \text{ è divergente a } +\infty \implies \{a_n\} \text{ è limitata inferiormente ma non superiormente ,}$$

$$\{a_n\} \text{ è divergente a } -\infty \implies \{a_n\} \text{ è limitata superiormente ma non inferiormente ,}$$

possono essere invertite. Ad esempio, la successione

$$0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ \ldots \tag{6.10}$$

ha come codominio tutto $\mathbb{N}$ e dunque è limitata inferiormente ma non superiormente; essa però, come si riconosce immediatamente in base alla definizione di limite, non è divergente a $+\infty$.

Esercizio 6.6. Provare che la successione (6.10) (e, più in generale, ogni successione che è limitata inferiormente ma non superiormente e non è divergente a $+\infty$) non ha limite.

Esercizio 6.7. Portare l'esempio di una successione $\{a_n\}$ tale che

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty \ , \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty \quad .$$

Una successione siffatta può essere regolare?

7. Le successioni monotone.

7.1. Successioni monotone.

Poichè le successioni sono delle funzioni reali di variabile reale, tutte le nozioni che abbiamo introdotto quando abbiamo parlato di funzioni monotone (ricordiamo che si pronunzia "monotòne") possono essere riferite, in particolare, alle successioni.

Pertanto, dire che la successione $\{a_n\}$ è *crescente* vuol dire che

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 < n_2 \implies a_{n_1} \leq a_{n_2}$$

(in particolare, la successione $\{a_n\}$ è *fortemente crescente* se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 < n_2 \implies a_{n_1} < a_{n_2} \quad) \ ;$$

dire che la successione $\{a_n\}$ è *decrescente* vuol dire che

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 < n_2 \implies a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

(in particolare, $\{a_n\}$ è *fortemente decrescente* se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 < n_2 \implies a_{n_1} > a_{n_2} \quad) \ ;$$

dire che la successione $\{a_n\}$ è *monotona* vuol dire che essa è crescente oppure decrescente.

Osservazione 7.1. Tutte le condizioni che definiscono i vari tipi di monotonia per le successioni possono essere formulate, anzichè tramite il confronto tra due qualsiasi termini della successione, mediante il confronto tra due qualsiasi termini consecutivi. Ad esempio, nel caso delle successioni crescenti, si ha che la condizione

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 < n_2 \implies a_{n_1} \leq a_{n_2} \tag{7.1}$$

è perfettamente equivalente a

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{7.2}$$

Infatti, se è vera la (7.1), allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo $n < n+1$, risulta $a_n \leq a_{n+1}$, dunque è vera la (7.2); viceversa, se è vera la (7.2), allora, per ogni $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, con $n_1 < n_2$, si ha

$$a_{n_1} \leq a_{n_1+1} \leq \ldots \leq a_{n_2-1} \leq a_{n_2} \ ,$$

dunque è vera la (7.1).

Osservazione 7.2. Se la successione $\{a_n\}$ è crescente, è chiaro che essa è limitata inferiormente (infatti $a_0 \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dunque a_0 è un minorante, anzi il minimo, della successione; invece, $\{a_n\}$ può essere limitata superiormente oppure no (ad es., le due successioni $\{-\frac{1}{n+1}\}$ e $\{n\}$ sono entrambe fortemente crescenti, ma la prima è limitata superiormente, mentre la seconda non lo è). Analogamente, una successione decrescente è sempre limitata superiormente, anzi dotata di massimo (il primo termine), ma può essere limitata inferiormente oppure no.

Esercizio 7.1. Portare l'esempio di una successione non monotona.

Esercizio 7.2. Portare l'esempio di una successione $\{a_n\}$ avente i seguenti requisiti: 1) $\{a_n\}$ è crescente, 2) $\{a_n\}$ non è fortemente crescente e 3) $\{a_n\}$ non è limitata superiormente.

7.2. Regolarità delle successioni monotone.

Teorema 7.1. (Il teorema sulle successioni crescenti). *Se la successione $\{a_n\}$ è crescente, essa è regolare e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \ .$$

Prima di passare alla dimostrazione, conviene osservare che, in maniera più esplicita, il Teorema 7.1 può essere enunciato nel modo seguente:

"*Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia crescente. Se $\{a_n\}$ è limitata superiormente, allora essa è convergente al numero*

$$L = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \ ;$$

se, invece, $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, allora essa è divergente a $+\infty$."

Dimostrazione del Teorema 7.1.

1º caso: la successione $\{a_n\}$ è limitata superiormente. Dobbiamo dimostrare che si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{7.3}$$

Teniamo presente che il numero L ha le due proprietà caratteristiche dell'estremo superiore:

$$\text{i)}\ \ a_n \leq L \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ \ \text{ii)}\ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n^* \in \mathbb{N} \ : \ a_{n^*} > L - \varepsilon \ .$$

Dalla i) segue subito che la disuguaglianza $a_n < L + \varepsilon$ è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$; dalla ii) e dal fatto che la successione $\{a_n\}$ è crescente otteniamo che per ogni indice $n \geq n^*$ risulta

$$a_n \geq a_{n^*} > L - \varepsilon \ ;$$

in definitiva, abbiamo che

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \ \ \forall n \geq n^* \ ,$$

dunque, per verificare la (7.3), basta prendere l'indice $\overline{n}$ in modo che $\overline{n} \geq n^*$.

2º caso: la successione $\{a_n\}$ non è limitata superiormente. Dobbiamo provare che:

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n > k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{7.4}$$

Fissato il numero $k > 0$, poichè $\{a_n\}$ non è limitata superiormente possiamo asserire che il numero k non è un maggiorante della successione $\{a_n\}$, quindi c'è almeno un termine della successione, diciamolo a_{n^*}, tale che $a_{n^*} > k$; tenuto conto che $\{a_n\}$ è crescente, otteniamo

$$a_n \geq a_{n^*} > k \ \ \forall n \geq n^* \ ,$$

sicchè, per verificare la (7.4), basta prendere un qualunque indice $\overline{n} \geq n^*$.

La dimostrazione del teorema riguardante le successioni decrescenti è del tutto analoga ed è lasciata per esercizio allo studente.

Teorema 7.2. (Il teorema sulle successioni decrescenti). *Se la successione $\{a_n\}$ è decrescente, essa è regolare e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \ .$$

Esercizio 7.3. Dimostrare il Teorema 7.2.

I Teoremi 7.1 e 7.2 ci consentono di affermare che:

"*Ogni successione monotona è regolare, e, precisamente, è convergente se è limitata, divergente in caso contrario* ."

7.3. Il numero e.

Cosideriamo la successione (definita in $\mathbb{N}^+$)

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\} \ .$$

Si dimostrano (noi omettiamo la dimostrazione) i seguenti fatti:
- la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è fortemente crescente;
- la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è limitata superiormente.

Il numero

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ,$$

che, per il Teorema 7.1, è anche il limite della successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, si chiama *numero di Nepero* e si indica con e:

$$e \overset{\text{def.}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Si dimostra che il numero e è un numero irrazionale compreso tra 2 e 3; un valore approssimato per difetto di e a meno di $\frac{1}{10^{15}}$ è

$$2,718281828459045 .$$

I logaritmi in base e vengono detti *logaritmi naturali* o *neperiani*. Per indicare il logaritmo naturale del numero x si scrive, brevemente, $\log x$ anzichè $\log_e x$.

Segnaliamo che spesso, specialmente nella letteratura tecnica, si scrive $\ln x$ in luogo di $\log x$, $\exp(x)$ invece di e^x e si denota il logaritmo in base 10 con $\operatorname{Log} x$; noi non faremo uso di questi simboli.

8. Limiti ed operazioni aritmetiche.

Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, è possibile costruire altre successioni a partire da quelle assegnate adoperando le operazioni aritmetiche. Ad esempio, si può considerare la successione $\{a_n+b_n\}$, cioè la successione in cui il corrispondente di un numero $n \in \mathbb{N}$ è la somma dei corrispondenti di n nelle due successioni di partenza; tale successione viene chiamata la *successione somma* delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Analogamente si possono considerare la *successione prodotto* $\{a_nb_n\}$ e, nell'ipotesi che sia $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (o, per lo meno, $b_n \neq 0$ definitivamente), la *successione rapporto*

$$\{\frac{a_n}{b_n}\} .$$

In questo paragrafo vengono esposti alcuni teoremi che consentono di dedurre dalla regolarità delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, e dalla conoscenza dei loro limiti, informazioni sulla regolarità e sul limite della successione somma, della successione prodotto e della successione rapporto.

8.1. Teoremi sul limite della successione somma.

Esaminiamo dapprima il caso in cui le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono entrambe convergenti.

Teorema 8.1. *Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono convergenti, allora anche la successione $\{a_n + b_n\}$ è convergente ed ha come limite la somma dei due limiti delle successioni date.*

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \ , \ \lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \ ;$$

dobbiamo provare che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \ .$$

In termini più espliciti, le ipotesi sono:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n}_1 \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n}_1 \ , \tag{8.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n}_2 \in \mathbb{N} \ : \ |b_n - b| < \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n}_2 \ , \tag{8.2}$$

mentre la tesi è:

$$\forall \eta > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ |(a_n + b_n) - (a + b)| < \eta \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{8.3}$$

Osserviamo che dalla (8.1) e dalla (8.2), ponendo $\tilde{n} = \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$, otteniamo che le disuguaglianze

$$|a_n - a| < \varepsilon \ , \ |b_n - b| < \varepsilon$$

sono entrambe verificate per ogni indice $n \geq \tilde{n}$; di conseguenza, ricordando la disuguaglianza triangolare, abbiamo che per ogni $n \geq \tilde{n}$ risulta:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \ .$$

Ricapitolando, le ipotesi (8.1) e (8.2) implicano che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ |(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ . \tag{8.4}$$

A questo punto è facile verificare la (8.3). Basta ragionare nel modo seguente: fissato un qualunque $\eta > 0$, si determina un numero $\varepsilon > 0$ in modo che $2\varepsilon \leq \eta$ (ciò è possibile; infatti, le condizioni che debbono essere soddisfatte da ε equivalgono alla richiesta che ε appartenga all'intervallo $]0, \frac{\eta}{2}]$); in corrispondenza di tale numero ε esiste, per la (8.4), un indice $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon \ \forall n \geq \tilde{n}$; allora, se si prende come indice $\overline{n}$ un qualunque numero naturale maggiore o uguale di $\tilde{n}$, è chiaro che risulta

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \eta \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Ciò completa la dimostrazione.

Passiamo adesso al caso in cui una successione è convergente e l'altra è divergente.

Teorema 8.2. *Se la successione* $\{a_n\}$ *è convergente e la successione* $\{b_n\}$ *è divergente a* $+\infty$ [risp. $-\infty$] *, allora la successione* $\{a_n + b_n\}$ *è divergente a* $+\infty$ [risp. $-\infty$].

Dimostrazione. Indichiamo con a ($a \in \mathbb{R}$) il limite della successione $\{a_n\}$ e supponiamo, per fissare le idee, che la successione $\{b_n\}$ sia divergente positivamente. Dobbiamo dimostrare che anche la successione $\{a_n + b_n\}$ diverge positivamente. Al solito, cominciamo con l'esplicitare le ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n}_1 \in \mathbb{N} \ : \ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n}_1 \ , \tag{8.5}$$

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n}_2 \in \mathbb{N} \ : \ b_n > k \ \ \forall n \geq \overline{n}_2 \ , \tag{8.6}$$

e la tesi:

$$\forall h > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n + b_n > h \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{8.7}$$

Dalle ipotesi (8.5) e (8.6), ponendo $\tilde{n} = \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$, otteniamo che le disuguaglianze

$$a_n > a - \varepsilon \ , \ b_n > k$$

sono entrambe soddisfatte per ogni $n \geq \tilde{n}$; pertanto anche la disuguaglianza

$$a_n + b_n > a - \varepsilon + k$$

(ottenuta dalle precedenti due sommandole membro a membro) è verificata per ogni indice $n \geq \tilde{n}$. Riepilogando, dalle (8.5) e (8.6) abbiamo dedotto che

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \forall k > 0 \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n + b_n > a - \varepsilon + k \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ . \tag{8.8}$$

Verifichiamo adesso la (8.7). Fissato un qualunque numero $h > 0$, scegliamo i numeri $\varepsilon, k > 0$ in modo che $a - \varepsilon + k > h$ (ciò è possibile: basta fissare arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e quindi prendere $k > 0$ tale che $k > h - a + \varepsilon$); in corrispondenza dei numeri ε e k così determinati esiste, per la (8.8), un indice $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n + b_n > a - \varepsilon + k \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ ;$$

a questo punto è chiaro che per ottenere la (8.7) basta prendere come indice $\overline{n}$ un qualunque numero naturale maggiore o uguale di $\tilde{n}$.

Esercizio 8.1. Dimostrare la seguente generalizzazione del teorema della permanenza del segno:

"Sia $\{a_n\}$ *una successione regolare:* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$*, e sia* $t \in \mathbb{R}$*. Supponiamo che il limite* L *sia maggiore* [risp. *minore*] *del numero* t*. Allora i termini della successione* $\{a_n\}$ *sono definitivamente maggiori* [risp. *minori*] *di* t*."*

(Suggerimento: si consideri la successione $\{a_n - t\}$.)

Consideriamo infine il caso in cui le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono entrambe divergenti, ma nello stesso modo.

Teorema 8.3. *Se le successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono entrambe divergenti a* $+\infty$ [risp. $-\infty$], *allora anche la successione* $\{a_n + b_n\}$ *è divergente a* $+\infty$ [risp. $-\infty$].

Dimostrazione. Supponiamo, per esempio, che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano entrambe divergenti negativamente, cioè:

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n}_1 \in \mathbb{N} \ : \ a_n < -k \ \ \forall n \geq \overline{n}_1 \ , \tag{8.9}$$

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n}_2 \in \mathbb{N} \ : \ b_n < -k \ \ \forall n \geq \overline{n}_2 \ , \tag{8.10}$$

e dimostriamo che anche la successione somma è divergente negativamente, vale a dire:

$$\forall h > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n + b_n < -h \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{8.11}$$

Dalle ipotesi (8.9) e (8.10), con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte per la dimostrazione dei precedenti teoremi, si deduce che

$$\forall k > 0 \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n + b_n < -2k \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ . \tag{8.12}$$

Allora, per dimostrare la tesi, cioè la (8.11), basta ragionare nel solito modo: fissato comunque $h > 0$, scegliamo $k > 0$ in modo che $-2k \leq -h$ (cioè prendiamo $k \geq \frac{h}{2}$); per la (8.12) esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n + b_n < -2k \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ ;$$

pertanto, se si prende come indice $\overline{n}$ un qualunque numero naturale maggiore o uguale a $\tilde{n}$, risulta

$$a_n + b_n < -h \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Il teorema è così dimostrato.

Possiamo riassumere il contenuto dei Teoremi 8.1-8.3 nel modo seguente ($a_n \to L$ sta ad indicare che $\lim_{n\to\infty} a_n = L$):

$$\begin{array}{lll}
a_n \to a \in \mathbb{R} \ , & b_n \to b \in \mathbb{R} & \Longrightarrow \quad a_n + b_n \to a + b \ ; \\
a_n \to a \in \mathbb{R} \ , & b_n \to +\infty & \Longrightarrow \quad a_n + b_n \to +\infty \ ; \\
a_n \to a \in \mathbb{R} \ , & b_n \to -\infty & \Longrightarrow \quad a_n + b_n \to -\infty \ ; \\
a_n \to +\infty \ , & b_n \to +\infty & \Longrightarrow \quad a_n + b_n \to +\infty \ ; \\
a_n \to -\infty \ , & b_n \to -\infty & \Longrightarrow \quad a_n + b_n \to -\infty \ .
\end{array}$$

Come il lettore avrà già osservato, nei precedenti teoremi non viene preso in considerazione il caso in cui una delle due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ diverge positivamente mentre l'altra diverge negativamente. Il motivo di ciò è che *dalle sole ipotesi* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \to -\infty$

(o viceversa) *non è possibile dedurre alcuna informazione in merito al limite della successione somma*; infatti, come mostrano i successivi Esempi 8.1, con le ipotesi $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$ è compatibile qualunque tipo di comportamento al limite della successione $\{a_n + b_n\}$ ($\{a_n + b_n\}$ può convergere, può divergere positivamente o negativamente e può anche essere oscillante). Si suole esprimere sinteticamente questo fatto dicendo che $(+\infty) + (-\infty)$, o, come tradizionalmente si scrive, $+\infty - \infty$, è una *forma indeterminata.*

Negli esempi che seguono utilizzeremo ripetutatmente le relazioni di limite:

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \ , \quad \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty \ ;$$

la prima di queste è già nota (Esempio 5.1); la seconda può essere verificata, molto facilmente, tramite la definizione. ([3]).

Esempi 8.1. ($+\infty - \infty$ è una forma indeterminata).

a) Fissato un qualunque numero reale a, consideriamo le successioni $\{a_n\} = \{a+n\}$ e $\{b_n\} = \{-n\}$. Si ha: $a_n \to +\infty$ (basta tenere presente che $\{a_n+b_n\}$ è la successione somma della successione costante $\{a\}$, che converge ad a, e della successione $\{n\}$, che diverge a $+\infty$, e applicare il Teorema 8.2), $b_n \to -\infty$, mentre la successione somma $\{a_n + b_n\}$ è la successione costante $\{a\}$, che converge ad a.

b) Sia $\{a_n\} = \{2n\}$ e $\{b_n\} = \{-n\}$. Si ha: $a_n \to +\infty$ (segue dal fatto che $\{a_n + b_n\}$ è la successione somma di $\{n\}$ e $\{n\}$, applicando il Teorema 8.3), $b_n \to -\infty$, mentre la successione somma $\{a_n + b_n\}$ è la successione $\{n\}$, che diverge a $+\infty$.

c) Sia $\{a_n\} = \{n\}$ e $\{b_n\} = \{-2n\}$. Si ha: $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ (si tratta della successione somma di $\{-n\}$ e $\{-n\}$), mentre la successione somma è $\{-n\}$, che diverge a $-\infty$.

d) Sia $\{a_n\} = \{n + (-1)^n\}$ e $\{b_n\} = \{-n\}$. Si ha: $a_n \to +\infty$ (infatti risulta $a_n \geq n-1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e, per il Teorema 8.2, $n-1 \to +\infty$, dunque, per il teorema del confronto - caso della divergenza a $+\infty$ - anche $a_n \to +\infty$); si ha inoltre $b_n \to -\infty$, mentre la successione somma è $\{(-1)^n\}$, che è oscillante.

Osservazione 8.1. È ovvio che si può considerare la successione somma anche di tre o più successioni. Anche in questo caso, applicando ripetutamente i precedenti teoremi, è possibile decidere in merito al comportamento al limite della successione somma, a meno che non ci si imbatta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Ad esempio, considerata la successione $\{a_n + b_n + c_n\}$, se si sa che $a_n \to +\infty$, $b_n \to -5$ e $c_n \to +\infty$, si può ragionare così: per il Teorema 8.2 si ha $a_n + b_n \to +\infty$, quindi, per il Teorema 8.3, la successione $\{a_n + b_n + c_n\}$ (che può essere pensata come la successione somma di $\{a_n + b_n\}$ e $\{c_n\}$) diverge a $+\infty$.

([3]) Quando lo studente avrà studiato i teoremi sul limite della successione prodotto, saprà ricavare immediatamente il limite della successione $\{-n\}$ (che può essere pensata come la successione prodotto di $\{n\}$ e della successione costante $\{-1\}$) dal limite della $\{n\}$: basta applicare il successivo Teorema 8.5.

8.2. Teoremi sul limite della successione prodotto.

È utile per il seguito la seguente

Osservazione 8.2. Se X è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, dire che X è limitato equivale a dire che:

$$\exists H > 0 \ : \ |x| \leq H \quad \forall x \in X \ . \tag{8.13}$$

Infatti, se X è limitato, esistono $b, c \in \mathbb{R}$ tali che $b \leq x \leq c \ \forall x \in X$, quindi, scegliendo $H > 0$ in modo che $-H \leq b$ e $H \geq c$ (cioè $H \geq \max\{-b, c\}$), risulta $-H \leq x \leq H \ \forall x \in X$, cioè $|x| \leq H \ \forall x \in X$. Viceversa, se vale la (8.13), i numeri $-H$ e H sono, rispettivamente, un minorante ed un maggiorante di X, dunque X è limitato.

Iniziamo lo studio della successione prodotto dal caso in cui entrambe le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono convergenti.

Teorema 8.4. *Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono convergenti, allora anche la successione $\{a_n b_n\}$ è convergente ed ha come limite il prodotto dei due limiti delle successioni date.*

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \ , \ \lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \ ,$$

cioè valgono la (8.1) e la (8.2), mentre la tesi è

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab \ ,$$

vale a dire

$$\forall \eta > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ |a_n b_n - ab| < \eta \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{8.14}$$

Dalla (8.1) e dalla (8.2), ponendo $\tilde{n} = \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$, abbiamo che le disuguaglianze

$$|a_n - a| < \varepsilon \ , \ |b_n - b| < \varepsilon$$

sono entrambe verificate per ogni indice $n \geq \tilde{n}$; inoltre, dal fatto che la successione $\{a_n\}$ è convergente segue (Teorema 6.5) che essa è limitata, cioè esiste $H > 0$ tale che $|a_n| \leq H \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo la quantità $|a_n b_n - ab|$ ed osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$|a_n b_n - ab| \ =$$

(adoperando il trucco di sottrarre ed addizionare uno stesso numero, in questo caso $a_n b$)

$$= \ |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \ = \ |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \ \leq$$

(tenendo presenti le proprietà del valore assoluto)

$$\leq \ |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \ = \ |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \ \leq$$

(ricordando che $|a_n| \leq H \ \forall n \in \mathbb{N}$)

$$\leq \ H|b_n - b| + |b||a_n - a| \ ;$$

di conseguenza, per $n \geq \tilde{n}$ è vero che

$$|a_n b_n - ab| \ \leq \ H|b_n - b| + |b||a_n - a| \ \leq \ H\varepsilon + |b|\varepsilon \ = \ (H + |b|)\varepsilon \ .$$

Ricapitolando, dalle ipotesi sulle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ abbiamo dedotto che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ |a_n b_n - ab| < (H + |b|)\varepsilon \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ . \tag{8.15}$$

A questo punto, per provare la validità della (8.14), basta ragionare nel modo ormai consueto: fissato un qualunque $\eta > 0$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $(H + |b|)\varepsilon \leq \eta$ (cioè $\varepsilon \leq \frac{\eta}{H+|b|}$); in corrispondenza di tale numero ε esiste, per la (8.15), un indice $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n b_n - a + b| < (H + |b|)\varepsilon \leq \eta \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ ;$$

pertanto, per verificare la (8.14), basta prendere come $\overline{n}$ un qualunque numero naturale maggiore o uguale a $\tilde{n}$.

Esaminiamo adesso il caso in cui una successione è convergente ad un numero diverso da zero e l'altra è divergente.

Teorema 8.5. *Se la successione $\{a_n\}$ è convergente ad un numero positivo e la successione $\{b_n\}$ è divergente a $+\infty$* [risp. $-\infty$] *, allora la successione $\{a_n b_n\}$ è divergente a $+\infty$* [risp. $-\infty$].

Se la successione $\{a_n\}$ è convergente ad un numero negativo e la successione $\{b_n\}$ è divergente a $+\infty$ [risp. $-\infty$] *, allora la successione $\{a_n b_n\}$ è divergente a $-\infty$* [risp. $+\infty$].

Dimostrazione. Esaminiamo uno dei quattro casi contemplati dall'enunciato, avvertendo che in maniera perfettamente analoga si trattano gli altri.

Supponiamo che sia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in]-\infty, 0[\ , \ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \ ,$$

e dimostriamo che risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty \ .$$

Per ipotesi valgono la (8.5) e la (8.6), mentre la tesi è:

$$\forall h > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n b_n < -h \ \ \forall n \geq \overline{n} \ . \tag{8.16}$$

Dalle (8.5) e (8.6), ponendo $\tilde{n} = \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$, si ha che per $n \geq \tilde{n}$ sono verificate tutte le disuguaglianze

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ , \ b_n > k \ .$$

Dalle precedenti disuguaglianze dobbiamo adesso cercare di ricavarne una riguardante il prodotto $a_n b_n$. Possiamo pensare di ottenere ciò moltiplicando membro a membro una delle due disuguaglianze relative ad a_n e quella riguardante b_n; naturalmente, dobbiamo tenere presente che è lecito moltiplicare membro a membro due disuguaglianze quando queste sono dello stesso tipo e coinvolgono numeri non negativi.

Osserviamo che, essendo $a < 0$, è possibile scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che $a + \varepsilon < 0$ (infatti $a + \varepsilon < 0$ equivale a $\varepsilon < -a$); in questo modo $a_n < a + \varepsilon$ è una disuguaglianza tra numeri negativi; cambiando di segno otteniamo la disuguaglianza tra numeri positivi $-a_n > -(a + \varepsilon)$ e, moltiplicando quest'ultima per $b_n > k$ (disuguaglianza tra numeri positivi), abbiamo, in definitiva,

$$-a_n b_n > -(a + \varepsilon)k \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ ,$$

da cui

$$a_n b_n < (a + \varepsilon)k \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ .$$

Riepilogando, abbiamo provato che

$$\forall \varepsilon \in]0, -a[, \ \forall k > 0 \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n b_n < (a + \varepsilon)k \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ .$$

Il ragionamento per dimostrare la (8.16) è allora il seguente: fissato comunque $h > 0$, scegliamo a piacere il numero ε nell'intervallo $]0, -a[$ e determiniamo $k > 0$ in modo che $(a + \varepsilon)k < -h$ (ciò è possibile; infatti, risolvendo la precedente disequazione nell'incognita k otteniamo $k > -\frac{h}{a+\varepsilon}$); in corrispondenza dei numeri ε e k sappiamo che esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n b_n < (a + \varepsilon)k$ $\forall n \geq \tilde{n}$, dunque, per confermare la validità della (8.16), basta scegliere l'indice $\overline{n}$ in modo che $\overline{n} \geq \tilde{n}$.

Consideriamo infine il caso in cui le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono entrambe divergenti. Ci limitiamo ad enunciare i risultati, lasciando le dimostrazioni allo studente per esercizio.

Teorema 8.6. *Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono entrambe divergenti a $+\infty$* [risp. $-\infty$]*, allora la successione $\{a_n b_n\}$ è divergente a $+\infty$.*

Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono una divergente a $+\infty$ e l'altra divergente a $-\infty$, allora la successione $\{a_n b_n\}$ è divergente a $-\infty$.

Esercizio 8.2. Dimostrare il Teorema 8.6.

Riassumiamo in una tabella i risultati sul limite della successione prodotto:

$$\begin{array}{llll}
a_n \to a \in \mathbb{R}\ , & b_n \to b \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & a_n b_n \to ab\ ; \\
a_n \to a \in \mathbb{R}\ , a > 0, & b_n \to +\infty & \Longrightarrow & a_n b_n \to +\infty\ ; \\
a_n \to a \in \mathbb{R}\ , a > 0, & b_n \to -\infty & \Longrightarrow & a_n b_n \to -\infty\ ; \\
a_n \to a \in \mathbb{R}\ , a < 0, & b_n \to +\infty & \Longrightarrow & a_n b_n \to -\infty\ ; \\
a_n \to a \in \mathbb{R}\ , a < 0, & b_n \to -\infty & \Longrightarrow & a_n b_n \to +\infty\ ; \\
a_n \to +\infty\ , & b_n \to +\infty & \Longrightarrow & a_n b_n \to +\infty\ ; \\
a_n \to -\infty\ , & b_n \to -\infty & \Longrightarrow & a_n b_n \to +\infty\ ; \\
a_n \to +\infty\ , & b_n \to -\infty & \Longrightarrow & a_n b_n \to -\infty\ .
\end{array}$$

Anche per la successione prodotto vi è un caso che non viene preso in considerazione nei teoremi dimostrati, e precisamente il caso in cui una delle due successioni è convergente a zero mentre l'altra è divergente. Anche questa volta il motivo è che *le sole ipotesi* $a_n \to 0$ *e* $b_n \to +\infty$ (oppure $b_n \to -\infty$) *non consentono di poter dedurre alcuna conclusione sul comportamento al limite della successione prodotto,* cioè, come si suol dire, $0 \cdot (+\infty)$ *e* $0 \cdot (-\infty)$ *sono forme indeterminate* (in breve, si dice che $0 \cdot \infty$ *è una forma indeterminata*). Prendiamo per buona questa affermazione, rinunciando a presentare una serie di esempi che la giustifichi, così come abbiamo fatto nel caso della forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Osservazione 8.3. Vale, per la successione prodotto, un'osservazione analoga all'Osservazione 8.1. Ad esempio, sapendo che $a_n \to -\infty$, $b_n \to -5$ e $c_n \to +\infty$, si ha, per il Teorema 8.5, $a_n b_n \to +\infty$ e quindi, per il Teorema 8.6, $a_n b_n c_n \to +\infty$.

8.3. La successione $\{|a_n|\}$.

Data la successione $\{a_n\}$, possiamo prendere in esame la successione $\{|a_n|\}$, ottenuta dalla precedente considerandone i termini in valore assoluto.

Per quanto riguarda l'esistenza del limite abbiamo che se la successione $\{a_n\}$ è regolare anche $\{|a_n|\}$ è regolare. Più precisamente, vale il seguente teorema.

Teorema 8.7. *Se la successione* $\{a_n\}$ *è convergente al numero* a*, allora anche la successione* $\{|a_n|\}$ *è convergente e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|\ . \tag{8.17}$$

Se la successione $\{a_n\}$ *è divergente (positivamente o negativamente), allora la successione* $\{|a_n|\}$ *è divergente a* $+\infty$*.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\{a_n\}$ sia convergente al numero a, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}\ :\ |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n}\ .$$

Per una proprietà del valore assoluto (la seconda disuguaglianza triangolare) abbiamo

$$\Big||a_n| - |a|\Big| \leq |a_n - a| \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

e quindi

$$\Big||a_n| - |a|\Big| < \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ;$$

in definitiva, abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \Big||a_n| - |a|\Big| < \varepsilon \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ,$$

cioè la (8.17).

Supponiamo adesso che la $\{a_n\}$ sia divergente negativamente, cioè

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ a_n < -k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Evidentemente, per $n \geq \overline{n}$ i numeri a_n sono negativi, dunque (tenendo presente che $a_n < -k \Longleftrightarrow -a_n > k$)

$$|a_n| = -a_n > k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ;$$

in definitiva, abbiamo che

$$\forall k > 0 \ \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ |a_n| > k \ \ \forall n \geq \overline{n} \ ,$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \ .$$

Un ragionamento analogo al precedente vale anche nel caso in cui la successione $\{a_n\}$ sia divergente positivamente.

Esercizio 8.3. Dimostrare che

$$a_n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad |a_n| \to +\infty \ .$$

Osservazione 8.4. Nessuna delle due implicazioni che costituiscono l'enunciato del Teorema 8.1 può essere invertita. Vi sono infatti successioni oscillanti $\{a_n\}$ tali che $\{|a_n|\}$ è convergente (un esempio del genere è dato dalla successione $\{(-1)^n\}$) e successioni oscillanti tali che $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ (si veda il successivo Esempio 8.3).

C'è però da aggiungere che, nel caso in cui il limite a è uguale a zero, si ha l'equivalenza

$$a_n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| \to 0 \ . \tag{8.18}$$

Questa affermazione è un caso particolare della seguente proposizione.

Proposizione 8.1. (Caratterizzazioni della convergenza). *Sia* $\{a_n\}$ *una successione e sia* $a \in \mathbb{R}$. *Valgono le equivalenze:*

$$\text{i) } a_n \to a \iff \text{ii) } a_n - a \to 0 \iff \text{iii) } |a_n - a| \to 0 \ .$$

Dimostrazione. Infatti, se scriviamo ciò che per definizione vogliono dire le tre relazioni di limite i), ii) e iii) otteniamo, rispettivamente,

j) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \overline{n}$,

jj) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \;:\; |(a_n - a) - 0| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \tilde{n}$,

jjj) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; n^* \in \mathbb{N} \;:\; ||a_n - a| - 0| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n^*$,

ed, essendo

$$|a_n - a| = |(a_n - a) - 0| = ||a_n - a| - 0| \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

è chiaro che j), jj) e jjj) sono equivalenti.

Esempio 8.2. Se $a \in]-1, 0[$ la successione $\{a^n\}$ è convergente a zero.

Infatti, dal momento che $|a^n| = |a|^n$, tenendo presente che $|a| = -a \in]0, 1[$ e ricordando l'Esempio 3.3, si ha

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0 \ ,$$

e quindi, per la (8.18),

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \ .$$

Introduciamo adesso due modi di dire, abbastanza tradizionali, che talora semplificano l'esposizione.

Definizione 8.1. Si dice che la successione $\{a_n\}$ è *infinitesima* se è $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si dice che la successione $\{a_n\}$ è *infinitamente grande* se è $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Così, la seconda affermazione del Teorema 8.7 può essere enunciata dicendo che:

"Ogni successione divergente è infinitamente grande."

Come abbiamo già accennato, esistono successioni oscillanti ed infinitamente grandi.

Esempio 8.3. Se $a < -1$ la successione $\{a^n\}$ è infinitamente grande ed oscillante.

Infatti, tenendo presente che $|a| = -a > 1$ e ricordando l'Esempio 4.2, si ha

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = +\infty \ ,$$

cioè la successione è infinitamente grande. Per provare che essa è oscillante, osserviamo, come prima cosa, che, per il Teorema 8.7 (caso della convergenza) e per l'unicità del limite, una successione infinitamente grande non può essere convergente; d'altra parte, la nostra successione contiene infiniti termini positivi (quelli con indice pari) ed infiniti termini negativi (quelli con indice dispari), pertanto, per la permanenza del segno, essa non può divergere nè negativamente nè positivamente.

Esempio 8.4. (Studio della successione $\{a^n\}$ - riepilogo). Possiamo riepilogare i risultati degli Esempi 3.3, 4.2, 8.2 e 8.3 (si tenga presente anche che per $a = 0$ e $a = 1$ la $\{a^n\}$ è una successione costante) nel modo seguente:

- se $a > -1$ la successione $\{a^n\}$ è regolare e si ha

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 1 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \ ; \end{cases}$$

- se $a \leq -1$ la successione $\{a^n\}$ è oscillante e nel caso $a < -1$ anche infinitamente grande.

Terminiamo questo numero con un teorema riguardante la successione prodotto.

Teorema 8.8. *La successione prodotto di una successione limitata e di una infinitesima è una successione infinitesima.*

Dimostrazione. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni, la prima limitata e la seconda infinitesima. Essendo $\{a_n\}$ limitata, esiste $H > 0$ tale che $|a_n| \leq H \ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq H|b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Dalla catena di disuguaglianze

$$0 \leq |a_n b_n| \leq H|b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

tenendo conto che le successioni $\{0\}$ e $\{H|b_n|\}$ sono entrambe convergenti a zero (per quanto riguarda la $\{H|b_n|\}$ ciò è conseguenza dei Teoremi 8.7 e 8.4), per il teorema dei carabinieri segue che anche $\{|a_n b_n|\}$ è infinitesima, quindi, per la (8.18), la successione prodotto $\{a_n b_n\}$ è infinitesima.

Esercizio 8.4. Trovare il limite della successione $\{2^{-n}\text{sen}\frac{n\pi}{4}\}$.

8.4. Studio della sucessione $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$.

Cominciamo dall'esame di caso particolare: quello della successione $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$. Ci limitiamo a dare soltanto gli enunciati dei teoremi (le dimostrazioni non sono complicate, ma le omettiamo per non appesantire troppo l'esposizione; qualcuna viene proposta come esercizio).

Teorema 8.8. *Sia $\{b_n\}$ una successione tale che $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Se la successione $\{b_n\}$ è convergente ad un numero $b \neq 0$, allora anche la successione $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ è convergente e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} \ .$$

Teorema 8.9. *Sia* $\{b_n\}$ *una successione tale che* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se la successione* $\{b_n\}$ *è infinitesima, allora la successione* $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ *è infinitamente grande.*

Teorema 8.10. *Sia* $\{b_n\}$ *una successione tale che* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se la successione* $\{b_n\}$ *è infinitamente grande, allora la successione* $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ *è infinitesima.*

Esercizio 8.5. Dimostrare i Teoremi 8.9 e 8.10.

Osservazione 8.5. Nei Teoremi 8.8, 8.9 e 8.10 l'ipotesi "$b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$" serve a garantire che la successione dei reciproci $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ abbia come dominio tutto $\mathbb{N}$. Di conseguenza, nei Teoremi 8.8 e 8.10 tale ipotesi può anche essere omessa; infatti, le altre ipotesi, e cioè $b_n \to b \neq 0$ in un caso e $|b_n| \to +\infty$ nell'altro, implicano che è $b_n \neq 0$ definitivamente, dunque $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$, anche se non è definita in tutto $\mathbb{N}$, è una successione nel senso più generale (quello della Definizione 5.1).

Avendo a disposizione i teoremi sulla successione $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ e quelli sulla successione prodotto, è possibile studiare il comportamento al limite della successione $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$; basta considerare che tale successione non è altro che la successione prodotto di $\{a_n\}$ e $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$. Ad esempio, se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, allora $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$ per il Teorema 8.8 e quindi, per il Teorema 8.4,

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \ .$$

Se, invece, $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $\{b_n\}$ è divergente (o, più in generale, infinitamente grande), allora il Teorema 8.10 implica che $\dfrac{1}{b_n} \to 0$ e quindi, sempre per il Teorema 8.4, si ha $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. Continuando a ragionare in questo modo si completa la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 8.11. (Limite della successione $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$). *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni. Supponiamo inoltre che* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Allora, valgono le seguenti implicazioni:*

1) $a_n \to a \in \mathbb{R}\ ,\ b_n \to b \in \mathbb{R}\ ,\ b\ \neq 0 \implies \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$;

2) $a_n \to a \in \mathbb{R}\ ,\ |b_n| \to +\infty \implies \dfrac{a_n}{b_n} \to 0$;

3) $a_n \to a \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0\ ,\ b_n \to 0 \implies \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$;

4) $|a_n| \to +\infty\ ,\ b_n \to b \in \mathbb{R} \implies \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$.

Così come è già accaduto per la successione somma e la successione prodotto, neanche il teorema sul limite della successione rapporto considera tutti i casi possibili per le successioni "originarie" $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$; infatti, esso non prende in esame nè l'eventualità che entrambe le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano infinitesime nè quella che entrambe siano infinitamente grandi. Il motivo, ancora una volta, come si potrebbe dimostrare con appropriati esempi, è che *nessuna delle ipotesi "le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono entrambe infinitesime" oppure "le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono entrambe infinitamente grandi" è da sola sufficiente a dare delle informazioni sul comportamento al limite della successione* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, ovvero, come si suol dire con un'espressione sintetica, $\frac{0}{0}$ *e* $\frac{\infty}{\infty}$ *sono forme indeterminate.*

Un'altra considerazione in merito al Teorema 8.11 riguarda le implicazioni 3) e 4) ed è che se in aggiunta alle ipotesi di queste implicazioni si hanno delle ulteriori informazioni sulle due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, dalle quali sia possibile dedurre che il segno della frazione $\frac{a_n}{b_n}$ è definitivamente positivo [risp. negativo], allora la tesi "$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$" può essere precisata e diviene "$\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$" [risp. "$\frac{a_n}{b_n} \to -\infty$"]([4]). Per esempio, se si sa che $a_n \to -\infty$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, allora sono verificate le ipotesi dell'implicazione 4) e inoltre si ha che definitivamente risulta $a_n < 0$, $b_n > 0$ e quindi anche $\frac{a_n}{b_n} < 0$; pertanto, possiamo concludere che $\frac{a_n}{b_n} \to -\infty$.

8.5. Alcuni esempi.

Mostriamo alcune applicazioni dei teoremi stabiliti nei precedenti numeri.

Esempio 8.5. Supponiamo di volere calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} (-2n^3 - 7n^2 + 12) .$$

Poichè $n^3 \to +\infty$ (Esempio 5.1) e $-2 \to -2$, applicando il Teorema 8.5 otteniamo che $-2n^3 \to -\infty$. Analogamente si ha $-7n^2 \to -\infty$. Si ha inoltre $12 \to 12$. Pertanto, applicando ripetutamente i teoremi sul limite della successione somma (così come spiegato nell'Osservazione 8.1), concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} (-2n^3 - 7n^2 + 12) = -\infty .$$

Esempio 8.6. Se, invece, vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} (-2n^3 + 7n^2 + 12) ,$$

([4]) Infatti, se, ad esempio, è $\frac{a_n}{b_n} < 0$ definitivamente, allora è anche $\frac{a_n}{b_n} = -\left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ definitivamente, quindi, grazie alla Proposizione 6.1 ed al Teorema 8.5, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right) = -\infty .$$

abbiamo

$$-2n^3 \to -\infty \ , \quad 7n^2 \to +\infty \ , \quad 12 \to 12 \ ,$$

quindi siamo in presenza della forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Per aggirare l'ostacolo osserviamo che per $n > 0$ risulta

$$-2n^3 + 7n^2 + 12 = n^3 \left(-2 + \frac{7}{n} + \frac{12}{n^3} \right)$$

(abbiamo messo in evidenza la potenza di n di esponente più elevato), pertanto si tratta di studiare il prodotto delle due successioni $\{n^3\}$ (che diverge a $+\infty$) e

$$\left\{ -2 + \frac{7}{n} + \frac{12}{n^3} \right\} \ .$$

Per quest'ultima successione abbiamo: $-2 \to -2$ e, applicando il Teorema 8.11,

$$\frac{7}{n} \to 0 \ , \quad \frac{12}{n^3} \to 0 \ ,$$

quindi, applicando ripetutamente il Teorema 8.1,

$$\lim_{n \to \infty} \left(-2 + \frac{7}{n} + \frac{12}{n^3} \right) = -2 \ .$$

In conclusione, tenendo presente la Proposizione 6.1 ed adoperando il Teorema 8.5, abbiamo:

$$\lim_{n \to \infty} (-2n^3 + 7n^2 + 12) \ = \ \lim_{n \to \infty} n^3 \left(-2 + \frac{7}{n} + \frac{12}{n^3} \right) = -\infty \ .$$

Esempio 8.7. (Calcolo del limite $\lim\limits_{n \to \infty} P(n)$, P polinomio).

Il ragionamento che abbiamo adoperato nel caso dell'esempio precedente continua a funzionare, in generale, quando si vuole calcolare il limite

$$\lim_{n \to \infty} P(n) \ ,$$

essendo

$$P(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_{p-1} x + a_p$$

un polinomio di grado $p \geq 1$.

Osservando che per $n > 0$ risulta

$$P(n) = n^p \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p} \right)$$

e tenendo presente che $n^p \to +\infty$, mentre per la somma in parentesi si ha

$$a_0 \to a_0 \ , \quad \frac{a_1}{n} \to 0 \ , \ \ldots \ , \quad \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} \to 0 \ , \quad \frac{a_p}{n^p} \to 0$$

e quindi

$$a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p} \to a_0 \ ,$$

perveniamo alla seguente conclusione:

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_0 > 0, \\ -\infty & \text{se } a_0 < 0. \end{cases}$$

Esempio 8.8. (Calcolo del limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$; P, Q polinomi).

Siano

$$P(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_{p-1}x + a_p \ ,$$
$$Q(x) = b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_{q-1}x + b_q$$

due polinomi di grado, rispettivamente, p e q ($p, q \geq 1$). Per quanto abbiamo appreso nell'Esempio 8.7 entrambe le successioni $\{P(n)\}$ e $\{Q(n)\}$ sono divergenti. Ciò implica, in particolare, che risulta $Q(n) \neq 0$ definitivamente, quindi ha senso (secondo la Definizione 5.1) considerare la successione

$$\left\{ \frac{P(n)}{Q(n)} \right\} \ .$$

Inoltre, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n}{Q(n)}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

L'indeterminazione si elimina adoperando lo stesso trucco dell'Esempio 8.7, cioè mettendo in evidenza, sia al numeratore che al denominatore, la potenza di n di esponente più alto:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_{q-1}}{n^{q-1}} + \frac{b_q}{n^q}} \ .$$

A questo punto il limite della successione $\left\{\frac{n^p}{n^q}\right\}$, cioè $\{n^{p-q}\}$, ci è dato dall'Esempio 5.1, mentre, per quanto riguarda la seconda frazione, applicando i teoremi sulla successione rapporto e sulla successione somma, abbiamo che essa è convergente al numero

$$\frac{a_0}{b_0}$$

(il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo nei due polinomi). La conclusione è la seguente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p > q \text{ ed i numeri } a_0 \text{ e } b_0 \text{ hanno lo stesso segno,} \\ -\infty & \text{se } p > q \text{ ed i numeri } a_0 \text{ e } b_0 \text{ hanno segno opposto,} \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } p < q. \end{cases}$$

Esercizio 8.6. Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$\text{a)}\ \left\{\frac{7n+1-3n^2}{9n^2-10}\right\}\ ,\ \text{b)}\ \left\{\frac{4n^5-5n^4}{1+n-n^2}\right\}\ ,\ \text{c)}\ \left\{\frac{5n^3+2}{3n+2-7n^6}\right\}\ .$$

Esercizio 8.7. Provare che i termini della successione

$$\left\{\frac{7n^3-51n^2-1000}{-5n^4+6n+2}\right\}$$

sono definitivamente negativi (suggerimento: adoperare l'Esempio 8.7 ed il teorema della permanenza del segno).

Esercizio 8.8. Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$\text{a)}\ \left\{2n^3-3n\sqrt[3]{n^4}+1\right\}\ ,\ \text{b)}\ \left\{\frac{5n^4+2n\sqrt{n^3}+1}{2-7n^6}\right\}\ ,\ \text{c)}\ \left\{\frac{n^2+1-n\sqrt{n^7}}{2-3n\sqrt{n^3}}\right\}$$

(suggerimento: esprimere i radicali come potenze di n ed adoperare quindi la tecnica, ormai consueta, di mettere in evidenza le potenze di n di grado più elevato).

Esempio 8.9. L'accorgimento di mettere in evidenza la potenza di n di grado massimo si rivela proficuo anche nel calcolo del limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+(-1)^n5n^2+2}{-5n^2+(-1)^{n+1}n+7}\ .$$

Infatti, dopo avere osservato che per $n>0$ risulta

$$\frac{3n^4+(-1)^n5n^2+2}{-5n^2+(-1)^{n+1}n+7}=\frac{n^4}{n^2}\cdot\frac{3+\dfrac{(-1)^n5}{n^2}+\dfrac{2}{n^4}}{-5+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{7}{n^2}}\ ,$$

possiamo notare che per il Teorema 8.8 le due successioni $\left\{\frac{(-1)^n5}{n^2}\right\}$ e $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$, che figurano nel secondo membro, sono entrambe infinitesime (ad es., $\left\{\frac{(-1)^n5}{n^2}\right\}$ è la successione prodotto della successione limitata $\{(-1)^n\}$ e della successione infinitesima $\left\{\frac{5}{n^2}\right\}$); tenuto conto di ciò, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{(-1)^n5}{n^2}+\dfrac{2}{n^4}}{-5+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{7}{n^2}}=-\frac{3}{5}\ ,$$

e quindi, per il Teorema 8.5,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+(-1)^n5n^2+2}{-5n^2+(-1)^{n+1}n+7}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{3+\dfrac{(-1)^n5}{n^2}+\dfrac{2}{n^4}}{-5+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{7}{n^2}}=-\infty\ .$$

Esercizio 8.9. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty}\left[n^3-(n+2)\text{sen}\frac{n^2}{2}\right] \text{ , b)} \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3n^2+(-1)^n} \text{ , c)} \lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}+\text{sen}n}{n^2+\sqrt[3]{n}+\cos n} \text{ .}$$

Esercizio 8.10.

a) Provare che

$$\lim_{n\to\infty}(n+3)^{-\frac{5}{2}}=0$$

(suggerimento: osservare che $0<(n+3)^{-\frac{5}{2}}<n^{-\frac{5}{2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$).

b) Dedurre da a) che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+3)^3}}{n^4}=0 \text{ .}$$

c) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+5\sqrt{(n+3)^3}-2}{-2n^3+\sqrt{n+2}} \text{ .}$$

Esempio 8.10. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3}\right) \text{ .}$$

Poichè $\sqrt{n^3+n}>\sqrt{n^3}=n^{\frac{3}{2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$ e poichè $n^{\frac{3}{2}}\to+\infty$, per il Teorema 6.3 si ha $\sqrt{n^3+n}\to+\infty$, pertanto il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$.

Per eliminare l'indeterminazione procediamo nel modo seguente: osserviamo che per $n>0$ si ha

$$\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3}=\frac{\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3}\right)\left(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}\right)}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}}=$$

$$=\frac{n^3+n-n^3}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}}=\frac{n}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}}$$

ed inoltre, essendo $\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}>\sqrt{n^3}$, risulta

$$\frac{n}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3}}<\frac{n}{\sqrt{n^3}}=n^{-\frac{1}{2}} \text{ ;}$$

in definitiva possiamo affermare che:

$$0<\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3}<n^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}^+ \text{ ,}$$

da cui, per il teorema dei carabinieri,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3}\right)=0 \text{ .}$$

Esercizio 8.11. Calcolare i limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \quad , \quad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3}\right)$$

(suggerimento per b)): tenere presente che

$$\sqrt{n^3+n^2} + \sqrt{n^3} \leq \sqrt{2n^3} + \sqrt{n^3} = (\sqrt{2}+1)\sqrt{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{).}$$

Esempio 8.11. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to\infty} (5^n - 2^n + 3) \ .$$

Poichè le successioni $\{5^n\}$ e $\{2^n\}$ sono entrambe divergenti positivamente siamo in presenza della forma indeterminata $+\infty - \infty$. Se teniamo presente che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty \ ,$$

(cioè, come si suol dire "$\{5^n\}$ diverge più rapidamente di $\{2^n\}$") e quindi $\frac{2^n}{5^n} \to 0$, possiamo aggirare l'ostacolo mettendo in evidenza il termine generale della successione che diverge più rapidamente:

$$5^n - 2^n + 3 = 5^n \left(1 - \frac{2^n}{5^n} + \frac{3}{5^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui, essendo

$$1 - \frac{2^n}{5^n} + \frac{3}{5^n} \to 1 \ ,$$

otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} (5^n - 2^n + 3) = +\infty \ .$$

Esercizio 8.12. Calcolare i limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+3} - 5 \cdot 3^n}{4^{n+1} + 7} \quad , \quad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+100} - 3^{n+10}}{5^n + 1} \quad , \quad \text{c)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{1000^n}$$

(suggerimento per c)): tenere presente che

$$\frac{2^{n^2}}{1000^n} = \left(\frac{2^n}{1000}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed osservare inoltre che, essendo $\frac{2^n}{1000} \to +\infty$, definitivamente si ha $\frac{2^n}{1000} > 2$ e quindi $\frac{2^{n^2}}{1000^n} > ...$).

9. Successioni composte. Successioni estratte.

9.1. Successioni composte.

La successione composta è un caso particolare di funzione composta.

Ricordiamo che per potere considerare la funzione composta $g \circ f$ occorre che il codominio della funzione "interna" f sia un sottoinsieme del dominio della funzione "esterna" g. Supponiamo quindi di avere due successioni $\{k_n\}$ e $\{a_k\}$ (nella seconda, per evitare confusione, stiamo indicando la variabile indipendente con la lettera k) e supponiamo che la successione $\{k_n\}$ sia a valori in $\mathbb{N}$. In altre parole, abbiamo due funzioni:

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ , \quad a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ .$$

È allora possibile formare la funzione composta

$$a \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ .$$

Tale funzione composta è ancora una successione, precisamente la successione

$$\{a_{k_n}\} \ ,$$

ovvero, per elenco,

$$a_{k_0}, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots \ ,$$

cioè la successione che fa corrispondere a 0 il termine di indice k_0 della successione $\{a_k\}$, a 1 il termine di indice k_1 della successione $\{a_k\}$, ecc. ecc.; ad essa si dà il nome di *successione composta* per mezzo delle due successioni $\{k_n\}$ e $\{a_k\}$, le quali saranno nel seguito identificate, rispettivamente, come la *successione degli indici* e la *successione originaria.*

Esempi di successioni composte sono

$$a_0,\ a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ a_{10},\ \dots \ , \tag{9.1}$$

$$a_1,\ a_2,\ a_4, a_8,\ a_{16},\ a_{32},\ \dots \ , \tag{9.2}$$

$$a_{13},\ a_{17},\ a_{13},\ a_{17},\ a_{13},\ a_{17},\ \dots \ , \tag{9.3}$$

$$a_2,\ a_1,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\ \dots \ , \tag{9.4}$$

ottenute dalla successione originaria $\{a_k\}$ considerando come successione degli indici, rispettivamente, $\{2n\}$, $\{2^n\}$, $\{15 + 2(-1)^n\}$ e $\{|n - 2|\}$.

Una proprietà molto importante delle successioni composte è che se la successione degli indici $\{k_n\}$ è divergente positivamente (cioè si comporta come la variabile indipendente k

della successione originaria $\{a_k\}$), allora la successione composta "eredita" il limite della successione originaria (ammesso che esista). È questo il contenuto del successivo teorema sul limite della successione composta.

Teorema 9.1. (Limite della successione composta). *Siano* $\{k_n\}$ *e* $\{a_k\}$ *due successioni, la prima a valori nell'insieme* $\mathbb{N}$. *Supponiamo che la successione degli indici* $\{k_n\}$ *sia divergente a* $+\infty$. *Supponiamo che la successione originaria* $\{a_k\}$ *sia regolare. Allora anche la successione composta* $\{a_{k_n}\}$ *è regolare e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{k\to\infty} a_k \ .$$

Dimostrazione. Indichiamo con L ($L \in \overline{\mathbb{R}}$) il limite della successione $\{a_k\}$.

Per ipotesi abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} a_k = L \quad , \quad \lim_{n\to\infty} k_n = +\infty \ ,$$

cioè, rispettivamente, (si tengano presenti la (5.1) e la (4.1′))

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists k^* \in \mathbb{N} \ : \ \ a_k \in U \ \ \forall k \geq k^* \ , \tag{9.5}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ : \ \ k_n > t \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ , \tag{9.6}$$

mentre la tesi è

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = L \ ,$$

vale a dire

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists n^* \in \mathbb{N} \ : \ \ a_{k_n} \in U \ \ \forall n \geq n^* \ . \tag{9.7}$$

Ragioniamo nel modo seguente. Fissato un qualunque intorno $U \in \mathcal{U}(L)$, per la (9.5) esiste un indice $k^* \in \mathbb{N}$ avente la proprietà che

$$a_k \in U \ \ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k^* \ ; \tag{9.8}$$

per la (9.6), in corrispondenza del numero reale $t = k^*$, esiste un indice $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$k_n > k^* \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ ; \tag{9.9}$$

dalla (9.9) e dal fatto che la successione $\{k_n\}$ è a valori in $\mathbb{N}$ segue che per ogni indice $n \geq \tilde{n}$ è vera l'affermazione "k_n è un numero naturale maggiore o uguale a k^*" e quindi, per la (9.8), è vero anche che $a_{k_n} \in U$; in conclusione abbiamo:

$$a_{k_n} \in U \ \ \forall n \geq \tilde{n} \ ;$$

a questo punto è chiaro che per acquisire la validità della (9.7) basta prendere come n^* un qualunque indice maggiore o uguale a $\tilde{n}$. Il teorema è così dimostrato.

Riprendendo gli esempi di successioni composte portati in precedenza, abbiamo che (ammesso che esista il limite della successione $\{a_k\}$) è lecito applicare il teorema sul limite della successione composta alle successioni (9.1), (9.2) e (9.4), ma non alla (9.3) (poichè in questo caso la successione degli indici non è divergente).

Esempio 9.1. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{|n^3-7n^2-13|} .$$

Osserviamo che la successione

$$\left\{ \left(\frac{1}{5}\right)^{|n^3-7n^2-13|} \right\}$$

è composta per mezzo delle successioni

$$\{k_n\} = \{|n^3 - 7n^2 - 13|\} \ \text{ e } \ \{a_k\} = \left\{ \left(\frac{1}{5}\right)^k \right\} .$$

Poichè (Esempio 8.7 e Teorema 8.7)

$$\lim_{n\to\infty} |n^3 - 7n^2 - 13| = +\infty$$

e poichè (Esempio 8.4)

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 0$$

possiamo applicare il Teorema 9.1; otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{|n^3-7n^2-13|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 0 .$$

Esempio 9.2. La successione

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n^2+5}\right)^{n^2+5} \right\} \tag{9.10}$$

è convergente al numero e. Infatti la (9.10) è una successione composta:

$$\{k_n\} = \{n^2 + 5\} \quad , \quad \{a_k\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right\} ,$$

ed essendo

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2+5\right) = +\infty \ ,$$

nonchè, per definizione,

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \ ,$$

per il Teorema 9.1 abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2+5}\right)^{n^2+5} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \ .$$

Esempio 9.3. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}}(5^n - 2^n + 3) \ .$$

Anche in questo caso siamo in presenza di una successione composta:

$$\{k_n\} = \{5^n - 2^n + 3\} \ \text{ e } \ \{a_k\} = \{\log_{\frac{1}{2}} k\} \ .$$

Essendo (cfr. gli Esempi 8.11 e 5.2)

$$\lim_{n\to\infty}(5^n - 2^n + 3) = +\infty \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} k = -\infty \ ,$$

il Teorema 9.1 può essere applicato e ci permette di concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}}(5^n - 2^n + 3) \ = \ \lim_{k\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} k = -\infty \ .$$

Esercizio 9.1. Provare che la successione $\{5^n - 2^n + 3\}$ è fortemente crescente.

Esercizio 9.2. Trovare i limiti delle seguenti successioni:

$$\text{a)} \ \left\{\sqrt[3]{2^n + 5n - 1}\right\} \ , \ \text{b)} \ \left\{4^{n^3-n+1} - 3^{n^3-n+2}\right\} \ , \ \text{c)} \ \left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-4n}\right\} \ .$$

Osservazione 9.1. Il Teorema 9.1 può essere enunciato dicendo che: "*Se la successione degli indici diverge a $+\infty$, allora l'esistenza del limite della successione originaria è condizione sufficiente per l'esistenza del limite della successione composta, il quale risulta uguale al precedente.*"

Osserviamo che la precedente condizione non è però necessaria, cioè la successione composta può avere limite anche se la successione originaria è oscillante. Un esempio in tal senso è dato dalla successione $\{a_k\} = \{(-1)^k\}$; tale successione è oscillante, ma se consideriamo la successione composta $\{(-1)^{2n}\}$, otteniamo una successione costante, dunque convergente.

Il seguente teorema riguarda la successione degli indici e fornisce una condizione sufficiente affinchè essa sia divergente a $+\infty$.

Teorema 9.2. *Sia $\{k_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{N}$. Se $\{k_n\}$ è iniettiva, allora si ha*

$$\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty \ .$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che, assegnato un qualunque numero positivo k, risulta definitivamente $k_n > k$, ovvero, in maniera equivalente (cfr. l'Esercizio 2.4), si ha che l'insieme

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ k_n \leq k\}$$

è finito (oppure vuoto).

Ragioniamo nel modo che segue. Osserviamo, come prima cosa, che, essendo la successione $\{k_n\}$ iniettiva, essa non può avere più di un termine uguale a 0, non può avere più di un termine uguale a 1, ecc. ecc.. Di conseguenza, assegnato ad arbitrio il numero $k > 0$, e determinato in corrispondenza un numero naturale m tale che $k \leq m$, possiamo affermare che i termini della successione $\{k_n\}$ che appartengono all'insieme $\{0, 1, \dots, m\}$ (se ve ne sono) sono in numero finito (al massimo possono essere in numero di $m + 1$); in altre parole (dato che $\{k_n\}$ è a valori in $\mathbb{N}$), l'insieme

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ k_n \leq m\}$$

è finito o vuoto; la stessa cosa può allora dirsi di

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ k_n \leq k\} \ ,$$

che è un suo sottoinsieme. Ciò completa la dimostrazione.

9.2. Successioni estratte.

Un caso particolare di successione composta è la successione estratta. Si parla di successione estratta quando la successione degli indici è fortemente crescente.

Definizione 9.1. Data la successione $\{a_k\}$, si chiama *successione estratta* dalla successione $\{a_k\}$ (o *sottosuccessione* di $\{a_k\}$) ogni successione del tipo $\{a_{k_n}\}$, dove $\{k_n\}$ è una successione fortemente crescente di numeri naturali.

In pratica, le successioni estratte si ottengono dalla successione originaria

$$a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3, \ \dots$$

(scritta per elenco) cancellandone parte dei termini (sia un numero finito che infiniti) ma conservandone infiniti.

Per il Teorema 9.2 ogni successione fortemente crescente di numeri naturali è divergente positivamente. Ne segue che alle successioni estratte è sempre possibile applicare il teorema sul limite della successione composta. Si ha quindi il

Teorema 9.3. (Teorema delle successioni estratte). *Se la successione $\{a_k\}$ è regolare, allora ogni successione estratta da $\{a_k\}$ è pure regolare ed ha lo stesso limite di $\{a_k\}$.*

Del Teorema 9.3 abbiamo già visto (Esempi 9.2 e 9.3; si tenga presente anche l'Esercizio 9.1) alcune applicazioni "in positivo" (si ricava il limite di una successione estratta dalla conoscenza del limite della successione originaria). Vi è anche un'interessante applicazione "in negativo" ed è quella espressa dal seguente teorema.

Teorema 9.4. *Se una successione $\{a_k\}$ possiede due successioni estratte aventi limiti diversi, allora $\{a_k\}$ è oscillante.*

Dimostrazione. Siano $\{a_{k_n}\}$ e $\{a_{h_n}\}$ due successioni estratte da $\{a_k\}$ tali che:

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = L_1 \in \overline{\mathbb{R}} \ , \quad \lim_{n\to\infty} a_{h_n} = L_2 \in \overline{\mathbb{R}} \ ,$$

essendo $L_1 \neq L_2$.

Supponiamo per assurdo che $\{a_k\}$ sia regolare e che

$$\lim_{k\to\infty} a_k = L \ .$$

Per il Teorema 9.3 si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = L \ ,$$

dunque, per l'unicità del limite, $L = L_1$. Per lo stesso motivo si ha pure $L = L_2$; ne segue la contraddizione $L_1 = L_2$. Il teorema è pertanto dimostrato.

Esempio 9.4. Un altro modo per provare che la successione $\{(-1)^k\}$ è oscillante è quello di osservare che vi sono due estratte: $\{(-1)^{2n}\}$ e $\{(-1)^{2n+1}\}$, che hanno limiti diversi:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1 \ .$$

Esercizio 9.3. Provare che la successione $\{a^n\}$, con $a < -1$, è oscillante usando il Teorema 9.4.

Esercizio 9.4. Supponiamo che $\{a_n\}$ sia una successione crescente e che si abbia

$$\lim_{n\to\infty} a_{n^2} = 7 \ .$$

Qual è l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$? Perchè?

Esercizio 9.5. Stabilire quali delle seguenti successioni sono regolari:

$$\text{a)} \ \left\{(-5)^n + 2^n\right\} \ , \quad \text{b)} \ \left\{5^n + (-2)^n\right\} \ , \quad \text{c)} \left\{\frac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2 - n + 1}\right\} \ , \quad \text{d)} \left\{\frac{(-1)^n n + 1}{n^2 - n + 1}\right\} \ .$$