# 1. I limiti delle funzioni.

## 1.1. Considerazioni introduttive.

La nozione di limite di una funzione reale di variabile reale costituisce una naturale generalizzazione della nozione di limite di una successione.

Ricordiamo che, se $\{a_n\}$ è una successione e $L$ è un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$, l'affermazione che il limite di $\{a_n\}$, al tendere di $n$ a $\infty$, è uguale a $L$ (in breve $\lim_{n\to\infty} a_n = L$) sta a significare che per qualunque intorno $U$ del limite $L$ succede che i termini della successione $\{a_n\}$ appartengono definitivamente a $U$, vale a dire:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists n^* \in \mathbb{N} \ : \ \ a_n \in U \ \ \forall n \geq n^* \ . \tag{1.1}$$

Osserviamo in proposito (ciò ci sarà di aiuto nel formalizzare la definizione di limite di una funzione) che una condizione equivalente alla (1.1) è la seguente:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(+\infty) \ : \ \ a_n \in U \ \ \forall n \in V \cap \mathbb{N} \ . \tag{1.2}$$

In altre parole, nel caso di una successione, l'avverbio "definitivamente" (che, per definizione, significa "se $n$ è maggiore o uguale di un opportuno indice $n^*$") può anche tradursi dicendo "se $n$ appartiene all'intersezione di un opportuno intorno $V$ di $+\infty$ con $\mathbb{N}$ (il dominio della successione)".

**Esercizio 1.1.** Verificare l'equivalenza tra la (1.1) e la (1.2).

Ricordiamo inoltre che, per una successione $\{a_n\}$, il concetto di limite è servito ad esprimere con un linguaggio rigoroso il fatto intuitivo che, man mano che la variabile indipendente $n$ assume valori via via sempre più grandi (cioè tende a $+\infty$), la variabile dipendente $a_n$ ha la tendenza ad assumere valori o vicini quanto si vuole ad un numero $a$ (successione convergente) oppure grandi quanto si vuole (successione divergente a $+\infty$) oppure piccoli quanto si vuole (successione divergente a $-\infty$).

Uno scopo simile ha il concetto di limite per una funzione reale di variabile reale $f : A \to \mathbb{R}$.

Ovviamente, anche questa volta il limite della variabile dipendente $f(x)$, ammesso che esista, potrà essere un qualunque elemento $L$ di $\overline{\mathbb{R}}$. Vi è invece una novità per quanto riguarda la variabile indipendente $x$. Poichè i valori di $x$ appartengono all'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ (il dominio di $f$), la variabile indipendente $x$ non è più costretta, come la $n \in \mathbb{N}$, a tendere a $+\infty$, ma può, essa stessa, tendere ad un qualunque elemento $c$ di $\overline{\mathbb{R}}$, purchè tale elemento sia compatibile con il vincolo che $x \in A$.

Che cosa significa l'ultima precisazione? Per chiarire ciò, affidiamoci per un momento all'intuizione e visualizziamo la variabile indipendente $x$ come un punto che si muove lungo la retta cartesiana (così come abbiamo imparato a fare, nel caso delle successioni, per la variabile dipendente $a_n$).

Se la funzione $f$ è definita nell'intervallo $]-\infty, 0]$ è intuitivo che la variabile indipendente $x$ può tendere a $-\infty$, ma non a $+\infty$, così come può tendere a $-5$, a $-3$ oppure anche a 0, ma non a 5. Se, invece, il dominio di $f$ è l'insieme $]-\infty, 0] \cup \{5\}$ e ci chiediamo se la $x$ possa tendere a 5, allora, in mancanza di altre indicazioni, rimaniamo incerti sulla risposta da dare. Per dare un aiuto alla nostra intuizione ricordiamoci allora che, nell'interpretazione dinamica delle successioni, il crescere della variabile indipendente $n \in \mathbb{N}$ indicava lo scorrere del tempo. Assumiamo dunque, in analogia con il caso delle successioni, che la variabile indipendente $x$ si comporti come il tempo, cioè sia soggetta al vincolo di non potere fermarsi ("Tempus fugit!"). Una volta precisato ciò, la risposta alla domanda che ci siamo posti in precedenza è, evidentemente, negativa: se il dominio di $f$ è $]-\infty, 0] \cup \{5\}$, la variabile indipendente $x$, anche se può assumere il valore 5, non può tuttavia tendere a 5; infatti l'unico modo per la $x$ di andare vicino a 5 quanto si vuole è quello di "saltare" dall'intervallo $]-\infty, 0]$ al punto 5, per poi "rimanere ferma" in tale punto, ma questo tipo di comportamento alla $x$ non è consentito.

In conclusione, nello studio del limite di una funzione reale di variabile reale $f : A \to \mathbb{R}$, affinchè la variabile indipendente $x$ possa tendere ad un elemento $c \in \overline{\mathbb{R}}$ è necessario che la $x$ possa "avvicinarsi" a $c$ quanto si vuole, rispettando però la condizione (qualora $c$ sia un elemento del dominio di $f$) di mantenersi diversa da $c$. Con una terminologia più precisa i precedenti requisiti si esprimono dicendo che ogni intorno di $c$ deve contenere elementi dell'insieme $A \setminus \{c\}$, cioè $c$ deve essere un punto di accumulazione (in $\overline{\mathbb{R}}$) per $A$.

Supponiamo adesso che la $x$ possa tendere a $c$, cioè che sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Qual è allora il significato da attribuire alla locuzione "definitivamente, al tendere di $x$ a $c$"? In analogia con il caso delle successioni (cfr. quanto detto a proposito della (1.2)), è naturale rispondere nel modo seguente: "per tutti i valori della variabile indipendente $x$ che appartengono all'intersezione di un opportuno intorno $V$ di $c$ con l'insieme $A \setminus \{c\}$".

In definitiva, possiamo riepilogare e formalizzare tutto ciò che è stato detto sin qui nella maniera seguente:

*Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$) e sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$; allora:*

i) *ha senso considerare il problema della ricerca del limite della funzione $f$, per $x$ che tende a $c$, solamente quando $c$ è un punto di accumulazione (in $\overline{\mathbb{R}}$) per $A$;*

ii) *se $c \in \overline{\mathrm{D}}A$, dire che la funzione $f$ gode definitivamente, al tendere di $x$ a $c$, di una proprietà $\mathcal{P}$ significa dire che esiste un intorno $V$ di $c$ tale che la funzione $f|_{V \cap (A \setminus \{c\})}$ (la restrizione di $f$ all'insieme $V \cap (A \setminus \{c\})$) ha la proprietà $\mathcal{P}$.*

**Osservazione 1.1.** È appena il caso di ribadire, se ve ne fosse qualche bisogno, che i fatti i) e ii) sono delle definizioni e come tali vanno accolti. Le considerazioni che li precedono hanno il solo scopo di dare una motivazione intuitiva di tali definizioni, che ce le faccia accettare senza ripugnanza e, magari, ci aiuti a ricordarle meglio; tali considerazioni non sono, nè possono essere in alcun modo, delle dimostrazioni.

**Osservazione 1.2.** Il fatto che abbia senso il problema della ricerca del limite di $f(x)$, per $x$ che tende a $c$, non implica nulla in merito all'esistenza del limite (concetto che, peraltro, non abbiamo ancora definito).

**Osservazione 1.3.** Essendo

$$V \cap (A \setminus \{c\}) = (V \cap A) \setminus \{c\}$$

(cfr. il successivo Esercizio 1.2) nel seguito scriveremo semplicemente $V \cap A \setminus \{c\}$.

**Esercizio 1.2.** Siano $V$, $A$ e $C$ tre insiemi qualsiasi. Verificare che $V \cap (A \setminus C) = (V \cap A) \setminus C$ .

**Esercizio 1.3.** Sia $f$ una funzione reale di variabile reale definita nell'insieme

$$A = ]-\infty, 0[ \cup [1, 5[ \cup \{3, 7\}.$$

Per quali $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ha senso il problema della ricerca del limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $c$?

**Esercizio 1.4.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x < 0, \\ 5 & \text{se } x = 0, \\ 4 - x & \text{se } x > 0\ . \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali no:
1) per $x \to -\infty$ si ha $f(x) > 0$ definitivamente;
2) per $x \to 0$ si ha $f(x) > 2$ definitivamente;
3) per $x \to +\infty$ la funzione $f$ è definitivamente monotona;
4) per $x \to +\infty$ la funzione $f$ assume definitivamente valori irrazionali;
5) per $x \to 0$ la funzione $f$ è definitivamente iniettiva.
(Può essere utile disegnare il grafico di $f$).

Per concludere questo numero, avvertiamo, una volta per tutte, che le funzioni considerate nel presente capitolo sono esclusivamente funzioni reali di variabile reale; pertanto adopereremo il termine "funzione" come sinonimo di "funzione reale di variabile reale"; inoltre la notazione $f : A \to \mathbb{R}$ sottointenderà che sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

### 1.2. La definizione di limite.

Dopo le considerazioni che precedono è del tutto naturale porre, in perfetta analogia con il caso delle successioni (cfr. la (1.2)), la seguente definizione di limite.

**Definizione 1.1.** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Sia, inoltre, $L$ un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$. Si dice che *il limite della funzione $f$, per $x$ che tende a $c$, è uguale a $L$* se accade che, comunque si prenda un intorno $U$ di $L$, i valori $f(x)$ della funzione $f$ appartengono definitivamente, al tendere di $x$ a $c$, a tale intorno:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \;:\; f(x) \in U \;\; \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \; . \tag{1.3}$$

Per indicare che il limite di $f$, per $x$ che tende a $c$, è uguale a $L$ si adopera la notazione

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

e, secondo che sia $L \in \mathbb{R}$ oppure $L = +\infty$ [risp. $L = -\infty$], si dice che la funzione $f$ è *convergente* oppure *divergente positivamente* [risp. *negativamente* ] al tendere di $x$ a $c$; in ogni caso, quando il limite $\lim_{x \to c} f(x)$ esiste, si dice che la funzione $f$ è *regolare* al tendere di $x$ a $c$ (*oscillante* in caso contrario).

Due modi equivalenti di scrivere la (1.3), che talvolta utilizzeremo, sono:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \;:\; x \in V \cap A \setminus \{c\} \implies f(x) \in U \; ; \tag{1.3$'$}$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \;:\; f(V \cap A \setminus \{c\}) \subseteq U \; . \tag{1.3$''$}$$

Ovviamente, quando è $c = +\infty$ oppure $c = -\infty$ o, ancora, quando $c \in \mathbb{R}$ ma $c \notin A$, la (1.3) e le sue equivalenti (1.3$'$) e (1.3$''$) si semplificano scrivendo $V \cap A$ invece di $V \cap A \setminus \{c\}$.

La (1.3) fa uso per entrambi gli elementi $c$ e $L$ del "linguaggio degli intorni". Però, ogni volta che si precisa, tanto per $c$ quanto per $L$, se si tratta di un numero reale oppure di uno dei due simboli $+\infty$ e $-\infty$ (in tutto vi sono $3 \times 3 = 9$ nove casi possibili), la (1.3) è suscettibile di una formulazione equivalente che usa il "linguaggio dei numeri" o, come si suole dire anche, "il linguaggio degli $\varepsilon$ e dei $\delta$" anzichè il linguaggio degli intorni. Ad esempio, se $c$ ed $L$ sono entrambi numeri reali, la (1.3) equivale a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;:\; |f(x) - L| < \varepsilon \;\; \forall x \in ]c - \delta, c + \delta[ \cap A \setminus \{c\} \; ; \tag{1.4}$$

se $c = -\infty$ e $L \in \mathbb{R}$, la (1.3) equivale a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists h > 0 \;:\; |f(x) - L| < \varepsilon \;\; \forall x \in ] - \infty, -h[ \cap A \; ;$$

se $c = +\infty$ e $L = -\infty$ la formulazione equivalente della (1.3) è

$$\forall k > 0 \;\; \exists h > 0 \;:\; f(x) < -k \;\; \forall x \in ]h, +\infty[ \cap A \; .$$

**Esercizio 1.5.** Completare l'elenco delle nove formulazioni equivalenti della (1.3) che adoperano il "linguaggio dei numeri" e verificare, in ognuno dei casi, l'equivalenza.

Naturalmente è anche possibile adoperare un “linguaggio misto”, cioè usare il linguaggio degli intorni per uno dei due elementi $c$ ed $L$ e quello dei numeri per l'altro. Ad esempio, la (1.4) può essere riformulata in modo equivalente come

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ |f(x) - L| < \varepsilon \ \ \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \tag{1.4$'$}$$

oppure come

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists \delta > 0 \ : \ \ f(x) \in U \ \ \forall x \in ]c - \delta, c + \delta[ \cap A \setminus \{c\} \ . \tag{1.4$''$}$$

Specialmente negli esercizi utilizzeremo le formulazioni della definizione di limite del tipo (1.4′) (cioè quelle che adoperano il linguaggio dei numeri per $L$ e quello degli intorni per $c$).

**Osservazione 1.4.** Abbiamo già accennato al fatto che la nozione di limite di una successione $\{a_n\}$, introdotta in precedenza, rientra come caso particolare nella definizione di limite di una funzione (Definizione 1.1); infatti la $\{a_n\}$ è una particolare funzione reale di variabile reale, l'unico punto di accumulazione per il dominio di $\{a_n\}$ è $+\infty$ e, scrivendo la (1.3) nel caso della $\{a_n\}$, si ottiene proprio la (1.2) (supponiamo, per semplicità, che la $\{a_n\}$ sia definita in tutto $\mathbb{N}$). Da questo punto di vista (cioè pensando le successioni come particolari funzioni reali di variabile reale) per indicare il limite di $\{a_n\}$ si dovrebbe adoperare il simbolo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \ ;$$

tuttavia noi continueremo ad adoperare la notazione

$$\lim_{n \to \infty} a_n \ ,$$

precedentemente introdotta, poichè per le successioni è consuetudine fare in questo modo.

## 1.3. Alcuni esempi.

Esaminiamo adesso alcuni esempi per impadronirci bene, anche dal punto di vista operativo, del concetto di limite.

**Esempio 1.1.** (La funzione identità).

La funzione identità $f(x) = x$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, pertanto la ricerca del limite $\lim_{x \to c} x$ ha senso per qualunque $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Risulta, qualunque sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x \to c} x = c \ .$$

Infatti, in questo caso, essendo $f(E) = E$ per qualunque insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, la (1.3′′) si scrive:

$$\forall U \in \mathcal{U}(c) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ V \cap \mathbb{R} \setminus \{c\} \subseteq U \ ,$$

cioè

$$\forall U \in \mathcal{U}(c) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ V \setminus \{c\} \subseteq U$$

e, per verificare che tale condizione è soddisfatta, basta prendere come intorno $V \in \mathcal{U}(c)$ uno qualunque degli infiniti intorni di $c$ che sono contenuti nell'intorno $U$ (per esempio lo stesso $U$).

**Esempio 1.2.** (La funzione costante).

Sia $f$ una funzione costante, cioè

$$f(x) = a \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

essendo $a$ un assegnato numero reale. Anche in questo caso, essendo $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, la ricerca del limite $\lim_{x\to c} a$ ha senso per qualunque $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Risulta, qualunque sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to c} a = a \ .$$

Infatti la condizione (1.3′) si scrive:

$$\forall U \in \mathcal{U}(a) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ x \in V \setminus \{c\} \ \implies \ a \in U$$

ed è ovvio che tale condizione è soddisfatta (prendendo come $V$ un qualunque intorno di $c$); infatti sappiamo che $U \in \mathcal{U}(a)$ implica $a \in U$ .

L'esempio successivo serve per imparare bene che:

*quando $c$ appartiene sia al dominio $A$ della funzione $f$ che all'insieme $\overline{\mathrm{D}}A$, il valore $f(c)$ che la funzione $f$ assume in corrispondenza di $c$ non influisce in alcun modo sul limite di $f$ al tendere di $x$ a $c$.*

**Esempio 1.3.**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Anche questa volta la ricerca del limite $\lim_{x\to c} f(x)$ ha senso per qualunque $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Consideriamo, in particolare, il $\lim_{x\to 0} f(x)$ e dimostriamo che è:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \ .$$

Occorre provare che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(0) \ : \ \ f(x) \in U \quad \forall x \in V \setminus \{0\} \ . \tag{1.5}$$

Fissato l'intorno $U \in \mathcal{U}(0)$, consideriamo l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in U\}$ (cioè il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti i numeri $x$ aventi la proprietà che la loro immagine $f(x)$ appartiene a $U$); evidentemente, dato che $0 \in U$, si ha:

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in U\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 1 \in U, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } 1 \notin U. \end{cases} \tag{1.6}$$

Ne segue che per verificare la (1.5) si può prendere come $V$ un qualsiasi intorno del punto $c = 0$ (anche tutto $\mathbb{R}$).

Ricollegandoci a quanto detto prima dell'esempio, osserviamo che il risultato trovato (cioè $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$) sarebbe stato lo stesso se la funzione $f$ avesse preso, in corrispondenza di $x = 0$, anzichè il valore $f(0) = 1$ un qualunque altro valore $t \in \mathbb{R}$ (cfr. il successivo Esercizio 1.6).

Per completare l'esempio, dimostriamo che, anche per un qualunque altro punto $c \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, risulta

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \ .$$

Occorre provare che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U \quad \forall x \in V \setminus \{c\} \ . \tag{1.7}$$

Fissato l'intorno $U \in \mathcal{U}(0)$ si ha ancora la (1.6); ne segue che, in ogni caso, l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in U\}$ è un intorno di $c$; pertanto, per verificare la (1.7), si può prendere come intorno $V$ proprio l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in U\}$ (ovvero uno qualunque degli infiniti intorni di $c$ che sono contenuti in tale insieme).

**Esercizio 1.6.** Sia $t$ un qualunque numero reale e sia $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ t & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Verificare che risulta:

$$\lim_{x\to c} f_t(x) = 0 \quad \forall c \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

**Esempio 1.4.** (La funzione di Dirichlet).

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \ , \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ . \end{cases}$$

Ancora una volta la ricerca del limite $\lim_{x\to c} f(x)$ ha senso per qualunque $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Dimostriamo che, qualunque sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$, la funzione $f$ è oscillante al tendere di $x$ a $c$. Supponiamo, per assurdo, che sia

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \ ,$$

cioè:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \quad : \quad f(V \setminus \{c\}) \subseteq U \; ; \tag{1.8}$$

poichè l'insieme $V \setminus \{c\}$ contiene, in ogni caso, un intervallo e quindi (per la densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) contiene sia numeri razionali che numeri irrazionali, risulta

$$f(V \setminus \{c\}) = \{0, 1\} \; ;$$

pertanto la (1.8) può essere letta:

$$\{0, 1\} \subseteq U \quad \forall U \in \mathcal{U}(L) \; ,$$

ma, qualunque sia l'elemento $L \in \overline{\mathbb{R}}$, è chiaro che quest'ultima affermazione è assurda (si tenga presente il Lemma [S] 5.1 ([1])).

**Esempio 1.5.**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \; , \\ 3 & \text{se } x = 0 \; , \\ 2x & \text{se } x > 0 \; . \end{cases}$$

Ancora una volta la ricerca del limite $\lim_{x \to c} f(x)$ ha senso per qualunque $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si hanno i seguenti risultati:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \in ]-\infty, 0] \cup \{-\infty\} \; , \\ 2c & \text{se } c \in ]0, +\infty[ \; , \\ +\infty & \text{se } c = +\infty \; . \end{cases}$$

Lo studente compirà un utile esercizio a rendersi conto "graficamente" dei risultati enunciati: si tratta di disegnare il grafico di $f$ e quindi seguire il "movimento" della variabile dipendente (sull'asse $y$) corrispondente al movimento (sull'asse $x$) della variabile indipendente $x$ che si avvicina a $c$ assumendo valori diversi da $c$. Ovviamente questa procedura grafica non costituisce una prova dei risultati, ma è soltanto un indizio.

Supponiamo che sia $c \in ]-\infty, 0] \cup \{-\infty\}$ e dimostriamo che

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \; ,$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \quad : \quad |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in V \setminus \{c\} \; . \tag{1.9}$$

---

([1]) [S] indica il capitolo riguardante le successioni e tutte le citazioni che iniziano con [S] si riferiscono a tale capitolo; "Lemma [S] 5.1" significa, pertanto, "Lemma 5.1 di [S].

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione $|f(x)| < \varepsilon$. Ovviamente dobbiamo distinguere i tre casi che figurano nella legge di $f$. Otteniamo che:

– i numeri $x < 0$ sono soluzioni della disequazione;
– il numero $x = 0$ è soluzione se e soltanto se $\varepsilon > 3$;
– se $x > 0$, allora $|f(x)| < \varepsilon \Longleftrightarrow 2x < \varepsilon \Longleftrightarrow x < \frac{\varepsilon}{2}$ .

In conclusione, denotato con $S$ l'insieme delle soluzioni della disequazione $|f(x)| < \varepsilon$, risulta:

$$S = \begin{cases} ]-\infty, \frac{\varepsilon}{2}[ & \text{se } \varepsilon > 3 \ , \\ ]-\infty, \frac{\varepsilon}{2}[\setminus\{0\} & \text{se } 0 < \varepsilon \leq 3 \ . \end{cases}$$

Ne segue che, se $c \in ]-\infty, 0[ \cup \{-\infty\}$, l'insieme $S$ è, qualunque sia $\varepsilon > 0$, un intorno di $c$, pertanto, per verificare la (1.9), possiamo prendere $V = S$. Invece, nel caso $c = 0$, è chiaro che, qualunque sia $\varepsilon > 0$, possiamo prendere $V = ]-\infty, \frac{\varepsilon}{2}[$.

Supponiamo adesso che sia $c \in ]0, +\infty[$ e dimostriamo che

$$\lim_{x \to c} f(x) = 2c \ ,$$

cioè

(1.10) $$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ \ : \ \ |f(x) - 2c| < \varepsilon \quad \forall x \in V \setminus \{c\} \ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione $|f(x) - 2c| < \varepsilon$. Otteniamo che:

– i numeri $x < 0$ sono soluzioni della disequazione se e soltanto se $|-2c| < \varepsilon$, cioè $c < \frac{\varepsilon}{2}$;
– il numero $x = 0$ è soluzione se e soltanto se $|3 - 2c| < \varepsilon$;
– se $x > 0$, allora $|f(x) - 2c| < \varepsilon \Longleftrightarrow |2x - 2c| < \varepsilon \Longleftrightarrow x \in I(c, \frac{\varepsilon}{2})$ .

Indichiamo con $S$ l'insieme delle soluzioni della disequazione. Per i nostri scopi non è necessario determinare con esattezza $S$, ma basta osservare che, in ogni caso, $S$ contiene l'insieme $]0, +\infty[ \cap I(c, \frac{\varepsilon}{2})$, il quale è un intorno di $c$; pertanto, per verificare la (1.10), possiamo prendere $V = ]0, +\infty[ \cap I(c, \frac{\varepsilon}{2})$.

Proviamo, infine, che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

cioè

(1.11) $$\forall k > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(+\infty) \ \ : \ \ f(x) > k \quad \forall x \in V \ .$$

Risolvendo la disequazione $f(x) > k$ otteniamo che:

– i numeri $x < 0$ non sono soluzioni della disequazione;
– il numero $x = 0$ è soluzione se e soltanto se $k < 3$;
– se $x > 0$, allora $f(x) > k \Longleftrightarrow 2x > k \Longleftrightarrow x \in ]\frac{k}{2}, +\infty[$ .

Ne segue che l'insieme $S$ delle soluzioni della disequazione è in ogni caso, un intorno di $+\infty$ (dato che contiene l'intervallo $]\frac{k}{2}, +\infty[$), pertanto, per verificare la (1.11), possiamo prendere $V = S$.

**Esempio 1.6.**

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{x} = 2$$
(la ricerca del limite ha senso perchè il dominio della funzione $\frac{3x-1}{x}$ è l'insieme $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\overline{\mathrm{D}}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \overline{\mathbb{R}}$).

Occorre provare che:
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists V\in\mathcal{U}(1) \quad : \quad \left|\frac{3x-1}{x}-2\right|<\varepsilon \quad \forall x\in V\cap(\mathbb{R}\setminus\{0\})\setminus\{1\}\ , \tag{1.12}$$
cioè: "per ogni $\varepsilon>0$ l'insieme $S$ delle soluzioni della disequazione
$$\left|\frac{3x-1}{x}-2\right|<\varepsilon \tag{1.13}$$
contiene un insieme del tipo
$$V\cap(\mathbb{R}\setminus\{0\})\setminus\{1\} \ = \ V\setminus\{0,1\}\ ,$$
essendo $V\in\mathcal{U}(1)$".

Fissato $\varepsilon>0$, risolviamo la (1.13). Otteniamo:
$$\left|\frac{3x-1}{x}-2\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{3x-1-2x}{x}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{x-1}{x}\right|<\varepsilon \iff$$
$$\iff \left|1-\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon \iff 1-\varepsilon<\frac{1}{x}<1+\varepsilon\ ,$$
e, considerando separatamente le due disequazioni:
$$1-\varepsilon<\frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{x}<1+\varepsilon\ ,$$
troviamo che l'insieme delle soluzioni della prima è (2)
$$S' \ = \begin{cases} ]-\infty,\frac{1}{1-\varepsilon}[\cup]0,+\infty[ & \text{se } 1-\varepsilon<0\ \ , \\ ]0,+\infty[ & \text{se } 1-\varepsilon=0\ \ , \\ ]0,\frac{1}{1-\varepsilon}[ & \text{se } 1-\varepsilon>0\ \ , \end{cases}$$
mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è
$$S'' = \,]-\infty,0[\cup]\frac{1}{1+\varepsilon},+\infty[\ .$$

(2) Si consiglia di risolvere entrambe le disequazioni "graficamente" (cioè utilizzando il grafico della funzione $\frac{1}{x}$).

Notiamo che, qualunque sia $\varepsilon > 0$, gli insiemi $S'$ e $S''$ sono entrambi intorni di 1; ne segue che anche l'insieme $S = S' \cap S''$ (cioè l'insieme delle soluzioni della (1.13)) è un intorno di 1; pertanto, per verificare la (1.12), possiamo prendere $V = S$.

**Esempio 1.7.**

Consideriamo ancora la funzione dell'esempio precedente e verifichiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x} = 3 \ .$$

Occorre provare che:

$$(1.14) \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists V \in \mathcal{U}(-\infty) \quad : \quad \left|\frac{3x-1}{x} - 3\right| < \varepsilon \quad \forall x \in V \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\}) = V\setminus\{0\} \ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$ si ha:

$$\left|\frac{3x-1}{x} - 3\right| < \varepsilon \iff \left|-\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |x| > \frac{1}{\varepsilon} \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right[ \cup \left]\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right[ \ ;$$

pertanto, essendo l'insieme $S = \left]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right[ \cup \left]\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right[$ un intorno di $-\infty$, per verificare la (1.14) basta prendere $V = S$.

**Esempio 1.8.**

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-1}{x^2} = -\infty$$

(il dominio della funzione $\frac{3x^2-1}{x^2}$ è l'insieme $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\overline{\mathrm{D}}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \overline{\mathbb{R}}$, pertanto la ricerca del limite ha senso).

Occorre provare che:

$$(1.15) \qquad \forall k > 0 \quad \exists V \in \mathcal{U}(0) \quad : \quad \frac{3x^2-1}{x^2} < -k \quad \forall x \in V \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})\setminus\{0\} \ = V\setminus\{0\} \ .$$

Fissato $k > 0$, si ha:

$$\frac{3x^2-1}{x^2} < -k \iff \frac{3x^2-1+kx^2}{x^2} < 0 \iff \begin{cases} (3+k)x^2 - 1 & < 0 \\ \quad x & \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 & < \frac{1}{3+k} \\ x & \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| & < \frac{1}{\sqrt{3+k}} \\ x & \neq 0 \end{cases} \iff x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3+k}}, \frac{1}{\sqrt{3+k}}\right[ \setminus \{0\} \ ;$$

pertanto, per verificare la (1.15), possiamo prendere come intorno $V$ l'intorno circolare $I(0, \frac{1}{\sqrt{3+k}}) = \left]-\frac{1}{\sqrt{3+k}}, \frac{1}{\sqrt{3+k}}\right[$.

**Esempio 1.9.**

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \log_{\frac{1}{2}}(5+3^{1-x}) = -\infty$$

(il dominio della funzione considerata è tutto $\mathbb{R}$, pertanto la ricerca del limite ha senso).

Occorre provare che:

$$\forall k>0 \quad \exists V\in\mathcal{U}(-\infty) \quad : \quad \log_{\frac{1}{2}}(5+3^{1-x}) < -k \quad \forall x\in V \ , \tag{1.16}$$

cioè: "per qualsiasi $k>0$ l'insieme $S$ delle soluzioni della disequazione

$$\log_{\frac{1}{2}}(5+3^{1-x}) < -k \tag{1.17}$$

è un intorno di $-\infty$". Infatti, fissato $k>0$, si ha:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5+3^{1-x}) < -k \iff \log_{\frac{1}{2}}(5+3^{1-x}) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \iff 5+3^{1-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \iff$$

$$\iff 3^{1-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} - 5$$

e per l'ultima disequazione vi sono due casi:

i) se $\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} - 5 \le 0$ la disequazione è soddisfatta da qualunque $x\in\mathbb{R}$;

ii) se $\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} - 5 > 0$, allora:

$$3^{1-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} - 5 \iff 3^{1-x} > 3^{\log_3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}-5\right)} \iff 1-x > \log_3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} - 5\right) \iff$$

$$x < 1 - \log_3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} - 5\right) \ ;$$

in ogni caso l'insieme delle soluzioni della (1.17) è un intorno di $-\infty$, sicchè la (1.16) è verificata.

## 2. I teoremi sui limiti.

Per i limiti delle funzioni valgono teoremi del tutto analoghi a quelli già studiati a proposito delle successioni. L'analogia riguarda sia gli enunciati (fanno eccezione soltanto i teoremi del n. 2.4) che le dimostrazioni. Per quanto concerne queste ultime, ricordiamo (cfr. l'Osservazione 5.1 di [S]) che un punto cruciale nella dimostrazione della maggior parte dei teoremi sulle successioni è l'osservazione che, date due proprietà $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, ciascuna delle quali è vera definitivamente, allora anche la proprietà "$\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$" è vera definitivamente. Tale osservazione continua a valere anche quando si parla dei limiti delle funzioni: si tratta di considerare, invece del massimo tra due indici $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, l'intersezione tra due intorni $V_1$ e $V_2$ di uno stesso elemento $c$ di $\overline{\mathbb{R}}$, intersezione che, come sappiamo, è ancora un intorno di $c$. Per chiarire meglio ciò, consideriamo la situazione illustrata nel seguente esempio.

**Esempio 2.1.** Supponiamo che $f$ e $g$ siano due funzioni definite nello stesso insieme $A$ e che sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Supponiamo, inoltre, che, al tendere di $x$ a $c$, si abbia, definitivamente, $f(x) > 5$ e si abbia pure, definitivamente, $g(x) > 3$. Allora è lecito asserire che, al tendere di $x$ a $c$, è definitivamente soddisfatto il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} f(x) > 5 \\ g(x) > 3 \end{cases} . \tag{2.1}$$

Infatti, l'ipotesi "$f(x) > 5$ definitivamente, per $x \to c$" significa

$$\exists V_1 \in \mathcal{U}(c) \ : \quad f(x) > 5 \quad \forall x \in V_1 \cap A \setminus \{c\} \ ;$$

analogamente, "$g(x) > 3$ definitivamente, per $x \to c$" vuol dire

$$\exists V_2 \in \mathcal{U}(c) \ : \quad g(x) > 3 \quad \forall x \in V_2 \cap A \setminus \{c\} \ ;$$

ne segue che il sistema di disequazioni (2.1) è certamente soddisfatto per ogni $x$ appartenente all'insieme intersezione

$$(V_1 \cap A \setminus \{c\}) \cap (V_2 \cap A \setminus \{c\}) \ ;$$

conseguentemente, dato che, come è facile verificare, risulta

$$(V_1 \cap A \setminus \{c\}) \cap (V_2 \cap A \setminus \{c\}) = (V_1 \cap V_2) \cap A \setminus \{c\} \tag{2.2}$$

e dato che $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}(c)$, si ha che il sistema (2.1) è definitivamente soddisfatto al tendere di $x$ a $c$.

**Esercizio 2.1.** Provare l'uguaglianza insiemistica (2.2).

Ci limiteremo ad esporre le dimostrazioni dei teoremi sui limiti delle funzioni soltanto in alcuni casi: il teorema di unicità del limite, il teorema di locale limitatezza delle funzioni convergenti (Teorema 2.4) ed uno dei teoremi sulla funzione prodotto; questi pochi casi sono però sufficientemente esplicativi di come le dimostrazioni riguardanti le funzioni si possano ricavare dalle corrispondenti dimostrazioni relative alle successioni. Invitiamo lo studente volenteroso, una volta impadronitosi del meccanismo, a svolgere qualche altra dimostrazione.

### 2.1. Unicità del limite.

**Teorema 2.1.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Supponiamo che risulti:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L_1 \ , \quad \lim_{x \to c} f(x) = L_2 \ ,$$

*essendo $L_1, L_2$ elementi di $\overline{\mathbb{R}}$. Allora $L_1 = L_2$.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi si ha $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$, cioè

$$\forall U_1 \in \mathcal{U}(L_1) \ \ \exists V_1 \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U_1 \ \ \forall x \in V_1 \cap A \setminus \{c\} \ , \tag{2.3}$$

e $\lim_{x\to c} f(x) = L_2$, cioè

$$\forall U_2 \in \mathcal{U}(L_2) \ \ \exists V_2 \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U_2 \ \ \forall x \in V_2 \cap A \setminus \{c\} \ . \tag{2.4}$$

Dalla (2.3) e dalla (2.4), indicando con $W$ l'intersezione $V_1 \cap V_2$, segue (si tenga presente la (2.2)) che per ogni $x \in W \cap A \setminus \{c\}$ sono vere entrambe le affermazioni: $f(x) \in U_1$ e $f(x) \in U_2$, cioè è vero che $f(x) \in U_1 \cap U_2$. In definitiva, dato che $W = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}(c)$, possiamo asserire che

$$\forall U_1 \in \mathcal{U}(L_1), \ \forall U_2 \in \mathcal{U}(L_2) \ \ \exists W \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U_1 \cap U_2 \ \ \forall x \in W \cap A \setminus \{c\} \ ;$$

da ciò, in particolare, essendo $W \cap A \setminus \{c\} \neq \emptyset$ (dato che $c \in \overline{\mathrm{D}}A$), si deduce che

$$\forall U_1 \in \mathcal{U}(L_1), \ \forall U_2 \in \mathcal{U}(L_2) \quad \Longrightarrow \quad U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \ ;$$

ma, per il Lemma [S] 5.1, la precedente affermazione è possibile solo a patto che $L_1 = L_2$.

### 2.2. Permanenza del segno.

**Teorema 2.2.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Supponiamo che risulti*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \ .$$

*Allora la funzione $f$ assume definitivamente, al tendere di $x$ a $c$, valori dello stesso segno di $L$, cioè*

$$\exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ f(x) \text{ ha lo stesso segno di } L \ \ \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \ .$$

### 2.3. I teoremi del confronto.

Ci limitiamo a dare l'enunciato del teorema relativo al caso della convergenza (il teorema "dei carabinieri"), lasciando per esercizio allo studente il compito di formulare gli enunciati riguardanti i casi della divergenza a $+\infty$ e a $-\infty$.

**Teorema 2.3.** *Siano $f$, $g$ e $h$ tre funzioni definite nello stesso insieme $A$ e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Supponiamo che sia verificata la catena di disuguaglianze:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A \setminus \{c\} \ .$$

*Supponiamo inoltre che risulti:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = a \in \mathbb{R} \ .$$

*Allora anche la funzione $g$ è convergente al numero $a$ al tendere di $x$ a $c$.*

**Esercizio 2.2.** Scrivere gli enunciati dei teoremi del confronto per i casi della divergenza a $+\infty$ e a $-\infty$.

## 2.4. Regolarità e locale limitatezza.

I teoremi che seguono sono gli analoghi dei teoremi esposti nel n. 6.4 di [S] per le successioni.

Come abbiamo già segnalato all'inizio del paragrafo, in questo caso vi è difformità tra gli enunciati dei teoremi sulle successioni e quelli dei teoremi sulle funzioni. Infatti, mentre è vero che "Se una successione è convergente , essa è limitata" (Teorema [S] 6.5), la medesima affermazione, se riferita ad una funzione $f$, può essere falsa. Ad esempio, la funzione identità $f(x) = x$ (definita in $\mathbb{R}$) è convergente al tendere di $x$ a $c$, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, ma tale funzione, considerata in tutto il suo dominio, non è limitata nè superiormente nè inferiormente.

Invece, ciò che è lecito asserire per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, convergente al tendere di $x$ a $c$, è che $f$ è "*localmente limitata*", cioè è limitata la sua restrizione all'intersezione del dominio $A$ con un opportuno intorno di $c$. Infatti, se è $\lim_{x \to c} f(x) = a \in \mathbb{R}$, allora, per la definizione di limite, in corrispondenza del numero positivo $\varepsilon = 1$ esiste un intorno $V$ di $c$ tale che $a - 1 < f(x) < a + 1 \ \forall x \in V \cap A \setminus \{c\}$; ciò dice che la restrizione $f|_{V \cap A \setminus \{c\}}$ è limitata; ovviamente è pure limitata la restrizione $f|_{V \cap A}$, il cui codominio, rispetto a quello di $f|_{V \cap A \setminus \{c\}}$, può al massimo avere un solo elemento in più: il numero $f(c)$. Abbiamo in questo modo dimostrato il

**Teorema 2.4.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Supponiamo che la funzione $f$ sia convergente al tendere di $x$ a $c$. Allora esiste $V \in \mathcal{U}(c)$ tale che la restrizione $f|_{V \cap A}$ è limitata.*

Analogamente, si ha il seguente teorema riguardante il caso della divergenza a $+\infty$.

**Teorema 2.5.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Supponiamo che la funzione $f$ sia divergente a $+\infty$ al tendere di $x$ a $c$. Allora sono vere le seguenti affermazioni:*

i) *esiste $V \in \mathcal{U}(c)$ tale che la restrizione $f|_{V \cap A}$ è limitata inferiormente;*

ii) *comunque si scelga un intorno $W \in \mathcal{U}(c)$, la restrizione $f|_{W \cap A}$ non è limitata superiormente.*

**Esercizio 2.3.** Dimostrare il Teorema 2.5.

**Esercizio 2.4.** Scrivere l'enunciato dell'analogo del teorema 2.5 nel caso della divergenza a $-\infty$.

### 2.5. Limiti delle funzioni monotone.

Per semplificare l'esposizione ci limitiamo a considerare funzioni definite in un intervallo $I$ di $\mathbb{R}$. È immediato verificare che, di qualunque tipo sia l'intervallo $I$ (limitato, non limitato, chiuso, aperto, ecc.), denotati con $\alpha$ e $\omega$, rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $I$ (finiti o no), risulta

$$\overline{\mathrm{D}}I = I \cup \{\alpha, \omega\} \ ,$$

quindi, in particolare, ha senso la ricerca del limite della funzione $f$ sia per $x$ che tende ad $\alpha$ che per $x$ che tende ad $\omega$. Se la funzione $f$ è monotona entrambi i limiti suddetti esistono. Precisamente si ha il seguente teorema.

**Teorema 2.6.** *Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$, con $\alpha = \inf I$ , $\omega = \sup I$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che la funzione $f$ sia crescente* [risp. *decrescente*]*. Allora esistono entrambi i limiti*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to\omega} f(x)$$

*e risulta*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \inf_{x\in I\setminus\{\alpha\}} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to\omega} f(x) = \sup_{x\in I\setminus\{\omega\}} f(x)$$

$$[\text{risp. } \lim_{x\to\alpha} f(x) = \sup_{x\in I\setminus\{\alpha\}} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to\omega} f(x) = \inf_{x\in I\setminus\{\omega\}} f(x) \ ] \ .$$

**Osservazione 2.1.** Il seguente esempio serve a capire bene che in generale non è lecito sostituire nel precedente enunciato l'estremo inferiore (o superiore) della restrizione della funzione $f$ all'insieme $I \setminus \{\alpha\}$ oppure $I \setminus \{\omega\}$ con l'estremo inferiore (o superiore) di $f$ in tutto l'intervallo $I$ (ciò è ovviamente possibile quando $\alpha \notin I$ oppure $\omega \notin I$)

**Esempio 2.2.** Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x = -1, \\ x & \text{se } -1 < x < 1, \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente (può essere utile disegnare il grafico di $f$) che la funzione $f$ è fortemente crescente in $[-1, 1]$ e che risulta

$$\inf_{[-1,1]} f = \min_{[-1,1]} f = -2 \ , \quad \sup_{[-1,1]} f = \max_{[-1,1]} f = 2 \ .$$

Si ha invece

$$\inf_{]-1,1]} f = -1 \ , \quad \sup_{[-1,1[} f = 1$$

e quindi, per il Teorema 2.6,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1 \ , \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 1 \ .$$

**Esercizio 2.5.** Verificare le precedenti relazioni di limite adoperando la definizione di limite.

## 2.6. Limiti ed operazioni aritmetiche.

I concetti di *funzione somma, funzione prodotto,* ecc. generalizzano in modo ovvio gli analoghi concetti introdotti a proposito delle successioni. Ad esempio, se $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni aventi il medesimo dominio $A$, la *funzione somma delle funzioni* $f$ *e* $g$ (che si denota con il simbolo $f+g$) è la funzione, definita in $A$ ed a valori in $\mathbb{R}$, che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere il numero $f(x)+g(x)$ (la somma dei due corrispondenti di $x$ tramite $f$ e $g$).

Come abbiamo già avuto occasione di dire, i teoremi relativi al limite della funzione somma $f+g$, della funzione prodotto $fg$, della funzione $|f|$, della funzione $\frac{1}{f}$ e della funzione rapporto $\frac{f}{g}$ sono del tutto simili, sia nell'enunciato che nella dimostrazione, ai corrispondenti teoremi per le successioni esposti nel paragrafo 8 di [S]. Ci limitiamo pertanto a dare un solo gruppo di enunciati (quelli relativi alla funzione prodotto) e a presentare una sola dimostrazione (quella relativa al caso del prodotto di due funzioni convergenti), lasciando allo studente il compito di formulare gli altri enunciati. Lo studente compirà anche un utilissimo esercizio svolgendo qualche altra dimostrazione.

**Teorema 2.7.** *Siano* $f$ *e* $g$ *due funzioni definite nello stesso insieme* $A$ *e sia* $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. *Valgono allora le seguenti implicazioni:*

$$1) \ \lim_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R} \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = b \in \mathbb{R} \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = ab \ ;$$

$$2_1) \ \lim_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R}, \ a > 0 \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = +\infty \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = +\infty \ ;$$

$$2_2) \ \lim_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R}, \ a > 0 \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = -\infty \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = -\infty \ ;$$

$$2_3) \ \lim_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R}, \ a < 0 \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = +\infty \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = -\infty \ ;$$

$$2_4) \ \lim_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R}, \ a < 0 \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = -\infty \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = +\infty \ ;$$

$$3_1) \ \lim_{x\to c} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = +\infty \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = +\infty \ ;$$

$$3_2) \ \lim_{x\to c} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = -\infty \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = -\infty \ ;$$

$$3_3) \ \lim_{x\to c} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to c} g(x) = -\infty \implies \lim_{x\to c} f(x)g(x) = +\infty \ .$$

*Dimostrazione della* 1). Scriviamo in maniera esplicita le ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists V_1 \in \mathcal{U}(c) \;:\; |f(x) - a| < \varepsilon \;\; \forall x \in V_1 \cap A \setminus \{c\} \;, \tag{2.5}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists V_2 \in \mathcal{U}(c) \;:\; |g(x) - b| < \varepsilon \;\; \forall x \in V_2 \cap A \setminus \{c\} \tag{2.6}$$

e la tesi:

$$\forall \eta > 0 \;\; \exists W \in \mathcal{U}(c) \;:\; |f(x)g(x) - ab| < \eta \;\; \forall x \in W \cap A \setminus \{c\} \;. \tag{2.7}$$

Ricordiamo inoltre che, per il Teorema 2.4, la funzione $f$ è localmente limitata al tendere di $x$ a $c$, cioè

$$\exists V_3 \in \mathcal{U}(c) \;,\; \exists H > 0 \;:\; |f(x)| \leq H \quad \forall x \in V_3 \cap A \;. \tag{2.8}$$

Dalle (2.5), (2.6) e (2.8), ponendo $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$, segue che per ogni $x \in V \cap A \setminus \{c\}$ sono verificate tutte e tre le disuguaglianze

$$|f(x) - a| < \varepsilon \;,\; |g(x) - b| < \varepsilon \;,\; |f(x)| \leq H$$

e pertanto si ha

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - f(x)b + f(x)b - ab| = \\ &= |f(x)[g(x) - b] + b[f(x) - a]| \leq |f(x)[g(x) - b]| + |b[f(x) - a]| = \\ &= |f(x)||g(x) - b| + |b||f(x) - a| \leq H|g(x) - b| + |b||f(x) - a| < (H + |b|)\varepsilon \;. \end{aligned}$$

Ricapitolando, dalle ipotesi abbiamo dedotto che:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \;:\; |f(x)g(x) - ab| < (H + |b|)\varepsilon \;\; \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \;. \tag{2.9}$$

A questo punto, per provare la validità della (2.7), basta fare il seguente ragionamento: fissato un qualunque numero positivo $\eta$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $(H + |b|)\varepsilon \leq \eta$ (ciò è possibile); in corrispondenza di tale numero $\varepsilon$ la (2.9) ci assicura l'esistenza di $V \in \mathcal{U}(c)$ tale che

$$|f(x)g(x) - ab| < (H + |b|)\varepsilon \leq \eta \;\; \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \;;$$

è allora evidente che per verificare la (2.7) basta prendere come $W$ un qualunque intorno di $c$ tale che $W \subseteq V$.

## 3. I limiti delle funzioni elementari.

In questo paragrafo effettuiamo lo studio di tutti i possibili limiti (cioè di tutti i limiti che ha senso considerare) per le principali funzioni elementari (esponenziale, logaritmo, potenza e funzioni trigonometriche).

È utile che lo studente provi ogni volta a prevedere i risultati, prima di leggerli, disegnando il grafico della funzione in esame (si tratta di grafici che dovrebbero essere stati imparati a memoria) e cercando di visualizzare, sull'asse delle ordinate, il movimento della variabile indipendente $f(x)$ corrispondente al movimento, sull'asse delle ascisse, della variabile indipendente $x$ che tende a $c$.

### 3.1. La funzione esponenziale.

Il dominio della funzione esponenziale $a^x$ (dove $a$ è un assegnato numero reale, positivo e diverso da 1) è tutto $\mathbb{R}$, quindi la ricerca del limite $\lim_{x\to c} a^x$ ha senso per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si hanno i seguenti risultati:

– se $a > 1$, allora
$$\lim_{x\to c} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } c = +\infty, \\ a^c & \text{se } c \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{se } c = -\infty; \end{cases}$$

– se $0 < a < 1$, allora
$$\lim_{x\to c} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } c = +\infty, \\ a^c & \text{se } c \in \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{se } c = -\infty. \end{cases}$$

Dimostriamo quanto asserito nel caso $a > 1$.

Verifichiamo dapprima che
$$\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty \ .$$

Occorre provare che

$$\forall k > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(+\infty) \ : \ \ a^x > k \quad \forall x \in V \ . \tag{3.1}$$

Fissato $k > 0$, risolviamo la disequazione $a^x > k$. Otteniamo:

$$a^x > k \iff a^x > a^{\log_a k} \iff x > \log_a k \iff x \in ]\log_a k, +\infty[ \ ;$$

pertanto, essendo l'intervallo $]\log_a k, +\infty[$ un intorno di $+\infty$, per provare la validità della (3.1) basta prendere $V = ]\log_a k, +\infty[$.

Verifichiamo adesso che, se $c \in \mathbb{R}$, risulta:

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = a^c \ .$$

Occorre provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ a^c - \varepsilon < a^x < a^c + \varepsilon \quad \forall x \in V \setminus \{c\} \ . \tag{3.2}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo il sistema di disequazioni

$$a^c - \varepsilon < a^x < a^c + \varepsilon \ . \tag{3.3}$$

Per la disequazione $a^c - \varepsilon < a^x$ occorre distinguere due casi:

i) se $a^c - \varepsilon \leq 0$ la disequazione $a^c - \varepsilon < a^x$ è soddisfatta da qualunque $x \in \mathbb{R}$;

ii) se $a^c - \varepsilon > 0$ si ha:

$$a^c - \varepsilon < a^x \iff a^{\log_a(a^c-\varepsilon)} < a^x \iff \log_a(a^c - \varepsilon) < x \ .$$

Per la disequazione $a^x < a^c + \varepsilon$ si ha :

$$a^x < a^c + \varepsilon \iff a^x < a^{\log_a(a^c+\varepsilon)} \iff x < \log_a(a^c + \varepsilon) \ .$$

Ritornando al sistema (3.3), denotato con $S$ l'insieme delle soluzioni di tale sistema, si hanno i seguenti due casi:

j) se $a^c - \varepsilon \leq 0$, allora $S = ]-\infty, \log_a(a^c + \varepsilon)[$ ; si ha inoltre $c \in S$ (infatti, essendo la funzione $\log_a t$ fortemente crescente, risulta $c = \log_a a^c < \log_a(a^c + \varepsilon)$ );

jj) se $a^c - \varepsilon > 0$, allora, tenuto conto della catena di disuguaglianze $\log_a(a^c - \varepsilon) < \log_a a^c = c < \log_a(a^c + \varepsilon)$ , si ha che $S = ]\log_a(a^c - \varepsilon), \log_a(a^c + \varepsilon)[$ e inoltre $c \in S$ .

Abbiamo così verificato che, qualunque sia $\varepsilon > 0$, l'insieme $S$ delle soluzioni del sistema (3.3) è un intervallo aperto contenente $c$ e quindi è un intorno di $c$. È evidente allora che la (3.2) è vera: basta prendere come intorno $V$ proprio l'insieme $S$.

Verifichiamo infine che

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \ .$$

Occorre provare che

(3.4) $$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(-\infty) \ : \ |a^x| < \varepsilon \quad \forall x \in V \ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, si ha:

$$|a^x| < \varepsilon \iff a^x < \varepsilon \iff a^x < a^{\log_a \varepsilon} \iff x \in ]-\infty, \log_a \varepsilon[ \ ;$$

essendo l'intervallo $]-\infty, \log_a \varepsilon[$ un intorno di $-\infty$, ne segue che la (3.4) è vera: basta prendere come intorno $V$ l'intervallo $]-\infty, \log_a \varepsilon[$.

Lasciamo allo studente il compito di eseguire le verifiche nel caso $0 < a < 1$; il procedimento è del tutto analogo a quello del caso $a > 1$ (naturalmente, nella risoluzione delle disequzioni, si dovrà tenere presente che questa volta sia la fuzione esponenziale $a^x$ che la funzione $\log_a t$ sono fortemente decrescenti).

**Osservazione 3.1.** Un modo alternativo (e più sbrigativo) di provare i risultati relativi al caso $0 < a < 1$, una volta che si hanno a disposizione i risultati riguardanti il caso in cui la base dell'esponenziale è maggiore di 1, è quello di fare ricorso ai teoremi sui limiti; infatti, dato che

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e che da $0 < a < 1$ segue $\frac{1}{a} > 1$, è chiaro che basta applicare i teoremi sul limite della funzione $\frac{1}{f}$. Ad esempio, se $c \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\lim_{x\to c} a^x = \lim_{x\to c} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^c} = a^c \ .$$

### 3.2. La funzione logaritmo.

Il dominio della funzione $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) è l'intervallo $]0, +\infty[$, pertanto la ricerca del limite $\lim_{x\to c} \log_a x$ ha senso per ogni $c \in [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$.

Si hanno i seguenti risultati:

– se $a > 1$, allora

$$\lim_{x\to c} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } c = +\infty, \\ \log_a c & \text{se } c \in ]0, +\infty[, \\ -\infty & \text{se } c = 0; \end{cases}$$

– se $0 < a < 1$, allora

$$\lim_{x\to c} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } c = +\infty, \\ \log_a c & \text{se } c \in ]0, +\infty[, \\ +\infty & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Dimostriamo qualcuno dei risultati relativi al caso $0 < a < 1$. (Teniamo presente che in questo caso sia la funzione logaritmo $\log_a x$ che la funzione esponenziale $a^t$ sono fortemente decrescenti.)

Verifichiamo che, se $c \in ]0, +\infty[$, risulta:

$$\lim_{x\to c} \log_a x = \log_a c \ .$$

Occorre provare che

$$(3.5) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ |\log_a x - \log_a c| < \varepsilon \quad \forall x \in V \cap ]0, +\infty[ \setminus \{c\} \ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione

$$(3.6) \qquad |\log_a x - \log_a c| < \varepsilon \ ;$$

otteniamo:

$$|\log_a x - \log_a c| < \varepsilon \iff |\log_a \frac{x}{c}| < \varepsilon \iff$$

$$\iff -\varepsilon < \log_a \frac{x}{c} < \varepsilon \iff \log_a a^{-\varepsilon} < \log_a \frac{x}{c} < \log_a a^{\varepsilon} \iff$$

$$\iff a^{-\varepsilon} > \frac{x}{c} > a^{\varepsilon} \iff ca^{-\varepsilon} > x > ca^{\varepsilon} \ .$$

Essendo $a^\varepsilon < a^0 = 1 < a^{-\varepsilon}$ (e quindi $ca^\varepsilon < c < ca^{-\varepsilon}$), concludiamo che l'insieme delle soluzioni della (3.6) è l'intervallo aperto $]ca^\varepsilon, ca^{-\varepsilon}[$ e che il numero $c$ è un elemento di tale intervallo, dunque $]ca^\varepsilon, ca^{-\varepsilon}[\in \mathcal{U}(c)$; pertanto, per confermare la validità della (3.5), basta prendere come intorno $V$ l'intervallo $]ca^\varepsilon, ca^{-\varepsilon}[$ .

Verifichiamo adesso che

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1) \ .$$

Occorre provare che

$$(3.7) \qquad \forall k > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(0) \ : \ \log_a x > k \ \ \forall x \in V\cap]0, +\infty[ \ .$$

Fissato $k > 0$, risolviamo la disequazione

$$\log_a x > k \ ;$$

otteniamo:

$$\log_a x > k \iff \log_a x > \log_a a^k \iff 0 < x < a^k \ ;$$

è allora facile convincersi che, per provare la validità della (3.7), si può prendere come $V$ l'intorno circolare $I(0, a^k)$.

Lasciamo allo studente il compito di provare l'altra relazione di limite

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1)$$

e tutte quelle che riguardano il caso $a > 1$.

**Osservazione 3.2.** Anche per la funzione logaritmo si ha che i risultati relativi ad uno dei due casi "$a > 1$" oppure "$0 < a < 1$" possono essere ricavati immediatamente da quelli riguardanti l'altro caso mediante l'applicazione dei teoremi sui limiti; basta tenere presente che, qualunque sia $a > 0, a \neq 1$, risulta

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \ .$$

### 3.3. La funzione potenza.

Sia il dominio che la legge di definizione della funzione potenza $x^p$ $(p \in \mathbb{R})$ dipendono dall'esponente $p$; conviene pertanto distinguere e trattare separatamente vari casi.

1) *L'esponente $p$ è un numero intero positivo: $p = n \in \mathbb{N}^+$.*

In questo caso dom $x^n = \mathbb{R}$ e

$$x^n \stackrel{\text{def.}}{=} \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ fattori}} \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Di conseguenza la ricerca del limite $\lim_{x\to c} x^n$ ha senso per qualunque $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e, ricordando i risultati relativi alla funzione $x$ (Esempio 1.1) ed applicando i teoremi sulla funzione prodotto, si trova:

$$\lim_{x\to c} x^n = c^n \quad \forall c \in \mathbb{R} ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

2) *L'esponente $p$ è un numero intero non positivo: $p = m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^+$.*

In questo caso dom $x^m = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$x^0 \stackrel{\text{def.}}{=} 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

$$x^m \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{x^{-m}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} , \qquad \text{se} \;\; m < 0 .$$

La ricerca del limite $\lim_{x\to c} x^m$ ha senso per qualunque $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $m = 0$ si verifica facilmente (usando la definizione di limite) che

$$\lim_{x\to c} x^0 = 1 \quad \forall c \in \overline{\mathbb{R}} .$$

Se $m < 0$, utilizzando i risultati ottenuti nel caso 1) ed applicando i teoremi sul limite della funzione $\frac{1}{f}$, si ottiene:

$$\lim_{x\to c} x^m = c^n \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^m = \lim_{x\to-\infty} x^m = 0 .$$

Per quanto riguarda il limite al tendere di $x$ a 0 si ha:

$$\lim_{x\to 0} |x^m| = +\infty ;$$

da ciò, tenendo presente il segno della funzione $x^m$, si deduce che

$$\lim_{x\to 0} x^m \begin{cases} = +\infty & \text{se } m \text{ è pari,} \\ \text{non esiste} & \text{se } m \text{ è dispari ;} \end{cases}$$

infatti, se $m$ è pari, allora la funzione $x^m$ coincide con la funzione $|x^m|$; invece, se $m$ è dispari, allora per ogni intorno $V$ di 0, la funzione $x^m$ assume nell'insieme $V \setminus \{0\}$ sia valori positivi che negativi, dunque, per il teorema della permanenza del segno, $x^m$ non può essere divergente al tendere di $x$ a 0; d'altra parte, essendo infinitamente grande, la funzione $x^m$ non può neanche essere convergente al tendere di $x$ a 0.

3) *L'esponente $p$ è un numero reale non intero: $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*

In questo caso dom $x^p = ]0, +\infty[$, quindi la ricerca del limite $\lim_{x\to c} x^p$ ha senso per $c \in [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$.

Si hanno i seguenti risultati (ripetiamo l'invito a tenere presenti i grafici):

– se $p > 0$, allora

$$\lim_{x\to c} x^p = \begin{cases} +\infty & \text{se } c = +\infty, \\ c^p & \text{se } c \in ]0, +\infty[, \\ 0 & \text{se } c = 0; \end{cases}$$

– se $p < 0$, allora

$$\lim_{x\to c} x^p = \begin{cases} 0 & \text{se } c = +\infty, \\ c^p & \text{se } c \in ]0, +\infty[, \\ +\infty & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Verifichiamo, ad esempio, che nel caso $p < 0$ si ha

$$\lim_{x\to c} x^p = c^p \quad \forall c \in ]0, +\infty[ \ .$$

Occorre provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ c^p - \varepsilon < x^p < c^p + \varepsilon \ \ \forall x \in V \cap ]0, +\infty[ \setminus \{c\} \ . \tag{3.8}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo il sistema di disequazioni

$$c^p - \varepsilon < x^p < c^p + \varepsilon \ . \tag{3.9}$$

Per la disequazione $c^p - \varepsilon < x^p$ occorre distinguere due casi:

i) se $c^p - \varepsilon \le 0$ la disequazione $c^p - \varepsilon < x^p$ è soddisfatta da qualunque $x \in ]0, +\infty[$;

ii) se $c^p - \varepsilon > 0$ si ha (si tenga presente che, essendo $p < 0$, sia la funzione $x^p$ che la funzione $t^{\frac{1}{p}}$ sono fortemente decrescenti):

$$c^p - \varepsilon < x^p \iff (c^p - \varepsilon)^{\frac{1}{p}} > (x^p)^{\frac{1}{p}} \iff (c^p - \varepsilon)^{\frac{1}{p}} > x > 0 \ .$$

Per la disequazione $x^p < c^p + \varepsilon$ si ha :

$$x^p < c^p + \varepsilon \iff (x^p)^{\frac{1}{p}} > (c^p + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \iff x > (c^p + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Pertanto, ritornando al sistema (3.9), denotato con $S$ l'insieme delle sue soluzioni, abbiamo i seguenti due casi:

j) se $c^p - \varepsilon \leq 0$, allora $S = ]\,(c^p + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}\,, +\infty[$ ; inoltre, il numero $c$ è un elemento di $S$; infatti $c = (c^p)^{\frac{1}{p}} > (c^p + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$ ;

jj) se $c^p - \varepsilon > 0$ si ha la catena di disuguaglianze $(c^p - \varepsilon)^{\frac{1}{p}} > c = (c^p)^{\frac{1}{p}} > (c^p + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$ , pertanto $S = ]\,(c^p + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}\,, (c^p - \varepsilon)^{\frac{1}{p}}\,[$ e $c \in S$.

In definitiva, qualunque sia $\varepsilon > 0$, l'insieme $S$ delle soluzioni di (3.9) è un intervallo aperto contenente $c$ e quindi è un intorno di $c$. È chiaro allora che la (3.8) è verificata: basta prendere come intorno $V$ proprio l'insieme $S$.

**Esercizio 3.1** a) Effettuare le verifiche degli altri due risultati relativi al $\lim_{x\to c} x^p$ nel caso $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $p < 0$

b) Dimostrare i risultati riguardanti il $\lim_{x\to c} x^p$ nel caso $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $p > 0$, ricavandoli, mediante i teoremi sui limiti, da quelli del caso $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $p < 0$.

## 3.4. Le funzioni trigonometriche.

1) *La funzione* $\operatorname{sen} x$.

La funzione $\operatorname{sen} x$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, pertanto ha senso studiarne il limite al tendere di $x$ a $c$, qualunque sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si hanno i seguenti risultati:

i) *se $c \in \mathbb{R}$, la funzione* $\operatorname{sen} x$ *è convergente al tendere di $x$ a $c$ e risulta*

$$\lim_{x\to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c \ ;$$

ii) *se $c = +\infty$ oppure $c = -\infty$, la funzione* $\operatorname{sen} x$ *è oscillante al tendere di $x$ a $c$.*

Dimostriamo l'affermazione i). È sufficiente provare che (si tenga presente la Proposizione [S] 8.1):

$$\lim_{x\to c} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| = 0 \ .$$

Osserviamo a tale scopo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| =$$

(per una delle formule di prostaferesi)

$$= \left|2\cos\frac{x+c}{2}\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\right| = 2\left|\cos\frac{x+c}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\right| \leq$$

(poichè $|\cos t| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

$$\leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\right| \leq$$

(grazie alla disuguaglianza $|\operatorname{sen} t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

$$\leq 2\left|\frac{x-c}{2}\right| = |x-c| \ .$$

Riepilogando, abbiamo dimostrato che:

$$0 \leq |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| \leq |x-c| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ ;$$

di conseguenza, essendo

$$\lim_{x\to c} 0 = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to c} |x-c| = 0 \quad ,$$

per il teorema dei carabinieri possiamo concludere che è anche

$$\lim_{x\to c} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| = 0 \ .$$

Dimostriamo adesso la ii). Osserviamo come prima cosa che, se $V$ è un intorno di $+\infty$, allora l'insieme immagine $\operatorname{sen}(V)$ coincide con l'intervallo $[-1,1]$; infatti $V$ contiene un intervallo del tipo $]a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, e questo, a sua volta, contiene infiniti intervalli del tipo

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2h\pi, \frac{\pi}{2}+2h\pi\right] \ , \quad h \in \mathbb{Z}$$

(tutti quelli che si ottengono per valori di $h$ maggiori di $\frac{a+\frac{\pi}{2}}{2\pi}$); ne segue che

$$[-1,1] = \operatorname{sen}\left(\left[-\frac{\pi}{2}+2h\pi, \frac{\pi}{2}+2h\pi\right]\right) \subseteq \operatorname{sen}(V) \subseteq \operatorname{sen}(\mathbb{R}) = [-1,1] \ ,$$

dunque $\operatorname{sen}(V) = [-1,1]$. Supponiamo adesso, per assurdo, che la funzione $\operatorname{sen} x$ sia regolare al tendere di $x$ a $+\infty$ e che risulti

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = L \in \overline{\mathbb{R}} \ ;$$

ciò significa che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(+\infty) \quad : \quad \operatorname{sen}(V) \subseteq U \ ,$$

vale a dire:

$$[-1,1] \subseteq U \quad \forall U \in \mathcal{U}(L) \ ,$$

ma è chiaro che la precedente affermazione (cioè "ogni intorno di $L$ contiene l'intervallo $[-1,1]$") è falsa.

Abbiamo così provato che la funzione $\operatorname{sen} x$ è oscillante per $x \to +\infty$. In maniera del tutto analoga si dimostra che $\operatorname{sen} x$ è oscillante anche per $x$ che tende a $-\infty$.

2) *La funzione* $\cos x$.

Per la funzione $\cos x$ si hanno dei risulatati analoghi a quelli relativi alla funzione $\operatorname{sen} x$. Precisamente:

i) *se* $c \in \mathbb{R}$, *la funzione* $\cos x$ *è convergente al tendere di* $x$ *a* $c$ *e risulta*

$$\lim_{x \to c} \cos x = \cos c \ ;$$

ii) *se* $c = +\infty$ *oppure* $c = -\infty$, *la funzione* $\cos x$ *è oscillante al tendere di* $x$ *a* $c$.

Le dimostrazioni dei fatti i) e ii) sono simili a quelle svolte per la funzione $\operatorname{sen} x$ (si adoperano le formule di prostaferesi e la disuguaglianza $|\operatorname{sen} t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$ per la i); si effettua un ragionamento per assurdo per la ii)) e sono lasciate per esercizio al lettore.

3) *La funzione* $\operatorname{tg} x$.

La funzione $\operatorname{tg} x$ è definita nell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad ;$$

essendo $\overline{\mathrm{D}}A = \overline{\mathbb{R}}$, anche per la funzione $\operatorname{tg} x$, ha senso lo studio del limite al tendere di $x$ a $c$, qualunque sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si trova che:

i) *se* $c \in A$, *la funzione* $\operatorname{tg} x$ *è convergente al tendere di* $x$ *a* $c$ *e risulta*

$$\lim_{x \to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c \ ;$$

ii) *se* $c \in \mathbb{R} \setminus A$, *la funzione* $\operatorname{tg} x$ *è infinitamente grande ed oscillante al tendere di* $x$ *a* $c$;

iii) *se* $c = +\infty$ *oppure* $c = -\infty$, *la funzione* $\operatorname{tg} x$ *è oscillante al tendere di* $x$ *a* $c$.

Per dimostrare l'affermazione i) basta tenere presente i risultati ottenuti per le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ ed applicare i teoremi sul limite della funzione rapporto:

$$\lim_{x \to c} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to c} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} = \operatorname{tg} c \ .$$

Anche per provare che $\operatorname{tg} x$ è infinitamente grande al tendere di $x$ a $c$, quando $c$ appartiene all'insieme

$$\mathbb{R} \setminus A = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

basta usare i teoremi sulla funzione rapporto (si ha $\lim_{x \to c} \cos x = 0$ mentre il limite del numeratore $\operatorname{sen} x$ è uguale a 1 oppure a $-1$, secondo che il numero $k \in \mathbb{Z}$ per il quale risulta $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sia pari oppure dispari); per provare poi che la funzione è oscillante basta tenerne presente il segno e ragionare come nel caso del limite $\lim_{x \to 0} x^m$, con $m$ intero negativo dispari.

Infine, per dimostrare la iii), non è difficile adattare il ragionamento per assurdo eseguito nel caso della funzione $\operatorname{sen} x$.

4) *La funzione* $\operatorname{cotg} x$.

Lasciamo allo studente il compito di enunciare e verificare i risultati riguardanti al funzione $\operatorname{cotg} x$ (si tratta di svolgere considerazioni perfettamente analoghe a quelle riguardanti la funzione $\operatorname{tg} x$).

## 4. Limiti delle restrizioni e delle funzioni composte.

Questo paragrafo è dedicato all'esposizione di tre teoremi che vengono utilizzati molto frequentemente nello studio dei limiti delle funzioni; si tratta del teorema sui *limiti delle restrizioni* (Teorema 4.1), del teorema sui *limiti delle restrizioni "larghe"* (Teorema 4.3) e di quello sui *limiti delle funzioni composte* (Teorema 4.4).

Due di questi tre teoremi (il 4.1 ed il 4.4) sono generalizzazioni del teorema delle successioni estratte.

### 4.1. Limiti delle restrizioni.

Premettiamo al teorema sui limiti delle restrizioni la seguente proposizione.

**Proposizione 4.1.** *Siano $A, B$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Vale la seguente implicazione:*

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{D}}A \subseteq \overline{\mathrm{D}}B \ .$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che sia $A \subseteq B$ e dimostriamo che ogni elemento $z$ di $\overline{\mathrm{D}}A$ appartiene anche a $\overline{\mathrm{D}}B$. Infatti, se $z \in \overline{\mathrm{D}}A$, si ha che un qualsiasi intorno $U$ di $z$ contiene infiniti elementi di $A$; a maggior ragione, dato che $A \subseteq B$, l'intorno $U$ contiene infiniti elementi di $B$; poichè $U$ è un arbitrario intorno di $z$ ne segue che $z \in \overline{\mathrm{D}}B$.

**Teorema 4.1.** (Limiti delle restrizioni). *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione, sia* $A_1 \subseteq A$ *e sia* $c \in \overline{\mathrm{D}}A_1$ (quindi è pure $c \in \overline{\mathrm{D}}A$). *Se esiste il limite*

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad ,$$

*allora esiste pure il limite*

$$\lim_{x\to c} f|_{A_1}(x)$$

*e risulta*

$$\lim_{x\to c} f|_{A_1}(x) = \lim_{x\to c} f(x) \quad .$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che sia

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

e dimostriamo che è pure

$$\lim_{x\to c} f|_{A_1}(x) = L \quad .$$

Per ipotesi si ha che

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \;\; : \;\; f(x) \in U \quad \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \;;$$

poichè $A_1 \subseteq A$ si ha pure, a maggior ragione,

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \;\; : \;\; f(x) \in U \quad \forall x \in V \cap A_1 \setminus \{c\} \;;$$

ovviamente, la precedente affermazione può anche scriversi

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \;\; : \;\; f|_{A_1}(x) \in U \quad \forall x \in V \cap A_1 \setminus \{c\} \;,$$

ma ciò significa proprio che $\lim_{x\to c} f|_{A_1}(x) = L$ .

**Esempio 4.1.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 3} 5^{\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}} \quad .$$

Il dominio della funzione $5^{\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}}$ è l'intervallo $]0, +\infty[$ (quindi la ricerca del limite ha senso); si ha inoltre, per ogni $x \in ]0, +\infty[$,

$$5^{\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}} = 5^{\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = 5^x \quad ,$$

dunque la funzione $5^{\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}}$ è la restrizione della funzione $5^x$ all'intervallo $]0,+\infty[$. Poichè $\lim_{x\to 3} 5^x = 5^3 = 125$ (cfr. il n. 3.1), grazie al Teorema 4.1 possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 3} 5^{\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 3} 5^x|_{]0,+\infty[} = \lim_{x\to 3} 5^x = 125 \quad .$$

**Esempio 4.2.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\right)$$

(poichè il dominio della funzione $x^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$ è l'intervallo $]0,+\infty[$, la ricerca del limite ha senso).

Osserviamo che la funzione di cui si vuole calcolare il limite è la somma delle due funzioni reali di variabile reale

$$x^2|_{]0,+\infty[} \qquad \text{e} \qquad \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x \quad .$$

Dal n. 3 sappiamo che

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9 \quad , \qquad \lim_{x\to 3} \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 = -2 \quad ; \tag{4.1}$$

per il Teorema 4.1 abbiamo anche

$$\lim_{x\to 3} x^2|_{]0,+\infty[} = 9 \quad ;$$

pertanto, applicando i teoremi sul limite della funzione somma, possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\right) = 9 - 2 = 7 \quad . \tag{4.2}$$

**Esempio 4.3.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2 - 1}$$

(essendo dom $\frac{2^x}{x^2-1} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la ricerca del limite ha senso). Osserviamo che la funzione di cui si cerca il limite è il rapporto delle due funzioni reali di variabile reale

$$2^x|_{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}} \qquad \text{e} \qquad (x^2 - 1)|_{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}} \quad .$$

Dai risultati del n. 3 e dall'Esempio 1.2 abbiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} (-1) = -1$$

e quindi, per i teoremi sul limite della somma, abbiamo pure

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 1) = +\infty \quad ;$$

per il Teorema 4.1 risulta anche

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x|_{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} (x^2-1)|_{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}} = +\infty \quad ,$$

pertanto, per i teoremi sul limite della funzione rapporto, possiamo concludere che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{x^2-1} = 0 \quad .$$

Spesso, in particolar modo nei libri di esercizi, i ragionamenti del tipo di quelli svolti a proposito dei precedenti due esempi vengono sintetizzati sottintendendo l'applicazione del Teorema 4.1. Nel caso dell'Esempio 4.2 una tipica esposizione "abbreviata" potrebbe essere la seguente: "poichè valgono le due relazioni di limite (4.1), allora, per i teoremi sul limite della funzione somma, si ha pure la (4.2)". Anche noi seguiremo talora questa consuetudine di esporre il ragionamento in forma abbreviata. Lo studente deve però imparare a sapere sempre ricostruire il ragionamento completo in tutti i suoi passaggi.

**Esercizio 4.1.** Calcolare i seguenti limiti utilizzando i risultati del n. 3 ed i teoremi sui limiti fin qui studiati. Esporre in dettaglio tutte le tappe del percorso logico seguito per pervenire alla conclusione.

$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty} (x^\pi + x^3 - 1) \quad , \quad \text{b)} \lim_{x\to+\infty} (x^\pi - x^3 - 1) \quad , \quad \text{c)} \lim_{x\to1} \frac{x^2-3}{\log^2 x} \quad ,$$
$$\text{d)} \lim_{x\to4} \frac{\log_2 x + 3}{(x-4)^2(x+1)} \quad , \quad \text{e)} \lim_{x\to0} \frac{\log_2 x + 3}{(x-4)^2(x+1)} \quad .$$

**Osservazione 4.1.** Abbiamo accennato, all'inizio del paragrafo, al fatto che il Teorema 4.1 è una generalizzazione del teorema delle successioni estratte. Per renderci conto di ciò, osserviamo che la successione estratta $\{a_{k_n}\}$ può essere interpretata (anche se ciò, a rigore, non è corretto) come la restrizione della successione $\{a_n\}$ all'insieme degli indici $\{k_n \ : n \in \mathbb{N}\}$, insieme che, come $\mathbb{N}$, ha come unico punto di accumulazione $+\infty$.

Come il torema delle successioni estratte, anche il Teorema 4.1 è suscettibile di una interessante applicazione "in negativo". Precisamente, si ha il seguente teorema, analogo del Teorema [S] 9.4.

**Teorema 4.2.** (Criterio di non regolarità). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A$. Supponiamo che esistano due insiemi $A_1, A_2 \subseteq A$, con $c \in (\overline{\mathrm{D}}A_1) \cap (\overline{\mathrm{D}}A_2)$, tali che le restrizioni $f|_{A_1}$ e $f|_{A_2}$ siano entrambe regolari al tendere di $x$ a $c$, ma abbiano limiti diversi. Allora la funzione $f$ è oscillante al tendere di $x$ a $c$.*

**Esercizio 4.2.** Dimostrare il Teorema 4.2.

**Esempio 4.4.** Diamo un'altra dimostrazione del fatto che la funzione $\operatorname{sen} x$ è oscillante per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ adoperando il Teorema 4.2.

Infatti, considerati gli insiemi

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ \operatorname{sen} x = 1\} = \{\frac{\pi}{2} + 2m\pi \ : \ m \in \mathbb{Z}\} \ , \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ \operatorname{sen} x = -1\} = \{-\frac{\pi}{2} + 2m\pi \ : \ m \in \mathbb{Z}\} \ , \end{aligned}$$

si ha che

$$\sup A_1 = \sup A_2 = +\infty \ ,$$

cioè

$$+\infty \in (\overline{\mathrm{D}}A_1) \cap (\overline{\mathrm{D}}A_2) \ .$$

Applicando il Teorema 4.1 alle due funzioni costanti 1 e $-1$, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x|_{A_1} &= \lim_{x\to+\infty} 1|_{A_1} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \ , \\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x|_{A_2} &= \lim_{x\to+\infty} (-1)|_{A_2} = \lim_{x\to+\infty} (-1) = -1 \ ; \end{aligned}$$

per il Teorema 4.2 possiamo allora concludere che il $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.

Esattamente con le stesse considerazioni si dimostra che non esiste neanche il limite $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$.

Osserviamo che il ruolo delle costanti 1 e -1 nel precedente ragionamento può essere preso da due qualsiasi elementi distinti dell'intervallo $[-1, 1]$ (il codominio della funzione $\operatorname{sen} x$).

**Esercizio 4.3.** Ridimostrare, mediante il Teorema 4.2, che la funzione di Dirichlet (Esempio 1.4) è oscillante al tendere di $x$ a $c$, qualunque sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Esercizio 4.4.** Dimostrare che le funzioni $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ sono tutte prive di limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ adoperando il Teorema 4.2.

## 4.2. Limiti delle restrizioni "larghe".

Il Teorema 4.1, enunciato in maniera grossolana, afferma che :

"*Se esiste il limite della funzione, allora esiste anche il limite della restrizione ed è uguale al limite della funzione*".

L'Esempio 4.4 mostra che, in generale, non è lecito dedurre dall'esistenza del limite di una restrizione l'esistenza del limite della funzione. Ciò è però possibile quando le restrizioni $f|_{A_1}$ che si considerano sono sufficientemente "larghe", nel senso che l'insieme $A_1$ è talmente ampio da contenere tutti i punti di un (opportuno) intorno $W$ di $c$ che si trovano nel dominio di $f$, fatta eccezione, eventualmente, per $c$ stesso.

**Teorema 4.3.** (Limiti delle restrizioni "larghe"). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $A_1 \subseteq A$ e sia $c \in \overline{\mathrm{D}}A_1$* (quindi è pure $c \in \overline{\mathrm{D}}A$). *Supponiamo inoltre che esista $W \in \mathcal{U}(c)$ tale che*

$$(*) \qquad W \cap (A \setminus \{c\}) \subseteq A_1 \quad .$$

*Se esiste il limite*

$$\lim_{x \to c} f|_{A_1}(x) \quad ,$$

*allora esiste pure il limite*

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

*e risulta*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f|_{A_1}(x) \quad .$$

*Dimostrazione.* Osserviamo come prima cosa che dalla (*) segue

$$W \cap A_1 \setminus \{c\} = W \cap A \setminus \{c\} \quad ;$$

infatti, essendo $A_1 \subseteq A$, si ha

$$W \cap A_1 \setminus \{c\} \subseteq W \cap A \setminus \{c\} \quad ;$$

d'altra parte, essendo, ovviamente,

$$W \cap A \setminus \{c\}) \subseteq W \setminus \{c\}$$

e valendo la (*), si ha pure

$$W \cap A \setminus \{c\} \subseteq W \cap A_1 \setminus \{c\} \quad .$$

Supponiamo che sia

$$\lim_{x \to c} f|_{A_1}(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

e dimostriamo che è pure

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad .$$

Per ipotesi si ha che

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(c) \; : \; f|_{A_1}(x) \in U \quad \forall x \in V \cap A_1 \setminus \{c\} \quad ,$$

quindi, a maggior ragione,

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f|_{A_1}(x) \in U \quad \forall x \in (V \cap W) \cap A_1 \setminus \{c\} \quad , \tag{4.3}$$

essendo $W$ l'intorno dell'ipotesi (*). Poichè

$$\begin{aligned} (V \cap W) \cap A_1 \setminus \{c\} \ &= \ V \cap (W \cap A_1 \setminus \{c\}) \ = \\ = \ V \cap (W \cap A \setminus \{c\}) \ &= \ (V \cap W) \cap A \setminus \{c\} \end{aligned}$$

la (4.3) si può anche scrivere

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U \quad \forall x \in (V \cap W) \cap A \setminus \{c\} \quad .$$

Dato che l'insieme $Y = V \cap W$ è un intorno di $c$, in conclusione possiamo affermare che

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists Y \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U \ \ \forall x \in Y \cap A \setminus \{c\} \quad ,$$

ma ciò significa che

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad .$$

**Esempio 4.5.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to -\infty} (x^7 + x^2 + 3)$$

($f(x) = x^7 + x^2 + 3$ , $A = \mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ , dunque la ricerca del limite ha senso). Poichè

$$\lim_{x \to -\infty} x^7 = -\infty \ , \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad ,$$

il limite è inficiato dalla forma indeterminata $-\infty + \infty$. Osserviamo però che, considerato l'insieme $A_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$x^7 + x^2 + 3 = x^7 \left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{3}{x^7}\right) \qquad \forall x \in A_1 \quad ,$$

pertanto, essendo

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{3}{x^7}\right) = 1 + 0 + 0 = 1 \quad ,$$

risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f|_{A_1}(x) = \lim_{x \to -\infty} x^7 \left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{3}{x^7}\right) = -\infty$$

(si noti come nei precedenti passaggi abbiamo adoperato più volte, tacitamente, il Teorema 4.1). Poichè gli insiemi $A$ e $A_1$ verificano le ipotesi del Teorema 4.3 (basta prendere come insieme $W \in \mathcal{U}(-\infty)$ un qualunque intervallo $]-\infty, a[$ con $a < 0$) possiamo concludere che

$$\lim_{x\to-\infty} (x^7 + x^2 + 3) = -\infty \quad .$$

**Esempio 4.6.** (Calcolo dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ , $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ; $P, Q$ polinomi).

La tecnica dell'esempio precedente può essere utilizzata per calcolare il limite, per $x \to -\infty$ oppure per $x \to +\infty$, di un qualunque polinomio $P(x)$ o anche del rapporto tra due polinomi $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Si tratta, ancora una volta, di considerare la restrizione delle funzione $f$, di cui si vuole calcolare il limite, all'insieme $A_1 = A \setminus \{0\}$ (essendo $A = \mathrm{dom} f$), di scrivere tale restrizione mettendo in evidenza la potenza (o le potenze) di $x$ di grado più elevato – così come abbiamo fatto per le successioni (Esempi [S] 8.7 e 8.8) – e di applicare infine il Teorema 4.3.

Calcoliamo, a titolo di esempio, il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7 + 2x^5 + 1}{2x^2 - 3x + 1} \quad .$$

Il dominio della funzione $f(x) = \frac{-4x^7+2x^5+1}{2x^2-3x+1}$ è l'insieme $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$. La restrizione di $f$ all'insieme $A_1 = A \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ può essere scritta nel seguente modo:

$$f|_{A_1}(x) \;=\; \frac{x^7}{x^2} \cdot \frac{-4 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^7}}{2 + \dfrac{-3}{x} + \dfrac{1}{x^2}} \;=\; x^5 \cdot \frac{-4 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^7}}{2 + \dfrac{-3}{x} + \dfrac{1}{x^2}} \qquad \forall x \in A_1 \quad ,$$

pertanto, essendo

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{-4 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^7}}{2 + \dfrac{-3}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{-4+0+0}{2+0+0} = -2 \quad ,$$

si ha che

$$\lim_{x\to-\infty} f|_{A_1}(x) = +\infty \quad .$$

Poichè gli insiemi $A$ e $A_1$ verificano le ipotesi del Teorema 4.3 (basta prendere $W = ]-\infty, a[$, con $a < 0$) possiamo concludere che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7 + 2x^5 + 1}{2x^2 - 3x + 1} \;=\; +\infty \quad .$$

**Esempio 4.7.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^5 - 3x^2 + 1| + x^5 - 3x + 1}{x - 1}$$

(in questo caso $A = \text{dom}f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, quindi il problema della ricerca del limite ha senso). Poichè

$$\lim_{x\to 1}(|x^5 - 3x^2 + 1| + x^5 - 3x + 1) = |1 - 3 + 1| + 1 - 3 + 1 = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 1}(x - 1) = 0 \quad ,$$

il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Se cerchiamo di liberare la legge di $f$ dal valore assoluto, ci imbattiamo nella difficoltà di non sapere risolvere l'equazione di quinto grado $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$. Osserviamo però che

$$\lim_{x\to 1}(x^5 - 3x^2 + 1) = 1 - 3 + 1 = -1 \quad ,$$

quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste $Z \in \mathcal{U}(1)$ tale che

$$x^5 - 3x^2 + 1 < 0 \quad \forall x \in Z \cap A \setminus \{1\} = Z \setminus \{1\} \quad .$$

Posto $A_1 = Z \setminus \{1\}$, è ovvio che gli insiemi $A$ e $A_1$ verificano le ipotesi del Teorema 4.3 (basta prendere come $W$ lo stesso $Z$); si ha inoltre, per ogni $x \in A_1$,

$$\begin{aligned} f|_{A_1}(x) &= \frac{|x^5 - 3x^2 + 1| + x^5 - 3x + 1}{x - 1} = \\ = \frac{-(x^5 - 3x^2 + 1) + x^5 - 3x + 1}{x - 1} &= \frac{3x^2 - 3x}{x - 1} = 3x \quad , \end{aligned}$$

cioè

$$f|_{A_1}(x) = (3x)|_{A_1} \qquad \forall x \in A_1 \quad ,$$

pertanto, applicando il Teorema 4.1 alla funzione $3x$,

$$\lim_{x\to 1} f|_{A_1}(x) = \lim_{x\to 1}(3x)|_{A_1} = \lim_{x\to 1}(3x) = 3 \quad .$$

Grazie al Teorema 4.3 possiamo allora concludere che

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^5 - 3x^2 + 1| + x^5 - 3x + 1}{x - 1} = 3 \quad .$$

**Esempio 4.8.** (Il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ ).

Consideriamo la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ . Il dominio di tale funzione è l'insieme $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , quindi ha senso la ricerca del limite per $x \to 0$. Proviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad .$$

Posto
$$A_1 = A \cap \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad ,$$
ed indicata con $f_1$ la restrizione di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ all'insieme $A_1$, per il Teorema 4.3 è sufficiente provare che
$$\lim_{x\to 0} f_1(x) \;=\; 1$$
(l'ipotesi (*) è soddisfatta prendendo $W = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

È noto dalla Trigonometria che
$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad ;$$
conseguentemente (dividendo per $\operatorname{sen} x > 0$) si ha
$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x} \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad ,$$
da cui, considerando i reciproci,
$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad .$$
Poichè $\cos x$ e $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ sono funzioni pari, la precedente catena di disuguaglianze vale anche per $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ; in conclusione possiamo affermare che
$$\cos x|_{A_1} < f_1(x) < 1|_{A_1} \qquad \forall x \in A_1 \quad .$$
Per il Teorema 4.1 abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \cos x|_{A_1} = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} 1|_{A_1} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad ,$$
pertanto, applicando il teorema dei carabinieri, otteniamo
$$\lim_{x\to 0} f_1(x) \;=\; 1 \quad ,$$
così come volevamo dimostrare.

**Esercizio 4.5.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z}, \\ x^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$
Studiare il $\lim_{x\to c} f(x)$ al variare di $c$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

**Esercizio 4.6.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} & \text{se } x \in ]-\infty, \pi[ \setminus \{0\}, \\ 12 & \text{se } x = 0, \\ x + \cos x & \text{se } x \in [\pi, +\infty[. \end{cases}$$

Studiare il $\lim_{x\to c} f(x)$ al variare di $c$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

### 4.3. Limiti delle funzioni composte.

**Teorema 4.4.** (Limiti delle funzioni composte). *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : C \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale* (per comodità di esposizione indicheremo la variabile indipendente con $x$ nel caso della funzione $f$ e con $y$ nel caso della $g$). *Siano $c \in \overline{\mathrm{D}}A$ e $d \in \overline{\mathrm{D}}C$. Supponiamo inoltre che*

$$(**) \qquad f(A \setminus \{c\}) \subseteq C \setminus \{d\}$$

(quindi il dominio della funzione composta $g \circ f$ è o l'insieme $A \setminus \{c\}$ oppure tutto $A$; in ogni caso $c$ è un punto di accumulazione per l'insieme $\operatorname{dom} g \circ f$) *e che*

$$\lim_{x\to c} f(x) = d \quad . \tag{4.4}$$

*Se esiste il limite*

$$\lim_{y\to d} g(y) \quad ,$$

*allora esiste pure il limite*

$$\lim_{x\to c} (g \circ f)(x)$$

*e si ha*

$$\lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to d} g(y) \quad .$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che sia

$$\lim_{y\to d} g(y) = L \in \overline{\mathbb{R}} \tag{4.5}$$

e dimostriamo che è pure

$$\lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = L \quad .$$

La (4.5) vuol dire che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(d) \ : \ \ g(y) \in U \quad \forall y \in V \cap C \setminus \{d\} \quad . \tag{4.6}$$

Per l'ipotesi (4.4) si ha pure

$$\forall V \in \mathcal{U}(d) \ \ \exists W \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in V \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{c\} \quad ,$$

da cui, tenendo presente l'ipotesi (**), si ottiene

$$\forall V \in \mathcal{U}(d) \ \ \exists W \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in V \cap C \setminus \{d\} \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{c\} \quad . \tag{4.7}$$

Combinando la (4.5) e la (4.7) si ottiene facilmente

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists W \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in U \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{c\} \quad ,$$

cioè

$$\lim_{x \to c} (g \circ f)(x) = L \quad ,$$

come volevamo dimostrare.

In termini intuitivi, anche se non molto precisi, il teorema precedente si può enunciare come segue:

*Data una funzione composta $g(f(x))$, se la funzione "interna" $f(x)$ si comporta, al tendere di $x$ a $c$, come la variabile indipendente $y$ quando questa tende a $d$* (cioè $f(x)$ tende a $d$, assumendo valori diversi da $d$), *allora il limite per $x \to c$ della funzione composta $g(f(x))$ coincide con il limite per $y \to d$ della funzione "esterna" $g(y)$.*

**Esempio 4.9.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1}$$

(il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, quindi la ricerca del limite ha senso).

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} = g(f(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$

dove

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \forall x \in A = \mathbb{R} \quad , \quad g(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y} \quad \forall y \in C = \mathbb{R} \quad .$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \quad ,$$

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} = 0 \quad .$$

Sono dunque verificate tutte le ipotesi del Teorema 4.4 ($c = -\infty \ , \ \ d = +\infty$); pertanto

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} = 0 \quad .$$

**Esempio 4.10.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 8} \frac{\operatorname{sen}(3-\log_2 x)}{3-\log_2 x}$$

(il dominio della funzione è l'insieme delle soluzioni della disequazione $3-\log_2 x \neq 0$, cioè $]0,+\infty[\setminus\{8\}$, quindi la ricerca del limite ha senso).

In questo caso possiamo scrivere

$$\frac{\operatorname{sen}(3-\log_2 x)}{3-\log_2 x} = g(f(x)) \quad \forall x \in ]0,+\infty[\setminus\{8\} \quad ,$$

essendo

$$f(x) = 3-\log_2 x \quad \forall x \in A = ]0,+\infty[ \quad , \quad g(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y} \quad \forall y \in C = \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad .$$

Poichè

$$\lim_{x\to 8}(3-\log_2 x) = 3-\log_2 8 = 0 \quad , \quad \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

e inoltre

$$x \in A\setminus\{8\} \implies 3-\log_2 x \neq 0 \quad ,$$

cioè

$$f(A\setminus\{8\}) \subseteq C\setminus\{0\} \quad ,$$

sono verificate tutte le ipotesi del Teorema 4.4; pertanto

$$\lim_{x\to 8}\frac{\operatorname{sen}(3-\log_2 x)}{3-\log_2 x} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1 \quad .$$

**Osservazione 4.2.** Talvolta è necessario applicare più di una volta il Teorema 4.4 per pervenire al risultato. Consideriamo in proposito il seguente esempio.

**Esempio 4.11.** Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(2^{x+\cos x}+\frac{1}{1+(x+\cos x)^2}\right)^{100} - \log\left(2^{x+\cos x}+\frac{1}{1+(x+\cos x)^2}\right)\right] \quad .$$

La funzione di cui si vuole calcolare il limite, diciamola $h(x)$, è definita in tutto $\mathbb{R}$ (si osservi che sia il denominatore $1+(x+\cos x)^2$ che l'argomento del logaritmo $2^{x+\cos x}+\frac{1}{1+(x+\cos x)^2}$ sono positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$); inoltre $h$ è una funzione composta:

$$h(x) \;=\; g(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$

essendo

$$f(x) = x + \cos x \qquad \forall x \in A = \mathbb{R} \quad ,$$

$$g(y) = \left(2^y + \frac{1}{1+y^2}\right)^{100} - \log\left(2^y + \frac{1}{1+y^2}\right) \qquad \forall y \in C = \mathbb{R} \quad .$$

Calcoliamo dapprima il limite della funzione "interna" $f(x)$ per $x \to -\infty$. Osserviamo che

$$x + \cos x \leq \; x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e che

$$\lim_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty \quad ;$$

pertanto, per il teorema del confronto (caso della divergenza a $-\infty$), abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + \cos x) = -\infty \quad .$$

Dato che la funzione interna tende a $-\infty$, calcoliamo il limite della funzione "esterna" $g(y)$ per $y \to -\infty$. Notiamo che anche la $g$ è una funzione composta:

$$g(y) \;=\; \gamma(\varphi(y)) \qquad \forall y \in C = \mathbb{R} \quad ,$$

essendo

$$\varphi(y) = 2^y + \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in C = \mathbb{R} \quad , \quad \gamma(z) = z^{100} - \log z \quad \forall z \in E = ]0, +\infty[ \quad .$$

Il limite della funzione interna $\varphi(y)$, per $y \to -\infty$ si ottiene facilmente ricordando i risultati del n.3 ed applicando i teoremi sul limite della funzione somma e della funzione reciproca; precisamente, essendo

$$\lim_{y \to -\infty} 2^y = 0 \quad , \quad \lim_{y \to -\infty} y^2 = +\infty \quad ,$$

si ha

$$\lim_{y \to -\infty} (1 + y^2) = +\infty \quad , \quad \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{1+y^2} = 0$$

e quindi

$$\lim_{y \to -\infty} \varphi(y) = \lim_{y \to -\infty} \left(2^y + \frac{1}{1+y^2}\right) = 0 \quad .$$

Calcoliamo allora il limite della funzione esterna $\gamma(z)$ per $z \to 0$; poichè (n. 3)

$$\lim_{z \to 0} z^{100} = 0^{100} = 0 \quad , \quad \lim_{z \to 0} \log z = -\infty$$

abbiamo

$$\lim_{z \to 0} \gamma(z) = \lim_{z \to 0} \left(z^{100} - \log z\right) = +\infty \quad .$$

Per potere applicare il Teorema 4.4 alla funzione composta $\gamma \circ \varphi$ occorre che sia verificata l'ipotesi (**), che, in questo caso, si scrive

$$\varphi(C \setminus \{-\infty\}) \subseteq E \setminus \{0\} \quad ,$$

ovverossia

$$\varphi(C) \subseteq E \quad ,$$

ma questo è vero poichè

$$\varphi(y) > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad .$$

Pertanto, per il Teorema 4.4, abbiamo

$$\lim_{y \to -\infty} g(y) = \lim_{y \to -\infty} \gamma(\varphi(y)) = \lim_{z \to 0} \gamma(z) = +\infty \quad .$$

Ritorniamo adesso alla funzione composta $g \circ f$. Dato che l'ipotesi (**) è ovviamente verifcata (poichè $C \setminus \{d\} = C \setminus \{-\infty\} = \mathbb{R}$), possiamo applicare nuovamente il Teorema 4.4; otteniamo così:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} g(f(x)) = \lim_{y \to -\infty} g(y) = +\infty \quad ,$$

dunque il limite cercato vale $+\infty$.

**Osservazione 4.3.** Talora capita che non è lecito applicare il Teorema 4.4 alla funzione composta $g \circ f$ in quanto non è soddisfatta l'ipotesi (**), ma si può aggirare l'ostacolo considerando invece di $g \circ f$ una sua opportuna restrizione "larga". Per chiarire ciò consideriamo il successivo esempio.

**Esempio 4.12.** Sia $g : C = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$g(y) = \begin{cases} 2^y & \text{se } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ y & \text{se } y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione composta

$$g(f(x)) = g(\cos x)$$

(quindi $f(x) = \cos x \ \ \forall x \in A = \mathbb{R}$) e calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to 4\pi} g(\cos x) \quad .$$

Poichè il limite della funzione interna è

$$\lim_{x \to 4\pi} \cos x = \cos 4\pi = 1 \quad ,$$

calcoliamo il limite della funzione esterna $g(y)$ per $y \to 1$. Notiamo che l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ contiene un insieme del tipo $W \setminus \{1\}$ con $W \in \mathcal{U}(1)$ (basta prendere $W = ]0,2[$), quindi possiamo applicare il teorema sui limiti delle restrizioni "larghe"; otteniamo così:

$$\lim_{y\to 1} g(y) = \lim_{y\to 1} g|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}(y) = \lim_{y\to 1} 2^y|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} = \lim_{y\to 1} 2^y = 2^1 = 2 \quad .$$

Nonostante i limiti trovati non è lecito applicare il Teorema 4.4 alla funzione composta $g \circ f$ giacchè l'ipotesi (**) non è soddisfatta; infatti la (**) in questo caso significa

$$x \neq 4\pi \quad \Longrightarrow \quad \cos x \neq 1 \quad ,$$

ma ciò è falso dato che l'equazione $\cos x = 0$ ha le infinite soluzioni $x = 2h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$. Possiamo però considerare un'opportuna restrizione "larga" $(g \circ f)|_{A_1}$ di $g \circ f$, in maniera tale che l'insieme $A_1$ non contenga elementi del tipo $2h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$ (basta prendere, ad esempio, $A_1 = ]3\pi, 5\pi[\setminus\{4\pi\}$). In questo modo, per calcolare il limite della restrizione $(g \circ f)|_{A_1}$, ci è consentito utilizzare il Teorema 4.4 (si tenga presente che la restrizione $(g \circ f)|_{A_1}$ è, ovviamente, la stessa cosa della funzione composta $g \circ (f|_{A_1})$ e questa, a sua volta, verifica tutte le ipotesi del Teorema 4.4). Otteniamo dunque

$$\lim_{x\to 4\pi} g(\cos x)|_{A_1} = \lim_{x\to 4\pi} g(f|_{A_1}(x)) = \lim_{y\to 1} g(y) = 2 \quad ,$$

da cui, grazie al teorema sui limiti delle restrizioni larghe, concludiamo che il limite cercato vale

$$\lim_{x\to 4\pi} g(\cos x) = 2 \quad .$$

**Osservazione 4.4.** (Sull'ipotesi (**)).

Conserviamo le stesse notazioni del Teorema 4.4.

È ovvio che quando $d$ non appartiene all'insieme $C$ l'ipotesi (**) è la stessa cosa che

$$(**') \qquad f(A \setminus \{c\}) \subseteq C \quad .$$

Se invece $d \in C$ non è lecito, in generale, sostituire nel Teorema 4.4 l'ipotesi (**) con l'ipotesi più debole $(**')$ (è facile costruire dei controesempi in tal senso; si veda in proposito l'Esercizio 4.7).

Tuttavia si ha che:

*Quando* $d \in C$ *e* $\lim_{y\to d} g(y) = g(d)$ (cioè quando la funzione $g$ è *continua* nel punto $d$ (3)), *il Teorema 4.4 conserva la sua validità anche se invece della* (**) *è soddisfatta la* $(**')$.

---

(3) Il fondamentale concetto di funzione continua sarà studiato nel n. 8. Lo abbiamo qui anticipato per aiutare lo studente a ricordare meglio il contenuto della presente osservazione.

Per verificare la precedente affermazione basta ripetere la dimostrazione del Teorema 4.4 tenendo presente che adesso in luogo della (4.6) possiamo scrivere ([4]):

$$\forall U \in \mathcal{U}(g(d)) \;\; \exists V \in \mathcal{U}(d) \;:\; g(y) \in U \quad \forall y \in V \cap C \quad . \tag{4.6$'$}$$

Gli esempi seguenti mostrano l'utilità dell'Osservazione 4.4.

**Esempio 4.13.** Calcoliamo il

$$\lim_{x \to \pi} 5^{\operatorname{sen} x} \quad .$$

La funzione $5^{\operatorname{sen} x}$ è definita in $\mathbb{R}$ ed è una funzione composta:

$$5^{\operatorname{sen} x} = g(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$

essendo

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \forall x \in A = \mathbb{R} \quad , \quad g(y) = 5^y \quad \forall y \in C = \mathbb{R} \quad .$$

Si ha:

$$\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \pi = 0 \quad , \quad \lim_{y \to 0} 5^y = 5^0 = 1 \quad ;$$

inoltre è ovviamente verificata l'ipotesi $(**')$. Grazie all'Osservazione 4.4 possiamo concludere che

$$\lim_{x \to \pi} 5^{\operatorname{sen} x} = \lim_{y \to 0} 5^y = 1 \quad .$$

Osserviamo che invece, essendo

$$f(x) = 0 \iff \operatorname{sen} x = 0 \iff x \in \{m\pi \;:\; m \in \mathbb{Z}\} \quad ,$$

l'ipotesi (**) non è soddisfatta. Osserviamo però che in questo caso si potrebbe ovviare al fatto che la (**) non è verificata ragionando come per l'Esempio 4.12.

**Esempio 4.14.** Calcoliamo il

$$\lim_{x \to +\infty} \log_5 \left( 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + x^2} \right) \quad .$$

La funzione di cui si vuole calcolare il limite è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è una funzione composta:

$$\log_5 \left( 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + x^2} \right) = g(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$

essendo

$$f(x) = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + x^2} \quad \forall x \in A = \mathbb{R} \quad , \quad g(y) = \log_5 y \quad \forall y \in C = ]0, +\infty[ \quad .$$

([4]) Si veda il n. 8, precisamente la Proposizione 8.1.

Poichè
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$
e poichè la funzione $\operatorname{sen}^2 x$ è limitata, si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2} = 0 \quad ,$$
quindi
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + 0 = 1 \quad .$$
D'altra parte
$$\lim_{y\to 1} \log_5 y = \log_5 1 = 0 \quad .$$
Poichè $f(A) \subseteq C$ si ha che è verificata l'ipotesi $(**')$, quindi, grazie all'Osservazione 4.4, possiamo affermare che
$$\lim_{x\to+\infty} \log_5 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\right) = \lim_{y\to 1} \log_5 y = 0 \quad .$$

Osserviamo che, essendo
$$f(x) = 1 \iff \operatorname{sen} x = 0 \iff x \in \{m\pi \ : \ m \in \mathbb{Z}\} \quad ,$$
l'ipotesi (**) non è soddisfatta. Osserviamo inoltre che in questo caso non è possibile aggirare l'ostacolo considerando un'opportuna restrizione "larga" $g \circ f|_{A_1}$ della funzione composta in quanto $+\infty$ è un punto di accumulazione per l'insieme $\{m\pi \ : \ m \in \mathbb{Z}\}$ e quindi in ogni insieme "largo" $A_1$ (cioè in ogni intorno di $+\infty$) vi sono sempre valori di $x$ per cui $f(x) = 0$.

**Esercizio 4.7.** Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente
$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq 0, \\ 3 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
quindi si ha $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$.

a) È possibile trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, per la quale il limite della funzione composta $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ esista e sia diverso dal limite della funzione "esterna" $\lim_{y\to 0} g(y)$ ? (Suggerimento: sì; basta considerare la funzione costante ... ).

b) Portare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, per la quale il limite della funzione composta $\lim_{x\to+\infty} g(f(x))$ non esiste (suggerimento: si consideri la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$).

**Esercizio 4.8.** Calcolare i seguenti limiti:
$$\text{a)} \ \lim_{x\to 3} (4x^2 - 11x - 2)^{\sqrt{2}} \ , \quad \text{b)} \ \lim_{x\to 0} \frac{\log_2^3 x - 4\log_4 x}{\log_2^2 x + 5} \ , \quad \text{c)} \ \lim_{x\to 0} \log_2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} + |\cos 5x| + 2\right) \ ,$$
$$\text{d)} \ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x} \ , \quad \text{e)} \ \lim_{x\to+\infty} x^4 \operatorname{sen} x^{-3} \ , \quad \text{f)} \ \lim_{x\to 2} 5^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{x}} \ ,$$
$$\text{g)} \ \lim_{x\to+\infty} (5^x + \operatorname{sen} x + 1)^{-\sqrt{5}} \ , \quad \text{h)} \ \lim_{x\to-\infty} \left(5^x + 5^{-x}\right)^{-\sqrt{5}} \left(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) \quad .$$

# 5. La funzione $[f(x)]^{g(x)}$.

## 5.1. Il dominio di $[f(x)]^{g(x)}$.

Per le funzioni reali di variabile reale abbiamo adottato la convenzione che, quando viene indicata soltanto la legge della funzione $f$ e non ne viene precisato il dominio, si deve intendere che il dominio di $f$ è il più ampio sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}$ nel quale è lecito eseguire tutte le operazioni che intervengono nella legge di $f$ (ovviamente, per quanto riguarda l'insieme di arrivo, si assume che esso sia tutto $\mathbb{R}$).

In base a questa convenzione, data una funzione del tipo $[f(x)]^{g(x)}$ (cioè una potenza nella quale sia la base che l'esponente sono funzioni della variabile $x$), dovremmo considerare come dominio di tale funzione l'unione $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ degli insiemi delle soluzioni dei seguenti tre sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} g(x) \in \mathbb{N}^+ \\ x \in \operatorname{dom} f \end{cases} , \quad \begin{cases} g(x) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^+ \\ f(x) \neq 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} g(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ f(x) > 0 \end{cases} ;$$

ricordiamo infatti che la potenza $a^p$ è stata definita nei seguenti casi: 1) se $p \in \mathbb{N}^+$, la base $a$ può essere un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}$ ; 2) se $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^+$, la base $a$ deve essere un numero diverso da zero; 3) se $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la base $a$ deve essere un numero positivo.

Tuttavia, per le funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$, anche allo scopo di evitare inutili complicazioni, ci comporteremo in maniera difforme dalla convenzione generale precedentemente ricordata. Precisamente:

*Data la funzione reale di variabile reale $[f(x)]^{g(x)}$, dove $g(x)$ è una funzione non costante, quando non indichiamo esplicitamente il dominio di $[f(x)]^{g(x)}$, intendiamo che esso è l'insieme $S$ delle soluzioni del sistema di disequazioni*

$$\begin{cases} x \in \operatorname{dom} g \\ f(x) > 0 \end{cases} . \tag{5.1}$$

*Se, invece, $g(x)$ è una funzione costante ci atteniamo alla convenzione generale* ([5]).

È ovvio che l'insieme $S$ è, in qualunque caso, un sottoinsieme di $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ e che, in generale, è un sottoinsieme proprio. Ad esempio, nel caso della funzione $(x-1)^x$ si ha che $S = ]1, +\infty[$ mentre $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{Z} \cup ]1, +\infty[$.

**Esercizio 5.1.** Provare che, qualunque sia la funzione $[f(x)]^{g(x)}$, risulta $S \subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Verificare inoltre che, nel caso della funzione $(x-1)^x$, si ha $S = ]1, +\infty[$, mentre $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{Z} \cup ]1, +\infty[$.

---

([5]) Pertanto, dato $p \in \mathbb{R}$, conveniamo di considerare come dominio della funzione $[f(x)]^p$, quando tale dominio non sia specificato esplicitamente, l'insieme $\operatorname{dom} f$ oppure l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) \neq 0$ oppure ancora l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > 0$, secondo che l'esponente $p$ appartenga a $\mathbb{N}^+$ oppure a $\in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^+$ oppure ancora a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

**Esercizio 5.2.** Trovare il dominio di ognuna delle seguenti funzioni reali della variabile reale $x$:

$$\text{a)}\ \left(\frac{2x+3}{5-2x}\right)^{\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad \text{b)}\ \left(\log_2(3x+2)+3\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$$

$$\text{c)}\ \left(\log_2^2 x + \log_2 x - 2\right)^{-9} \quad , \quad \text{d)}\ (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \quad , \quad \text{e)}\ (\operatorname{sen} x + 1)^{\sqrt{\cos x}} \quad .$$

## 5.2. Calcolo dei limiti della funzione $[f(x)]^{g(x)}$.

Consideriamo una funzione del tipo $[f(x)]^{g(x)}$, con $g$ funzione non costante ([6]), indichiamo con $S$ il suo dominio (cioè l'insieme delle soluzioni del sistema (5.1)) e supponiamo che sia $c \in \overline{\mathrm{D}}S$ (quindi $c$ è punto di accumulazione anche per dom $f$ e dom $g$). Supponiamo inoltre che le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano regolari al tendere di $x$ a $c$ e supponiamo di conoscere i limiti di tali funzioni al tendere di $x$ a $c$ ([7]). Facciamo vedere che tali informazioni ci consentono, in generale, di calcolare il limite della potenza

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{g(x)} \quad .$$

Infatti abbiamo l'identità

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\log[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)} \qquad \forall x \in S \quad ; \tag{5.2}$$

allora, conoscendo i due limiti

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} g(x) \quad ,$$

possiamo innanzitutto ricavare, mediante il Teorema 4.4, il limite

$$\lim_{x\to c} \log f(x) \quad ,$$

quindi trovare il limite del prodotto

$$\lim_{x\to c} g(x) \log f(x)$$

([6]) Nel caso in cui $g(x)$ è la funzione costante $p \in \mathbb{R}$, per trovare il limite $\lim_{x\to c}[f(x)]^p$, basta applicare il Teorema 4.4 (utilizzando, se necessario, l'Osservazione 4.4) alla funzione composta $[f(x)]^p = g(f(x))$, essendo $g(y) = y^p$.

([7]) In realtà, per i nostri scopi è sufficiente conoscere i limiti, al tendere di $x$ a $c$, delle restrizioni di $f$ e $g$ all'insieme $S$.

(sempreché sia lecito applicare i teoremi sul limite della funzione prodotto) e infine, adoperando nuovamente il Teorema 4.4, determinare il limite

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)} \;=\; \lim_{x\to c} e^{g(x)\log f(x)} \quad .$$

Illustriamo il procedimento descritto con degli esempi.

Osserviamo, preliminarmente, che, mentre il limite di $g(x)$ può essere un qualunque elemento di $\overline{\mathbb{R}}$, quello di $f(x)$ può essere soltanto o un numero reale non negativo oppure $+\infty$ dal momento che $f(x)>0\ \forall x\in S$ (infatti, se fosse $\lim_{x\to c} f(x)=L\in\overline{\mathbb{R}}$, $L<0$, il teorema della permanenza del segno implicherebbe che definitivamente, al tendere di $x$ a $c$, risulta $f(x)<0$).

1) Supponiamo che sia:

$$\lim_{x\to c} f(x)=\frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x\to c} g(x)=-\infty \quad .$$

Applicando il Teorema 4.4 (tenendo presente l'Osservazione 4.4) abbiamo:

$$\lim_{x\to c}\log f(x)=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\log y=\log\frac{1}{2} \quad ;$$

dato che $\log\frac{1}{2}<0$, otteniamo allora:

$$\lim_{x\to c} g(x)\log f(x)=+\infty \quad ,$$

pertanto, ancora per il Teorema 4.4,

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to c} e^{g(x)\log f(x)}=\lim_{y\to+\infty} e^y=+\infty \quad .$$

2) Supponiamo, adesso, che

$$\lim_{x\to c} f(x)=a\in]0,+\infty[ \quad , \quad \lim_{x\to c} g(x)=p\in\mathbb{R} \quad .$$

Abbiamo allora, per il Teorema 4.4 e l'Osservazione 4.4,

$$\lim_{x\to c}\log f(x)=\lim_{y\to a}\log y=\log a \quad ,$$

quindi

$$\lim_{x\to c} g(x)\log f(x)=p\log a \quad ,$$

pertanto, di nuovo per il Teorema 4.4 e l'Osservazione 4.4,

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to c} e^{g(x)\log f(x)}=\lim_{y\to p\log a} e^y=e^{p\log a}=a^p \quad .$$

Il procedimento descritto per trovare il limite di $[f(x)]^{g(x)}$ cade in difetto quando il prodotto $g(x)\log f(x)$ si presenta nelle forma indeterminata $0\cdot\infty$ o in quella $\infty\cdot 0$. Ricordando i limiti della funzione $\log y$, si ha che la prima eventualità ha luogo quando $g(x)\to 0$ e inoltre $f(x)\to+\infty$ oppure $f(x)\to 0$, quindi quando il limite, al tendere di $x$ a $c$, della potenza $[f(x)]^{g(x)}$ si presenta, nella forma $(+\infty)^0$ o nella forma $0^0$; la seconda eventualità si verifica quando $f(x)\to 1$ e inoltre $g(x)\to+\infty$ oppure $g(x)\to-\infty$, quindi quando il limite, al tendere di $x$ a $c$, di $[f(x)]^{g(x)}$ si presenta nella forma $1^{+\infty}$ o in quella $1^{-\infty}$ (si dice, in breve, nella forma $1^{\infty}$).

Si potrebbe inoltre fare vedere con degli appropriati esempi che ciascuna delle situazioni sopra prospettate (cioè quelle in cui il limite della potenza $[f(x)]^{g(x)}$ si presenta nella forma $(+\infty)^0$ o nella forma $0^0$ o in quella $1^\infty$) è compatibile con qualunque risultato per il limite di $[f(x)]^{g(x)}$ (precisamente, la funzione $[f(x)]^{g(x)}$ può essere convergente ad un qualunque numero non negativo oppure divergente a $+\infty$ oppure ancora essere oscillante). Questo fatto viene espresso, con locuzione ormai familiare, dicendo che:

*Nel calcolo del limite della potenza* $[f(x)]^{g(x)}$ *le forme* $(+\infty)^0$, $0^0$ *e* $1^\infty$ *sono forme indeterminate.*

**Esercizio 5.3.** Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} x^{\log x}\ ,\quad \text{b)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-1}{x}\right)^{x^3}\ ,\quad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}|\mathrm{sen}\,x|^{\log^2 x}\ ,$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^{\mathrm{sen}\,x-7\cos x}\ ,\quad \text{e)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(2^x+1\right)^{\log_3\frac{\pi x}{x+1}}\ ,\quad \text{f)}\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{2x-3}{5x-6}\right)^{\frac{1-x}{x}}\ .$$

# 6. Alcuni limiti notevoli.

In questo paragrafo presentiamo un elenco di importanti limiti, collegati, più o meno direttamente, con il numero di Nepero.

Ricordiamo che, per definizione, il numero di Nepero $e$ è dato da

$$e\ =\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ =\ \sup_{n\in\mathbb{N}^+}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ .$$

## 6.1. Un elenco di limiti.

1) Consideriamo la funzione reale di variabile reale

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ .$$

Il dominio di tale funzione è l'insieme delle soluzioni della disequazione $1 + \frac{1}{x} > 0$, cioè $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, pertanto ha senso la ricerca dei limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to -\infty$. Si dimostra che entrambi i limiti (che si presentano nella forma indeterminata $1^\infty$) sono uguali al numero $e$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \;=\; \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \;=\; e \quad . \tag{6.1}$$

2) Consideriamo adesso la funzione

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad .$$

Il dominio è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ \quad x \neq 0 \end{cases} ,$$

cioè $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ , quindi ha senso la ricerca del limite per $x \to 0$. Si dimostra che anche questo limite è uguale al numero $e$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \;=\; e \quad . \tag{6.2}$$

3) Denotato con $a$ un numero positivo diverso da 1, consideriamo la funzione

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} \quad .$$

Il dominio è $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$. Proviamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} \;=\; \log_a e \qquad \forall a > 0, a \neq 1 \quad . \tag{6.3}$$

Infatti, scrivendo diversamente la legge della funzione:

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} \;=\; \frac{1}{x}\log_a(1+x) \;=\; \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad \forall x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\} \quad ,$$

abbiamo che $\frac{\log_a(1+x)}{x}$ è una funzione composta:

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = g(f(x)) \qquad \forall x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\} \quad ,$$

essendo $f(x)$ la funzione considerata in 2) e $g(y)$ la funzione $\log_a y$. Grazie al Teorema 4.4, tenuto conto dell'Osservazione 4.4, otteniamo allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} \;=\; \lim_{y\to e}\log_a y \;=\; \log_a e \quad .$$

4) Denotato con $a$ un qualunque numero positivo, consideriamo la funzione

$$\frac{a^x-1}{x} \quad .$$

Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, quindi ha senso la ricerca del limite per $x\to 0$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Proviamo che

$$(6.4) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \;=\; \log a \qquad \forall a>0 \quad .$$

Se $a=1$ il risultato è ovvio (si tratta del limite di una funzione costante). Se $a\neq 1$, consideriamo la funzione composta $\gamma(\varphi(x))$, dove $\gamma(y)=\frac{\log_a(1+y)}{y}$ è la funzione considerata nel precedente punto 3) e $f(x)=a^x-1\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sono verificate tutte le ipotesi del teorema sui limiti delle funzioni composte ($c=0$, $d=0$), pertanto:

$$\lim_{x\to 0}\gamma(\varphi(x)) \;=\; \lim_{y\to 0}\gamma(y) \;=\; \log_a e \quad .$$

D'altra parte

$$\gamma(\varphi(x)) \;=\; \frac{\log_a\left(1+(a^x-1)\right)}{a^x-1} \;=\; \frac{\log_a a^x}{a^x-1} \;=\; \frac{x}{a^x-1} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad ,$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x-1} \;=\; \log_a e \quad .$$

Applicando i teoremi sul limite della funzione reciproca si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{a^x-1}} \;=\; \frac{1}{\log_a e} \;=\; \log a \quad .$$

5) Consideriamo adesso la funzione

$$\frac{(1+x)^p-1}{x} \quad ,$$

dove $p$ è un numero reale assegnato. Il dominio della funzione dipende dall'esponente $p$:

$$\operatorname{dom}\frac{(1+x)^p-1}{x} \;=\; \begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0\} & \text{se } p\in\mathbb{N}^+,\\ \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} & \text{se } p\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}^+,\\ ]-1,+\infty[\setminus\{0\} & \text{se } p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ .\end{cases}$$

In ogni caso ha senso la ricerca del limite per $x \to 0$. Dimostriamo che

$$\text{(6.5)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} \;=\; p \qquad \forall p \in \mathbb{R} \quad .$$

Osserviamo che, qualunque sia $p \in \mathbb{R}$, per il calcolo del limite per $x \to 0$ possiamo (Teorema 4.3) limitarci a considerare la restrizione di $\frac{(1+x)^p-1}{x}$ all'insieme $A_1 = ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$; inoltre, per ogni $x$ appartenente a tale insieme, abbiamo:

$$\frac{(1+x)^p - 1}{x} \;=\; \frac{e^{\log(1+x)^p} - 1}{x} \;=\; \frac{e^{p\log(1+x)} - 1}{p\log(1+x)} \cdot p \cdot \frac{\log(1+x)}{x} \quad .$$

Utilizzando i limiti (6.4) e (6.3) ed il teorema sui limiti delle funzioni composte, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{p\log(1+x)} - 1}{p\log(1+x)} \;=\; \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} \;=\; \log e = 1 \quad ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \;=\; \log_e e = 1 \quad ,$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0} \left.\frac{(1+x)^p - 1}{x}\right|_{A_1} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{e^{p\log(1+x)} - 1}{p\log(1+x)} \cdot p \cdot \frac{\log(1+x)}{x} \;=\; p \quad ,$$

da cui la (6.5).

### 6.2. Alcuni esercizi.

Molti esercizi sui limiti si risolvono riconducendo, tramite i vari teoremi studiati, il calcolo del limite cercato a limiti notevoli noti . Esaminiamo alcuni esempi in proposito.

1) Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x \quad .$$

Il dominio della funzione di cui vogliamo trovare il limite è l'insieme $A = ]-\infty, 0[ \cup ]5, +\infty[$. È inoltre immediato constatare che il limite si presenta nella forma indeterminata $1^\infty$. Osserviamo però che, per ogni $x \in A$, possiamo scrivere

$$\left(1 - \frac{5}{x}\right)^x \;=\; \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^x \;=\; \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{-\frac{x}{5}}\right]^{-5} \quad .$$

Poichè

$$\left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{-\frac{x}{5}} \;=\; g(f(x)) \qquad \forall x \in A \quad ,$$

essendo

$$f(x) = -\frac{x}{5} \quad \forall x \in A \quad , \quad g(y) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \quad \forall y \in C = ]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[ \quad ,$$

e poichè

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{5}\right) \;=\; +\infty \quad ,$$

applicando il Teorema 4.4 (è facile controllare che tutte le ipotesi sono verificate) abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{-\frac{x}{5}} \;=\; \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \;=\; e \quad ,$$

da cui, applicando di nuovo il Teorema 4.4 e l'Osservazione 4.4, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x \;=\; \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{-\frac{x}{5}}\right]^{-5} \;=\; \lim_{y\to e} y^{-5} \;=\; e^{-5} \quad .$$

2) Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\mathrm{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}} \quad .$$

La funzione è definita nell'insieme $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; inoltre, essendo

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{sen}^2 x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4} = +\infty \quad ,$$

il limite si presenta nella forma indeterminata $1^\infty$. Possiamo cercare di ricondurre il calcolo del limite proposto al limite notevole (6.2). Infatti, per ogni $x$ appartenente all'insieme

$$A_1 \;=\; \{x\in\mathbb{R} \,:\, \mathrm{sen}^2 x \neq 0\} \;=\; \mathbb{R}\setminus\{k\pi \,:\, k\in\mathbb{Z}\}$$

(si noti che gli insiemi $A_1$ e $A$ verificano l'ipotesi (*) del teorema sui limiti delle restrizioni "larghe") possiamo scrivere

$$\left(1+\mathrm{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}} \;=\; \left[\left(1+\mathrm{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}}\right]^{\frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^4}} \quad .$$

Poiché

$$\left(1+\mathrm{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}} \;=\; g(f(x)) \quad ,$$

essendo

$$f(x) = \mathrm{sen}^2 x \quad \forall x \in A_1 \quad , \quad g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}} \quad \forall y \in C = ]-1,+\infty[\setminus\{0\} \quad ,$$

applicando il Teorema 4.4 otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e \quad .$$

Calcoliamo adesso il limite dell'esponente. Possiamo scrivere

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x^2} \qquad \forall x\in A$$

e quindi, essendo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1 \quad , \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty \quad ,$$

abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4} = +\infty \quad .$$

Dato che $e>1$, mediante il procedimento descritto nel n. 5.2 deduciamo che

$$\lim_{x\to 0}\left.\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}}\right|_{A_1} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}\right]^{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4}} = +\infty$$

e quindi (Teorema 4.3)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}} = +\infty \quad .$$

3) Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(2^{\frac{x}{x^3+2}}-1\right) \quad .$$

La funzione è definita nell'insieme $A=\mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{-2}\}$ e si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3+2} = 0 \quad \text{(rapporto di polinomi)} \quad ,$$

$$\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{x}{x^3+2}} = \lim_{y\to 0}2^y = 1 \quad \text{(Teorema 4.4 ed Osservazione 4.4)} \quad ,$$

dunque il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty\cdot 0$. Ricordando il limite notevole (6.4), osserviamo che, per ogni $x\in A_1=A\setminus\{0\}=\mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{-2},0\}$, possiamo scrivere

$$x^2\left(2^{\frac{x}{x^3+2}}-1\right) = x^2\cdot\frac{2^{\frac{x}{x^3+2}}-1}{\frac{x}{x^3+2}}\cdot\frac{x}{x^3+2} = \frac{2^{\frac{x}{x^3+2}}-1}{\frac{x}{x^3+2}}\cdot\frac{x^3}{x^3+2} \quad .$$

Interpretando la frazione

$$\frac{2^{\frac{x}{x^3+2}}-1}{\frac{x}{x^3+2}}$$

come una funzione composta:

$$\frac{2^{\frac{x}{x^3+2}}-1}{\frac{x}{x^3+2}} = g(f(x)) \quad ,$$

dove

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3+2} \qquad \forall x \in A_1 \quad , \quad g(y) = \frac{2^y-1}{y} \qquad \forall y \in C = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ,$$

per il Teorema 4.4 abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{x}{x^3+2}}-1}{\frac{x}{x^3+2}} = \lim_{y\to 0} \frac{2^y-1}{y} = \log 2 \quad ;$$

d'altra parte abbiamo pure

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+2} = 1 \quad ,$$

pertanto, per i teoremi sul limite del prodotto,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(2^{\frac{x}{x^3+2}}-1\right)\Bigg|_{A_1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{x}{x^3+2}}-1}{\frac{x}{x^3+2}} \cdot \frac{x^3}{x^3+2} = \log 2 \quad ,$$

da cui, per il Teorema 4.3,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(2^{\frac{x}{x^3+2}}-1\right) = \log 2 \quad .$$

4) Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \left(\left(1-\frac{7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}} - 1\right) \quad .$$

Il dominio $A$ della funzione di cui cerchiamo il limite è l'insieme delle soluzioni della disequazione $1-\frac{7x}{1+x^5} > 0$ e, anche se non sappiamo risolvere tale disequazione (poichè non sappiamo risolvere l'equazione di quinto grado $x^5-7x+1=0$), possiamo però essere sicuri che la ricerca del limite ha senso; infatti, considerata la funzione reale di variabile reale $h(x) = 1 - \frac{7x}{1+x^5}$ (definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$) si ha $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$ e quindi, per il teorema della permanenza del segno, la funzione $h$ assume valori positivi in un opportuno intervallo del tipo $]a, +\infty[$. È immediato constatare che il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Ricordando il limite notevole (6.5), osserviamo che possiamo scrivere, per ogni $x \in A_1 = A \setminus \{0\}$,

$$x^4 \left( \left(1 - \frac{7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}} - 1 \right) = x^4 \cdot \frac{\left(1 + \frac{-7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}} - 1}{\frac{-7x}{1+x^5}} \cdot \frac{-7x}{1+x^5} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{-7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}} - 1}{\frac{-7x}{1+x^5}} \cdot \frac{-7x^5}{1+x^5} \quad .$$

Interpretando la funzione

$$\frac{\left(1 + \frac{-7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}} - 1}{\frac{-7x}{1+x^5}}$$

come funzione composta nel seguente modo:

$$\frac{\left(1 + \frac{-7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}} - 1}{\frac{-7x}{1+x^5}} = g(f(x)) \quad ,$$

dove

$$f(x) = \frac{-7x}{1+x^5} \qquad \forall x \in A_1 \quad , \quad g(y) = \frac{(1+y)^{\sqrt{3}} - 1}{y} \qquad \forall y \in C = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ,$$

per il Teorema 4.4 abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{-7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}} - 1}{\frac{-7x}{1+x^5}} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{\sqrt{3}} - 1}{y} = \sqrt{3} \quad ;$$

essendo, d'altra parte,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^5}{1+x^5} = -7 \quad ,$$

grazie ai teoremi sul limite del prodotto ed al Teorema 4.3 concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \left(\left(1-\frac{7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^4 \left.\left(\left(1-\frac{7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}}-1\right)\right|_{A_1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\dfrac{-7x}{1+x^5}\right)^{\sqrt{3}}-1}{\dfrac{-7x}{1+x^5}} \cdot \frac{-7x^5}{1+x^5} = -7\sqrt{3} \ .$$

## 7. I limiti laterali.

Nel corso di questo paragrafo supporremo sempre che $A$ e $c$ siano, rispettivamente, un sottoinsieme ed un elemento di $\mathbb{R}$. Indicheremo inoltre con $A_-$ e $A_+$ i seguenti due sottoinsiemi di $A$:

(7.1) $$A_- = A\cap\,]-\infty,c[ \quad , \quad A_+ = A\cap\,]c,+\infty[ \ .$$

Cominciamo col provare la seguente

**Proposizione 7.1.** *Dati $A\subseteq\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ e considerati gli insiemi $A_-$ e $A_+$ definiti dalla* (7.1)*, vale la seguente equivalenza:*

$$c\in \mathrm{D}A \quad \Longleftrightarrow \quad c\in(\mathrm{D}A_-)\cup(\mathrm{D}A_+) \ .$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo dapprima l'implicazione $\Longrightarrow$ . Sia $c\in\mathrm{D}A$ e supponiamo, per assurdo, che $c\notin(\mathrm{D}A_-)\cup(\mathrm{D}A_+)$, cioè che $c$ non appartenga né a $\mathrm{D}A_-$ né a $\mathrm{D}A_+$. Dire che $c\notin\mathrm{D}A_-$ significa dire che

$$\exists V_1\in\mathcal{U}(c) \quad : \quad V_1\cap A_-\setminus\{c\}=\emptyset \ ,$$

ovverossia, dato che $c\notin A_-$,

$$\exists V_1\in\mathcal{U}(c) \quad : \quad V_1\cap A_-=\emptyset \ ;$$

analogamente, dire che $c\notin\mathrm{D}A_+$ significa dire che

$$\exists V_2\in\mathcal{U}(c) \quad : \quad V_2\cap A_+=\emptyset \ ;$$

se indichiamo con $V$ l'intorno intersezione $V_1\cap V_2\in\mathcal{U}(c)$, è chiaro che

$$V\cap A_- = V\cap A_+ = \emptyset \ .$$

Consideriamo adesso l'insieme $V \cap A \setminus \{c\}$ ed osserviamo che, essendo $A \setminus \{c\} = A_- \cup A_+$, risulta

$$V \cap A \setminus \{c\} = V \cap (A_- \cup A_+) = (V \cap A_-) \cup (V \cap A_+) = \emptyset \quad ;$$

questa conclusione è però assurda poiché $c \in \mathrm{D}A$.

Proviamo adesso l'implicazione $\Longleftarrow$ . Sia $c \in (\mathrm{D}A_-) \cup (\mathrm{D}A_+)$, cioè $c$ appartiene ad almeno uno dei due insiemi $\mathrm{D}A_-$ e $\mathrm{D}A_+$. Usando la Proposizione 4.1 si ottiene facilmente che, in ogni caso, risulta $c \in \mathrm{D}A$.

**Definizione 7.1.** (*Limiti laterali*). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \mathrm{D}A$ (quindi $c \in (\mathrm{D}A_-) \cup (\mathrm{D}A_+)$).

Se $c \in \mathrm{D}A_-$ ed esiste il limite

$$\lim_{x \to c} f|_{A_-}(x) \quad ,$$

tale limite viene chiamato il *limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $c$ dalla sinistra* e viene indicato con il simbolo

$$\lim_{x \to c-} f(x) \quad .$$

Analogamente, se $c \in \mathrm{D}A_+$ ed esiste il limite

$$\lim_{x \to c} f|_{A_+}(x) \quad ,$$

tale limite viene detto il *limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $c$ dalla destra* e viene denotato con

$$\lim_{x \to c+} f(x) \quad .$$

Un'altra notazione, abbastanza abituale, per il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $c$ dalla sinistra [risp. dalla destra] è $f(c-)$ [risp. $f(c+)$].

Esaminiamo la relazione che lega il concetto di limite per $x \to c$ con quelli di limite per $x \to c-$ e $x \to c+$.

Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e dato il punto $c \in \mathbb{R}$, si possono presentare i seguenti due casi.

1) *Il punto $c$ appartiene ad uno solo degli insiemi* $\mathrm{D}A_-$ *e* $\mathrm{D}A_+$.

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $c \in (\mathrm{D}A_-) \setminus (\mathrm{D}A_+)$. Per il Teorema 4.1 si ha che, se risulta

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \tag{7.2}$$

(essendo $L$ un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$), allora è anche

$$\lim_{x \to c-} f(x) = L \quad . \tag{7.3}$$

D'altra parte, dato che $c \notin \mathrm{D}A_+$, esiste un intorno $W \in \mathcal{U}(c)$ tale che $W \cap A_+ = \emptyset$ e quindi $W \cap A \setminus \{c\} \subseteq A_-$; pertanto, applicando il Teorema 4.3 alla restrizione $f|_{A_-}$, otteniamo che, viceversa, dalla (7.3) segue la (7.2).

2) *Il punto $c$ appartiene a* $(\mathrm{D}A_-) \cap (\mathrm{D}A_+)$.

In questo caso, abbiamo ancora, sempre per il Teorema 4.1, che, se vale la (7.2), allora si ha pure

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = L \quad . \tag{7.4}$$

Proviamo che, viceversa, la (7.4) implica la (7.2). Infatti, se è vera la (7.4), valgono entrambe le affermazioni:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V_1 \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U \quad \ \forall x \in V_1 \cap A_- \setminus \{c\} \quad ,$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V_2 \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U \quad \ \forall x \in V_2 \cap A_+ \setminus \{c\} \quad ;$$

considerato l'intorno $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}(c)$, è chiaro che per ogni punto $x \in V \cap A \setminus \{c\}$ si verifica una (sola) delle due circostanze: $x \in V_1 \cap A_- \setminus \{c\}$ e $x \in V_2 \cap A_+ \setminus \{c\}$, ma, in ogni caso, è vero che $f(x) \in U$. Riepilogando, abbiamo che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists V \in \mathcal{U}(c) \ : \ \ f(x) \in U \quad \ \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \quad ,$$

dunque è verificata la (7.2).

Abbiamo dimostrato in questo modo il seguente teorema.

**Teorema 7.1.** (Relazione tra limite e limiti laterali).
*Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \mathbb{R}$. Sia inoltre $L \in \overline{\mathbb{R}}$.*
1) *Se* $c \in (\mathrm{D}A_-) \setminus (\mathrm{D}A_+)$ [risp. $c \in (\mathrm{D}A_+) \setminus (\mathrm{D}A_-)$ ], *allora vale l'equivalenza*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c-} f(x) = L$$
$$[\text{risp. } \lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c+} f(x) = L\ ] \quad .$$

2) *Se* $c \in (\mathrm{D}A_-) \cap (\mathrm{D}A_+)$, *allora vale l'equivalenza*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = L \quad .$$

**Esempio 7.1.** Sia $f(x) = [x]$ e sia $c = 0$. Allora

$$\lim_{x\to 0-} [x] = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 0+} [x] = 0 \quad .$$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0-}[x] \;=\; \lim_{x\to 0}[x]|_{]-\infty,0[} \;=$$

(applicando il teorema sui limiti delle restrizioni "larghe")

$$=\; \lim_{x\to 0}[x]|_{[-1,0[} \;=\; \lim_{x\to 0}(-1)|_{[-1,0[} \;=\; \lim_{x\to 0}(-1) \;=\; -1 \quad .$$

Analogamente si prova che $\lim_{x\to 0+}[x] = 0$.

**Esempio 7.2.** Sia $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^n x}$, $n \in \mathbb{N}^+$, (quindi $A = \mathbb{R} \setminus \{h\pi \,:\, h \in \mathbb{Z}\}$) e sia $c = 0$. Si hanno i seguenti due casi.

1) Se $n$ è pari, allora

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\operatorname{sen}^n x} \;=\; \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\operatorname{sen}^n x} \;=\; +\infty \quad .$$

Infatti, essendo

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x = 0 \quad ,$$

si ha pure

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}^n x = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\right| \;=\; +\infty \quad . \tag{7.5}$$

Essendo $n$ pari, possiamo allora scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}^n x} \;=\; \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\right| \;=\; +\infty \quad ,$$

da cui, per il Teorema 7.1, segue l'asserto.

2) Se $n$ è dispari, allora

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\operatorname{sen}^n x} \;=\; -\infty \quad , \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\operatorname{sen}^n x} \;=\; +\infty \quad .$$

Infatti, vale ancora la (7.5), pertanto, tenendo presente che la funzione $\operatorname{sen} x$ assume valori positivi negli intervalli $]h\pi,(h+1)\pi[$, con $h \in \mathbb{Z}$, $h$ pari, e valori negativi negli intervalli $]h\pi,(h+1)\pi[$, con $h \in \mathbb{Z}$, $h$ dispari, abbiamo

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\operatorname{sen}^n x} \;=\; \lim_{x\to 0}\left.\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\right|_{]-\infty,0[} \;=$$

(applicando il teorema sui limiti delle restrizioni "larghe")

$$=\; \lim_{x\to 0}\left.\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\right|_{]-\pi,0[} \;=\; \lim_{x\to 0}\left.\left(-\left|\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\right|\right)\right|_{]-\pi,0[} \;=\; \lim_{x\to 0}\left(-\left|\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\right|\right) \;=\; -\infty \quad ;$$

in maniera del tutto analoga si prova che

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\operatorname{sen}^n x} = +\infty \quad .$$

**Esempio 7.3.** Sia $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ e sia $c = 0$. Allora

$$\lim_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad .$$

Infatti, essendo

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty \quad ,$$

tenuto conto del segno della funzione $\frac{1}{x}$ si ha:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad ,$$

da cui, applicando il teorema sui limiti delle funzioni composte,

$$\lim_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} 2^y = 0 \quad , \qquad \lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} 2^y = +\infty \quad .$$

**Esempio 7.4.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\cap\,]-\infty, 0[\ , \\ 1 & \text{se } \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q}\cap\,]-\infty, 0[)\ , \end{cases}$$

e sia $c = 0$. Allora risulta

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \quad ,$$

mentre il

$$\lim_{x\to 0-} f(x)$$

non esiste.

Infatti

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} f|_{]0,+\infty[}(x) = \lim_{x\to 0} 1|_{]0,+\infty[} = 1 \quad ,$$

mentre, per quanto riguarda il limite

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \quad ,$$

si nota subito che vi sono due restrizioni con limiti diversi:

$$\lim_{x\to 0} f|_{\mathbb{Q}\cap]-\infty,0[}(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} f|_{]-\infty,0[\setminus\mathbb{Q}} = 1 \quad .$$

**Esercizio 7.1.** Portare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$a) \lim_{x\to 0-} f(x) = 7 \quad , \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = 5 \quad ;$$

$$b) \lim_{x\to 0-} f(x) = 5 \quad , \quad \nexists \lim_{x\to 0+} f(x) \quad ;$$

$$c) \lim_{x\to 0-} f(x) = 5 \quad , \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty \quad .$$

**Esercizio 7.2.** Calcolare i limiti laterali, per $x \to 0$, delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$\text{a)} \ \frac{\operatorname{sen}|x|}{x} \quad , \quad \text{b)} \ \operatorname{cotg} x \quad , \quad \text{c)} \ \frac{\operatorname{sen}^2|x|}{x} \quad ,$$
$$\text{d)} \ \frac{2^x}{x - x^2} \quad , \quad \text{e)} \ \frac{x-1}{2^{|x-x^2|} - 1} \quad .$$

Terminiamo questo paragrafo osservando che dal Teorema 2.6 segue facilmente il seguente teorema.

**Teorema 7.2.** (Limiti laterali delle funzioni monotone nei punti interni al loro dominio). *Supponiamo che l'insieme $A$ sia un intervallo di $\mathbb{R}$ e che $c$ sia un punto interno ad $A$. Supponiamo inoltre che la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ sia crescente* [risp. *decrescente*] *nell'intervallo $A$. Allora i due limiti laterali*

$$\lim_{x\to c-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to c+} f(x)$$

*esistono entrambi finiti e risulta*

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \sup_{x\in A_-} f(x) \le f(c) \quad , \quad \lim_{x\to c+} f(x) = \inf_{x\in A_+} f(x) \ge f(c)$$
$$[\text{ risp. } \lim_{x\to c-} f(x) = \inf_{x\in A_-} f(x) \ge f(c) \quad , \quad \lim_{x\to c+} f(x) = \sup_{x\in A_+} f(x) \le f(c) \ ] \quad .$$

## 8. Le funzioni continue.

Questo paragrafo è dedicato alla presentazione di un concetto fondamentale per la teoria delle funzioni reali di una variabile reale: quello di *funzione continua.* Grosso modo si può dire (cfr. la successiva Definizione 8.1) che una funzione è continua se ha la seguente proprietà: "ogni volta che la variabile indipendente tende ad un certo valore, la variabile dipendente tende al corrispondente di quel valore". Una proprietà equivalente a questa è che "piccole variazioni della variabile indipendente producono piccole variazioni della variabile dipendente" (cfr. la Proposizione 8.1).

## 8.1. Il concetto di funzione continua.

Nel n. 3 abbiamo studiato i limiti delle funzioni elementari (esponenziale, logaritmo ecc. ecc.). Ricordando i risultati ottenuti, possiamo notare che ogni volta che consideriamo il limite di una funzione elementare $f(x)$ per $x \to c$, dove $c$ è un punto del dominio di $f$, otteniamo come risultato il numero $f(c)$ (il corrispondente di $c$ tramite $f$). È questo, in buona sostanza, il concetto di funzione continua nel punto $c$. In maniera più formale abbiamo la seguente definizione.

**Definizione 8.1.** (Funzione continua in un punto)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in A$. Si dice che la funzione $f$ è *continua nel punto* $c$ se si verifica una delle seguenti due circostanze:

1) $c \in A \setminus \mathrm{D}A$ ($c$ è un punto isolato di $A$),

oppure

2) $c \in A \cap \mathrm{D}A$ e inoltre

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

($c$ è un punto di accumulazione per $A$, oltreché un elemento di $A$, e la funzione $f$ è convergente, al tendere di $x$ a $c$, al valore che essa assume in corrispondenza del valore $c$ della variabile indipendente).

La seguente proposizione ci indica un altro modo, equivalente, di definire la continuità di una funzione in un punto.

**Proposizione 8.1.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in A$. La seguente condizione è necessaria e sufficiente affinché $f$ sia continua nel punto $c$:*

$$\forall U \in \mathcal{U}(f(c)) \quad \exists\, V \in \mathcal{U}(c) \;:\; f(x) \in U \quad \forall x \in V \cap A \quad . \tag{8.1}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo che la condizione è necessaria, cioè proviamo l'implicazione:

$$f \text{ è continua nel punto } c \quad \Longrightarrow \quad \text{è vera la (8.1)} \quad .$$

Infatti, se $f$ è continua nel punto $c$, abbiamo le seguenti due possibilità:

1) $c \in A \setminus \mathrm{D}A$; in questo caso esiste un intorno $V_1 \in \mathcal{U}(c)$ tale che $V_1 \cap A = \{c\}$; di conseguenza, essendo $f(c) \in U \ \forall U \in \mathcal{U}(f(c))$, è chiaro che la (8.1) è verificata: basta prendere $V = V_1$, qualunque sia la scelta dell'intorno $U \in \mathcal{U}(f(c))$;

2) $c \in A \cap \mathrm{D}A$ e $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$; in questo caso, per la definizione di limite, abbiamo che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(f(c)) \quad \exists\, V \in \mathcal{U}(c) \;:\; f(x) \in U \quad \forall x \in V \cap A \setminus \{c\} \tag{8.2}$$

e, poiché $f(c) \in U\ \forall \in \mathcal{U}(f(c))$, è chiaro che la (8.2) implica la (8.1).

Proviamo adesso che la condizione è sufficiente, cioè:

$$\text{è vera la (8.1)} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è continua nel punto } c \quad .$$

Infatti, supposta vera la (8.1), si possono verificare due casi:

1) $c \in A \setminus \mathrm{D}A$; in questo caso $f$ è continua in $c$ per definizione;

2) $c \in A \cap \mathrm{D}A$; in questo caso osserviamo che, essendo vera la (8.1), è vera pure, a maggior ragione, la (8.2), cioè si ha $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ e quindi $f$ è continua in $c$.

Come abbiamo accennato nell'introduzione a questo paragrafo, la Proposizione 8.1 mostra che la continuità di una funzione $f$ in un punto $c$ significa che $f$ ha la seguente proprietà: è possibile fare in modo che il valore $f(x)$ della variabile dipendente si discosti "di poco" dal valore $f(c)$ (cioè fare in modo che $f(x)$ rimanga in un intorno $U$ di $f(c)$ arbitrariamente prefissato) mantenendo la variabile indipendente $x$ sufficientemente vicina al valore $c$ (cioè costringendo la $x$ a variare in un insieme $V \cap A$, dove $V$ è un opportuno intorno di $c$).

**Definizione 8.2.** (Funzione continua in un insieme).

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $B$ un sottoinsieme non vuoto di $A$. Si dice che la funzione $f$ è *continua nell'insieme* $B$ se $f$ è continua in ogni punto $c \in B$.

Si dice, brevemente, che la funzione $f$ è *continua* se $f$ è continua nel suo dominio $A$.

Come abbiamo già anticipato all'inizio di questo numero, tutte le funzioni elementari sono funzioni continue. Precisamente, ricordando i risultati del n. 3, ed anche l'Esempio 1.2, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 8.2.** (Continuità delle funzioni elementari). *Le seguenti funzioni sono continue* (ognuna nel suo dominio):

a) *la funzione costante* $k$ (qualunque sia $k \in \mathbb{R}$);
b) *la funzione esponenziale* $a^x$ (qualunque sia $a > 0, a \neq 1$);
c) *la funzione logaritmo* $\log_a x$ (qualunque sia $a > 0, a \neq 1$);
d) *la funzione potenza* $x^p$ (qualunque sia $p \in \mathbb{R}$);
e) *le funzioni trigonometriche:* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ *e* $\operatorname{cotg} x$.

### 8.2. Punti di discontinuità.

Se la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ non è continua nel punto $c \in A$, allora $c$ è necessariamente un punto di accumulazione per $A$ e si verifica inoltre uno dei seguenti fatti:

1) la funzione $f$ è oscillante al tendere di $x$ a $c$;

2) la funzione $f$ è divergente al tendere di $x$ a $c$;

3) la funzione $f$ è convergente al numero $l$ al tendere di $x$ a $c$, ma $l \neq f(c)$.

In ogni caso, quando $f$ non è continua nel punto $c$, si dice che $c$ è un punto di discontinuità per $f$.

**Definizione 8.3.** (Punto di discontinuità).

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in A$. Si dice che $c$ è un *punto di discontinuità* per la funzione $f$ (o anche che la funzione $f$ ha una discontinuità nel punto $c$) se $f$ non è continua nel punto $c$.

**Esempi 8.1.**

a) Per la funzione di Dirichlet

$$f(x) \; = \; \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ogni punto $c \in \mathbb{R}$ è un punto di discontinuità ; infatti, come sappiamo, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, il $\lim_{x \to c} f(x)$ non esiste, quindi si verifica il fatto 1).

b) La funzione $[x]$ ("massimo intero contenuto in $x$") ha una discontinuità in ogni punto $m \in \mathbb{Z}$; infatti, se $m \in \mathbb{Z}$, allora

$$\lim_{x \to m-} [x] = m - 1 \quad , \quad \lim_{x \to m+} [x] = m \quad ,$$

quindi anche questa volta si verifica il fatto 1).

c) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$f(x) \; = \; \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità nel punto $c = 0$; infatti

$$\lim_{x \to 0} f(x) \; = \; \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \; = \; +\infty \quad ,$$

quindi si verifica il fatto 2).

d) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$f(x) \; = \; \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità nel punto $c = 0$; infatti

$$\lim_{x \to 0} f(x) \; = \; \lim_{x \to 0} x \; = \; 0 \quad ,$$

mentre $f(0) = 1$, quindi si verifica il fatto 3).

Ogni volta che, come nel precedente Esempio 8.1 d), si verifica il fatto 3), si suole dire che il punto di discontinuità di cui si parla è un punto di discontinuità eliminabile.

**Definizione 8.4.** (Punto di discontinuità eliminabile).

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in A$ un punto di discontinuità per $f$. Si dice che $c$ è un *punto di discontinuità eliminabile* per la funzione $f$ se accade che

$$\lim_{x\to c} f(x) \;=\; l \in \mathbb{R} \;\;,\;\; \text{ma} \;\; l \neq f(c) \;\;.$$

Il motivo della denominazione "discontinuità eliminabile" risiede nel fatto che, se $c$ è un punto di discontinuità eliminabile per la funzione $f$, allora la discontinuità può essere "aggiustata" modificando il valore della funzione $f$ nel punto $c$. In termini più precisi, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 8.3.** (Eliminazione della discontinuità). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in A$ un punto di discontinuità eliminabile per $f$. Allora, denotato con $l$ il $\lim_{x\to c} f(x)$ e considerata la funzione $g : A \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge*

$$g(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \setminus \{c\}, \\ l & \text{se } x = c, \end{cases}$$

*si ha che $g$ è continua nel punto $c$.*

*Dimostrazione.* Infatti $c$ è un punto di accumulazione per $A$ e risulta:

$$\lim_{x\to c} g(x) \;=$$

(per il teorema sui limiti delle restrizioni "larghe")

$$=\; \lim_{x\to c} g|_{A\setminus\{c\}}(x) \;=\; \lim_{x\to c} f|_{A\setminus\{c\}}(x) \;=$$

(per il teorema sui limiti delle restrizioni)

$$=\; \lim_{x\to c} f(x) \;=\; l \;=\; g(c) \;\;,$$

quindi $g$ è continua nel punto $c$.

Osserviamo che l'eliminazione della discontinuità ha una interpretazione grafica molto semplice: si tratta di "spostare" verticalmente il punto $(c, f(c))$ del grafico fino a fargli assumere la posizione $(c, l)$ (suggeriamo allo studente di visualizzare ciò nel caso dell'Esempio 8.1 d)).

È consuetudine classificare i punti di discontinuità, che non sono di discontinuità eliminabile, in punti di discontinuità di prima e di seconda specie.

**Definizione 8.5.** (Punti di discontinuità di prima e di seconda specie).

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in A$ un punto di discontinuità per $f$.

Si dice che $c$ è un *punto di discontinuità di prima specie* per la funzione $f$ se accade che entrambi i limiti laterali di $f(x)$, al tendere di $x \to c$ esistono finiti ([8]), ma sono tra loro diversi:

$$\lim_{x \to c-} f(x) \;=\; l_1 \in \mathbb{R} \;\;,\;\; \lim_{x \to c+} f(x) \;=\; l_2 \in \mathbb{R} \;\;,\;\; l_1 \;\neq\; l_2 \;\;.$$

Si dice che $c$ è un *punto di discontinuità di seconda specie* per la funzione $f$ se $c$ non è né un punto di discontinuità eliminabile né un punto di discontinuità di prima specie.

Ad esempio, per la funzione $[x]$ (Esempio 8.1 b)) i punti $c = m \in \mathbb{Z}$ sono punti discontinuità di prima specie. Invece, per la funzione di Dirichlet (Esempio 8.1 a)) tutti i punti $c \in \mathbb{R}$ sono di discontinuità di seconda specie. Anche nel caso della funzione dell'Esempio 8.1 c) il punto $c = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

Aggiungiamo infine che, quantunque, per definizione, una funzione $f$ possa essere continua solamente nei punti $c$ che appartengono al suo dominio $A$, si sogliono tuttavia chiamare punti di discontinuità per la funzione $f$ anche tutti i punti di accumulazione per $A$ che non appartengono ad $A$.

**Definizione 8.6.** (Punti di discontinuità non appartenenti al dominio).

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $c \in \mathrm{D}A \setminus A$, si dice che $c$ è un punto di discontinuità per $f$.

Si dice inoltre che un punto $c \in \mathrm{D}A \setminus A$ è

– un punto di discontinuità eliminabile se $f$ è convergente al tendere di $x$ a $c$;

– un punto di discontinuità di prima specie se entrambi i limiti laterali di $f(x)$, al tendere di $x \to c$, esistono finiti, ma sono tra loro diversi;

– un punto di discontinuità di seconda specie se $c$ non è né di discontinuità eliminabile né di prima specie.

**Esempi 8.2.**

a) Per la funzione

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

il punto $c = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

b) Per la funzione

$$\frac{|x|}{x}$$

([8]) Ciò naturalmente presuppone che $c$ sia un punto di accumulazione per entrambi gli insiemi: $A \cap ]-\infty, c[$ e $A \cap ]c, +\infty[$.

il punto $c = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie.

c) Per la funzione

$$2^{\frac{1}{x}}$$

il punto $c = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

Anche nel caso dei punti di discontinuità non appartenenti al dominio si ha una proposizione analoga alla Proposizione 8.3, che ci limitiamo ad enunciare (ovviamente, questa volta per "aggiustare" la discontinuità non bisogna spostare un punto del grafico ma occorre aggiungerne uno).

**Proposizione 8.3′.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \mathrm{D}A \setminus A$ un punto di discontinuità eliminabile. Allora, denotato con $l$ il $\lim_{x \to c} f(x)$, la funzione $g : A \cup \{c\} \to \mathbb{R}$, definita mediante la legge*

$$g(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A, \\ l & \text{se } x = c, \end{cases}$$

*è continua nel punto $c$.*

# 9. I teoremi sulle funzioni continue.

In questo paragrafo vengono presentate le principali proprietà delle funzioni continue. Alcune di esse (ad es. quelle del n. 9.1) sono immediate conseguenze della definizione di funzione continua e dei teoremi sui limiti già studiati; per altre (ad es. per il teorema di continuità della funzione composta) basta adattare le argomentazioni svolte a proposito dei corrispondenti teoremi sui limiti; per altre ancora (ad es. per il teorema dell'esistenza degli zeri e per il teorema di Weierstrass) occorrono invece dei ragionamenti un po' più profondi ed articolati di quelli a cui siamo abituati.

## 9.1. Prime proprietà delle funzioni continue.

**Teorema 9.1.** (Continuità della restrizione). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $A_1$ un sottoinsieme di $A$ e sia $c$ un elemento di $A_1$* (quindi è pure $c \in A$). *Se la funzione $f$ è continua nel punto $c$, allora anche la restrizione $f|_{A_1}$ è continua nel punto $c$.*

*Dimostrazione* . Tenendo presente la definizione di funzione continua in un punto, distinguiamo i seguenti due casi:

1) se $c \in A_1 \setminus \mathrm{D}A_1$, allora non c'è nulla da provare, giacché la funzione $f|_{A_1}$ è continua nel punto $c$ per definizione;

2) se $c \in \mathrm{D}A_1$, allora è pure $c \in \mathrm{D}A$ e quindi si ha, per ipotesi,

$$\lim_{x \to c} f(x) \;=\; f(c) \;\;;$$

applicando il teorema sui limiti delle restrizioni otteniamo:

$$\lim_{x\to c} f|_{A_1}(x) \;=\; \lim_{x\to c} f(x) \;=\; f(c) \;=\; f|_{A_1}(c) \quad ,$$

dunque anche $f|_{A_1}$ è continua nel punto $c$.

**Teorema 9.2.** (Teorema della permanenza del segno). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in A$. Supponiamo che la funzione $f$ sia continua nel punto $c$ e che risulti $f(c) > 0$* [risp. $f(c) < 0$]. *Allora esiste un intorno $V \in \mathcal{U}(c)$ tale che*

$$f(x) > 0 \quad [\text{risp. } \; f(x) < 0] \qquad \forall x \in V \cap A \quad .$$

*Dimostrazione.* Supponiamo, per fissare le idee, che sia $f(c) > 0$ e, come per il teorema precedente, distinguiamo i seguenti due casi:

1) se $c \in A \setminus \mathrm{D}A$, allora esiste $V \in \mathcal{U}(c)$ tale che $V \cap A = \{c\}$, vale a dire:

$$x \in V \cap A \iff x = c \quad ,$$

dunque è vero che $f(x) > 0 \;\; \forall x \in V \cap A$;

2) se $c \in A \cap \mathrm{D}A$, allora si ha

$$\lim_{x\to c} f(x) \;=\; f(c) \quad ,$$

quindi, per il teorema della permanenza del segno già studiato a proposito dei limiti delle funzioni (Teorema 2.2), esiste $V \in \mathcal{U}(c)$ tale che $f(x) > 0 \;\; \forall x \in V \cap A \setminus \{c\}$; dato che $f(c) > 0$, possiamo affermare che per tale intorno $V$ si ha anche $f(x) > 0 \;\; \forall x \in V \cap A$.

**Teorema 9.3.** (Continuità della funzione somma). *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite nello stesso insieme $A$ e sia $c \in A$. Supponiamo che entrambe le funzioni $f$ e $g$ siano continue nel punto $c$. Allora anche la funzione somma $f + g$ è continua nel punto $c$.*

*Dimostrazione.* Al solito, vi sono due possibilità:

1) $c \in A \setminus \mathrm{D}A$; in questo caso la funzione $f + g$ è continua nel punto $c$ per definizione;

2) $c \in A \cap \mathrm{D}A$; in questo caso la continuità delle funzioni $f$ e $g$, che abbiamo per ipotesi, significa che:

$$\lim_{x\to c} f(x) \;=\; f(c) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to c} g(x) \;=\; g(c) \quad ;$$

allora, applicando i teoremi sul limite della funzione somma, otteniamo che:

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] \;=\; f(c) + g(c) \quad ,$$

dunque (dato che $f(c) + g(c)$ è il corrispondente di $c$ tramite la funzione $f + g$) anche la funzione somma è continua nel punto $c$.

La linea dimostrativa dei succesivi tre teoremi è del tutto analoga a quella del Teorema 9.3 (precisamente: quando il punto $c$ è un punto isolato di $A$ non occorre provare nulla, mentre, quando $c$ è un punto di accumulazione, basta ricorrere ai corrispondenti teoremi sui limiti), pertanto ne omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 9.4.** (Continuità della funzione prodotto). *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite nello stesso insieme $A$ e sia $c \in A$. Supponiamo che entrambe le funzioni $f$ e $g$ siano continue nel punto $c$. Allora anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è continua nel punto $c$.*

**Teorema 9.5.** (Continuità della funzione rapporto). *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite nello stesso insieme $A$ e supponiamo che risulti $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$. Supponiamo inoltre che entrambe le funzioni $f$ e $g$ siano continue nel punto $c \in A$. Allora anche la funzione rapporto $\frac{f}{g}$ è continua nel punto $c$.*

**Teorema 9.6.** (Continuità della funzione $|f|$). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua nel punto $c \in A$. Allora anche la funzione $|f|$ è continua nel punto $c$.*

**Osservazione 9.1.** Una formulazione equivalente del teorema sulla continuità della funzione rapporto è la seguente:

**Teorema 9.5′.** *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni definite nello stesso insieme $A$ e sia $c \in A$. Supponiamo che entrambe le funzioni $f$ e $g$ siano continue nel punto $c$ e che risulti $g(c) \neq 0$. Allora anche la funzione rapporto $\frac{f}{g}$* (che ha come dominio il sottoinsieme $A_1 = \{x \in A \,:\, g(x) \neq 0\}$) *è continua nel punto $c$.*

Infatti il Teorema 9.5′ implica, come caso particolare, il Teorema 9.5; viceversa, il Teorema 9.5′ si deduce dal Teorema 9.5 applicando quest'ultimo alla coppia di funzioni $f_{A_1}$, $g_{A_1}$, ciò che è possibile grazie al Teorema 9.1.

### 9.2. Il teorema dell'esistenza degli zeri.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, è consuetudine chiamare le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, cioè gli elementi $c$ dell'insieme $A$ tali che $f(c) = 0$, con il nome di "*zeri*" della funzione $f$.

**Teorema 9.7.** (Esistenza degli zeri). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Supponiamo che la funzione $f$ sia continua nell'intervallo $[a, b]$ e che risulti $f(a)f(b) < 0$* (cioè: i valori $f(a)$ e $f(b)$ che la funzione $f$ prende in corrispondenza degli estremi dell'intervallo $[a, b]$ sono numeri aventi segno opposto). *Allora esiste almeno un punto $c \in ]a, b[$ tale che $f(c) = 0$* (cioè: esiste almeno uno zero fella funzione $f$).

*Dimostrazione.* Supponiamo, per fissare le idee, che sia $f(a) < 0$ (e quindi $f(b) > 0$). Consideriamo il seguente sottoinsieme $E$ di $[a, b]$:

$$E \;=\; \{x \in [a, b] \,:\, f(x) \leq 0\} \quad ;$$

graficamente, $E$ è l'insieme delle ascisse dei punti del grafico di $f$ che si trovano "al di sotto" dell'asse $x$ (così come accade per il punto $A = (a, f(a))$) ovvero appartengono a tale asse. È evidente che $E$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto (infatti $a \in E$) e limitato superiormente (infatti, dato che $E \subseteq [a, b]$, il numero $b$ è un maggiorante di $E$). Poiché l'insieme ordinato $(\mathbb{R}, \leq)$ ha la proprietà di completezza possiamo considerare l'estremo superiore di $E$, indichiamolo con $c$. Il numero $c$ appartiene all'intervallo $[a, b]$; infatti, dato che $a \in E$ e che $c$ è un maggiorante di $E$, si ha $a \leq c$ e, dato che $b$ è un maggiorante di $E$ e che $c = \sup E$ è il minimo dei maggioranti di $E$, si ha pure $c \leq b$. Possiamo quindi considerare il numero $f(c)$ (il corrispondente di $c$ tramite $f$). Completiamo la dimostrazione facendo vedere che $f(c) = 0$ (da cui segue, necessariamente, che $c$ è un punto interno dell'intervallo $[a, b]$). Ragioniamo per assurdo e supponiamo che sia $f(c) \neq 0$, cioè che si verifichi una delle seguenti due eventualità : 1) $f(c) < 0$ o 2) $f(c) > 0$. Mostriamo che, in entrambi i casi, si perviene ad una contraddizione.

1) Se $f(c) < 0$, allora $c < b$ e inoltre, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di $c$, e quindi anche un intorno circolare $I(c, \delta)$ di $c$, per il quale si ha:

$$f(x) \ < \ 0 \qquad \forall x \in I(c, \delta) \cap [a, b] \ \ .$$

È allora evidente che il numero $c + \delta$ è minore o uguale a $b$ (altrimenti sarebbe $f(b) < 0$); pertanto si ha $]c, c + \delta[ \subseteq [a, b]$ e inoltre

$$f(x) \ < \ 0 \qquad \forall x \in ]c, c + \delta[ \ \ .$$

La precedente disuguaglianza comporta che tutti i numeri dell'intervallo $]c, c+\delta[$ appartengono all'insieme $E$, ma ciò è assurdo poiché $x \leq c \ \ \forall x \in E$ (prima proprietà dell'estremo superiore).

2) Se $f(c) > 0$, allora $c > a$ e inoltre, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno circolare $I(c, \delta)$ di $c$ per il quale si ha:

$$f(x) \ > \ 0 \qquad \forall x \in I(c, \delta) \cap [a, b] \ \ .$$

È allora evidente che il numero $c-\delta$ è maggiore o uguale ad $a$ (altrimenti sarebbe $f(a) > 0$); di conseguenza risulta $]c - \delta, c] \subseteq [a, b]$ e inoltre

$$f(x) \ > \ 0 \qquad \forall x \in ]c - \delta, c] \ \ .$$

La precedente disuguaglianza comporta che nessuno dei numeri dell'intervallo $]c - \delta, c]$ appartiene all'insieme $E$, ma ciò è assurdo poiché, per la seconda proprietà dell'estremo superiore, esiste almeno un elemento $x^*$ dell'insieme $E$ verificante la disuguaglianza $x^* > c - \delta$ e quindi tale che $x^* \in ]c - \delta, c]$.

**Esempio 9.1.** Risolviamo il seguente esercizio:

"*Provare che l'equazione* $x^{100} + x^7 - 1 = 0$ *ha almeno una soluzione nell'intervallo* $]0, 1[$."

Infatti, la funzione $f(x) = x^{100} + x^7 - 1$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ (quindi anche la resrtizione $f|_{[0,1]}$ è continua in $[0,1]$); si ha inoltre: $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$; pertanto, applicando il Teorema 9.7 alla funzione $f|_{[0,1]}$, abbiamo che:

$$\exists c \in ]0,1[ \ : \quad f(c) = 0 \ ,$$

come volevamo dimostrare.

**Esempio 9.2.** Un'altra interessante applicazione del Teorema 9.7 è la seguente:

"*Se $P(x)$ è un polinomio di grado dispari, l'equzione $P(x) = 0$ ha almeno una soluzione in $\mathbb{R}$.*"

Infatti, $P(x)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e, supposto, ad esempio, che il coefficiente del termine di $P(x)$ di grado massimo sia negativo, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) \ = \ +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) \ = \ -\infty \ ,$$

quindi (per la permanenza del segno) esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$P(x) \ > \ 0 \quad \forall x \in ]-\infty, \alpha[ \ , \quad P(x) \ < \ 0 \quad \forall x \in ]\beta, +\infty[ \ .$$

Fissati $a \in ]-\infty, \alpha[$ e $b \in ]\beta, +\infty[$, possiamo applicare il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione $P|_{[a,b]}$; otteniamo così che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $P(c) = 0$.

Un'immediata generalizzazione del teorema dell'esistenza degli zeri è data dal seguente teorema.

**Teorema 9.8.** (Teorema dei valori "intermedi"). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Supponiamo che i valori presi dalla funzione $f$ in corrispondenza degli estremi dell'intervallo $[a,b]$ siano tra loro diversi: $f(a) \neq f(b)$. Allora la funzione $f$ assume anche ogni valore $\gamma$ "compreso" tra $f(a)$ e $f(b)$* (cioè ogni valore $\gamma$ appartenente all'intervallo aperto di estremi $f(a)$ e $f(b)$).

*Dimostrazione.* Supponiamo, per fissare le idee, che sia $f(a) < f(b)$ e supponiamo che $\gamma$ sia un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, cioè $f(a) < \gamma < f(b)$. Dobbiamo provare che anche $\gamma$ è un elemento del codominio di $f$, cioè che

$$\exists c \in ]a,b[ \ : \ f(c) = \gamma \ .$$

Consideriamo, a tale scopo, la nuova funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge: $g(x) = f(x) - \gamma \ \ \forall x \in [a,b]$. La funzione $g$ è continua in $[a,b]$ in quanto somma di due funzioni continue (la funzione $f$ e la costante $-\gamma$) e risulta

$$g(a) = f(a) - \gamma < 0 \ , \ g(b) = f(b) - \gamma > 0 \ ,$$

dunque sono soddisfatte per la $g$ le ipotesi del Teorema 9.7. Esiste pertanto $c \in ]a,b[$ tale che $g(c) = 0$ , cioè $f(c) = \gamma$.

**Corollario 9.1.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita e continua nell'intervallo $I$ di $\mathbb{R}$* (intervallo di qualunque tipo) *. Allora il codominio $f(I)$ di $f$ ha la seguente proprietà:*

$$y_1, y_2 \in f(I)\ ,\ y_1 < y_2 \quad \Longrightarrow \quad [y_1, y_2] \subseteq f(I)\ . \tag{9.1}$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che $y_1, y_2 \in f(I)$ , $y_1 < y_2$ e dimostriamo che ogni elemento $y$ di $[y_1, y_2]$ appartiene a $f(I)$. Ciò è ovvio se $y = y_1$ oppure $y = y_2$; se, invece, $y \in ]y_1, y_2[$, allora, denotati con $x_1, x_2$ due elementi di $I$ tali che $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, basta applicare il Teorema 9.8 alla restrizione di $f$ all'intervallo chiuso e limitato di estremi $x_1$ e $x_2$ (cioè $[x_1, x_2]$ ovvero $[x_2, x_1]$, secondo che sia $x_1 < x_2$ ovvero $x_1 > x_2$).

**Corollario 9.2.** (Il codominio di una funzione continua in un intervallo). *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua nell'intervallo $I$ di $\mathbb{R}$, il codominio $f(I)$ di $f$ è o un insieme unitario* (se $f$ è costante) *oppure un intervallo.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che la funzione $f$ non sia costante ed indichiamo con $l$ e $L$, rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f$ (cioè l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(I)$). Ovviamente $l$ e $L$ sono elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ (non sappiamo se $f$ è limitata oppure no) ed è $l < L$ (dato che $f$ non è costante). Dimostriamo che il codominio $f(I)$ è uguale all'intervallo avente come estremi $l$ e $L$, chiuso oppure aperto a sinistra [risp. a destra] secondo che $l$ [risp. $L$] sia o meno un elemento di $f(I)$. Poiché per l'estremo inferiore $l$ abbiamo tre possibiltà (può essere: $l = -\infty$, oppure $l \in \mathbb{R}$ ma $l \notin f(I)$, oppure ancora $l = \min f(I)$) e, analogamente, per l'estremo superiore $L$ abbiamo altrettante possibilità, in tutto abbiamo nove casi da considerare. Ne prenderemo in esame solo alcuni, dopo di che sarà evidente come si deve ragionare nei casi rimanenti.

Supponiamo che sia $l = -\infty$ e $L = \max f(I)$. Dimostriamo che in questo caso risulta $f(I) = ]-\infty, L]$. È ovvio che ogni elemento di $f(I)$ appartiene all'intervallo $]-\infty, L]$, dunque $f(I) \subseteq ]-\infty, L]$. Proviamo l'inclusione contraria. Sia $y$ un elemento di $]-\infty, L]$. Poichè $f(I)$ non è limitato inferiormente esiste $y_1 \in f(I)$ tale che $y_1 < y$; d'altra parte si ha $y \leq L$ e $L \in f(I)$; per la proprietà (9.1) risulta $[y_1, L] \subseteq f(I)$ e quindi anche $y \in f(I)$.

Supponiamo adesso che sia $l = -\infty$ e $L \in \mathbb{R} \setminus f(I)$. Dimostriamo che risulta $f(I) = ]-\infty, L[$. È ovvio che ogni elemento di $f(I)$ appartiene all'intervallo $]-\infty, L[$, dunque $f(I) \subseteq ]-\infty, L[$. Proviamo l'inclusione contraria. Sia $y$ un elemento di $]-\infty, L[$. Poichè $f(I)$ non è limitato inferiormente esiste $y_1 \in f(I)$ tale che $y_1 < y$; d'altra parte, essendo $y < L$, per la seconda proprietà dell'estremo superiore esiste $y_2 \in f(I)$ tale che $y < y_2$; per la proprietà (9.1) risulta $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$ e quindi anche $y \in f(I)$.

Supponiamo, infine, che $l = \min f(I)$, $L = \max f(I)$ e proviamo che $f(I) = [l, L]$. Ovviamente si ha $f(I) \subseteq [l, L]$. D'altra parte, essendo $l, L \in f(I)$, per la proprietà (9.1) si ha pure $[l, L] \subseteq f(I)$.

**Osservazione 9.2.** Nei due teoremi che precedono, così come nei corollari, entrambe le ipotesi: "il dominio di $f$ è un intervallo" e "la funzione $f$ è continua nel suo dominio" sono indispensabili. Per giustificare questa affermazione, consideriamo i seguenti due semplicissimi esempi.

1) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$f(x) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{se } x \in ]-\infty, 0] \;, \\ 1 & \text{se } x \in ]0, +\infty[ \;, \end{cases}$$

ha come dominio un intervallo ma, pur prendendo sia il valore $-1$ che il valore 1, non assume alcuno dei valori compresi tra $-1$ e 1 (si noti che $f$ ha una discontinuità nel punto $c = 0$).

2) Anche la funzione $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita tramite la regola

$$g(x) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{se } x \in ]-\infty, 0[ \;, \\ 1 & \text{se } x \in ]0, +\infty[ \;, \end{cases}$$

prende entrambi i valori $-1$ e 1 ma non assume nessuno dei valori compresi tra di essi. Questa volta non è verificata l'ipotesi che il dominio di $f$ sia un intervallo, mentre è vero che $f$ è continua in tutto il suo dominio; infatti, grazie al teorema sui limiti delle restrizioni "larghe", abbiamo che per ogni $x_0 < 0$ risulta

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} g|_{]-\infty,0[}(x) = \lim_{x \to x_0} (-1)|_{]-\infty,0[} = -1 = g(x_0)$$

e, analogamente, per ogni $x_0 > 0$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} g|_{]-\infty,0[}(x) = \lim_{x \to x_0} 1|_{]-\infty,0[} = 1 = g(x_0) \quad .$$

**Osservazione 9.3.** Il teorema dei valori intermedi e la dimostrazione del Corollario 9.1 hanno come conseguenza che, se si immagina di "percorrere" il grafico di una funzione continua in un intervallo da un suo qualsiasi punto $(x_1, y_1)$ ad un altro qualsiasi punto $(x_2, y_2)$, allora non è possibile "saltare" nessuna ordinata $y$ (così come, dato che il dominio della funzione è un intervallo, non è possibile saltare alcuna ascissa $x$). Questa constatazione ci aiuta ad accettare, intuitivamente, il seguente importante fatto:

"*Il grafico di una funzione continua in un intervallo è formato da un solo pezzo.*"

Naturalmente, volendo trattare l'argomento da un punto di vista rigoroso, la precedente affermazione rimane priva di significato se non si stabilisce con una definizione ben precisa che cosa vuol dire che un insieme "è formato da un solo pezzo"; inoltre, una volta fatto questo, occorre dare una effettiva dimostrazione (le considerazioni che precedono costituiscono solamente un "indizio"). Tutto ciò richiede però dei concetti e delle tecniche che non rientrano nell'ambito di questo corso di Istituzioni di Matematiche, per cui ci limitiamo a prendere per buono il precedente enunciato, attribuendogli il significato che ci suggerisce l'intuizione, anche con l'aiuto dei due esempi "in negativo" riportati nella precedente Osservazione 9.2 (in ognuno dei quali è evidente che il grafico della funzione considerata è costituito da due pezzi "staccati").

**Osservazione 9.4.** (Ricerca del codominio di una funzione).

I risultati esposti in questo numero si rivelano utili anche nella ricerca del codominio di una funzione $f$ e nella discussione dell'equazione $f(x) = y$.

Per trovare il codominio di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo $I$ la procedura da seguire è, in linea di massima, la seguente:

1) si studia dapprima la monotonia di $f$ (cioè si trovano gli intervalli $I_1 \subseteq I$ nei quali la $f$ è crescente e quelli nei quali è decrescente);

2) successivamente si applicano, in maniera opportuna, il Corollario 9.2 ed il teorema sui limiti delle funzioni monotone (Teorema 2.6).

Vedremo in seguito (quando ci occuperemo delle applicazioni delle derivate) ciò che si deve fare per studiare la monotonia di $f$. Per il momento, supponendo di conoscere la monotonia di $f$, cerchiamo di chiarire con degli esempi il significato del punto 2).

Supponiamo che la funzione $f$ sia continua e fortemente decrescente nell'intervallo chiuso $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). Per il Corollario 9.2 il codominio $f([a, +\infty[)$ è un intervallo. Essendo $f(a) \geq f(x) \ \ \forall x \in [a, +\infty[$, abbiamo che $f(a)$ è il massimo del codominio. D'altra parte, per il Teorema 2.6, abbiamo che

$$\inf f([a, +\infty[) \ = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad .$$

Supponiamo di avere calcolato il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e di avere trovato che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ = \ l \in \mathbb{R} \quad ; \tag{9.2}$$

possiamo allora concludere che

$$f([a, +\infty[) \ = \ ]l, f(a)]$$

(per convincersi che il codominio è un intervallo aperto a sinistra basta effettuare il seguente facile ragionamento per assurdo: se $f([a, +\infty[)$ fosse l'intervallo chiuso $[l, f(a)]$, cioè se esistesse $\overline{x} \in [a, +\infty[$ tale che $f(\overline{x}) = l$, allora, dato che $f$ è fortemente decrescente, risulterebbe $l = f(\overline{x}) > f(x) \ \ \forall x \in ]\overline{x}, +\infty[$, ma ciò è assurdo in quanto $l$ è l'estremo inferiore di $f([a, +\infty[)$).

Ovviamente, se invece della (9.2) si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ = \ -\infty \quad ,$$

allora risulta

$$f([a, +\infty[) \ = \ ] - \infty, f(a)] \quad .$$

Supponiamo adesso che la funzione $f$ sia continua e fortemente decrescente nell'intervallo aperto $]a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). In questo caso, con ragionamenti analoghi a quelli svolti in precedenza, troviamo che il codominio è l'intervallo aperto

$$f(]a, +\infty[) \ = \ ]l, L[ \quad ,$$

dove

$$l \;=\; \lim_{x\to+\infty} f(x)\ [\in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}] \quad , \quad L \;=\; \lim_{x\to a} f(x)\ [\in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}]$$

(notiamo, in particolare, che, quando $L \in \mathbb{R}$, non può essere $L \in f(]a,+\infty[)$ perché, altrimenti, esisterebbe $\overline{\overline{x}} \in ]a,+\infty[$ tale che

$$f(x) > f(\overline{\overline{x}}) = L \quad \forall x \in ]a, \overline{\overline{x}}[ \quad ,$$

in contraddizione con il fatto che $L = \sup f(]a,+\infty[)$).

Se, invece, la funzione $f$ è continua e fortemente decrescente nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R})$, allora, dato che $f([a,b])$ è un intervallo (Corollario 9.2) e che, ovviamente, $f(a)$ e $f(b)$ sono, rispettivamente, il massimo ed il minimo di $f([a,b])$, risulta

$$f([a,b]) \;=\; [f(b), f(a)] \quad .$$

Esaminiamo, infine, una situazione leggermente più complicata. Supponiamo che la funzione $f$ sia continua nell'intervallo aperto $]a,+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ e supponiamo di avere scoperto che vi sono due numeri $c_1, c_2 \in ]a,+\infty[$, $c_1 < c_2$, tali che $f$ è fortemente crescente in ognuno degli intervalli $]a,c_1]$ e $[c_2,+\infty[$ e fortemente decrescente in $[c_1,c_2]$. In questo caso, per trovare il codominio $f(]a,+\infty[)$ (che, per il Corollario 9.2 è un intervallo), basta osservare che, ovviamente, risulta

$$f(]a,+\infty[) \;=\; f(]a,c_1]) \cup f([c_1,c_2]) \cup f([c_2,+\infty[) \tag{9.3}$$

e che per ognuno dei tre insiemi immagine che figurano al secondo membro si può ragionare come in precedenza. Si trova così:

$$f(]a,c_1]) \;=\; ]l, f(c_1)] \quad , \quad f([c_1,c_2]) \;=\; [f(c_2), f(c_1)] \quad , \quad f([c_2,+\infty[) \;=\; [f(c_2), L[ \quad ,$$

dove

$$l \;=\; \lim_{x\to a} f(x)\ [\in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}] \quad , \quad L \;=\; \lim_{x\to+\infty} f(x)\ [\in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}] \quad .$$

Ne segue che l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'intervallo $f(]a,+\infty[)$ sono dati da

$$\inf f(]a,+\infty[) \;=\; \begin{cases} l & \text{se } l = -\infty \text{ oppure } l \in \mathbb{R} \text{ e } l < f(c_2), \\ f(c_2) & \text{se } l \in \mathbb{R} \text{ e } f(c_2) \le l, \end{cases}$$

$$\sup f(]a,+\infty[) \;=\; \begin{cases} L & \text{se } L = +\infty \text{ oppure } L \in \mathbb{R} \text{ e } L > f(c_1), \\ f(c_1) & \text{se } L \in \mathbb{R} \text{ e } f(c_1) \ge L; \end{cases}$$

inoltre l'intervallo $f(]a,+\infty[)$ è chiuso a sinistra [risp. a destra] solo nel caso in cui $\inf f(]a,+\infty[) = f(c_2)$ [risp. $\sup f(]a,+\infty[) = f(c_1)$].

Le considerazioni precedentemente svolte si rivelano utili anche per la discussione dell'equazione (nell'incognita $x$)

$$f(x) = y \quad , \tag{$\circ$}$$

al variare di $y$ nel codominio di $f$. Riprendiamo in esame, a titolo di esempio, il caso della funzione $f$ continua nell'intervallo aperto $]a,+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$), fortemente crescente in $]a,c_1]$ e in $[c_2,+\infty[$, fortemente decrescente in $[c_1,c_2]$. Supponiamo, per fissare le idee, che risulti:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad , \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

e inoltre

$$l > f(c_2) \quad , \qquad L > f(c_1) \quad .$$

Il codominio di $f$ è allora

$$f(]a,+\infty[) \;=\; [f(c_2), L[ \quad ;$$

inoltre, il grafico di $f$ è costituito da un tratto "in salita" ([9]) (relativo all'intervallo $]a,c_1]$) che congiunge il punto $(a,l)$ (che però non fa parte del grafico) con il punto $(c_1, f(c_1))$, da un tratto "in discesa" (relativo all'intervallo $[c_1,c_2]$) che congiunge il punto $(c_1,f(c_1))$ con il punto $(c_2, f(c_2))$ e da un ulteriore tratto "in salita" (relativo all'intervallo $[c_2,+\infty[$) che ha inizio con il punto $(c_2,f(c_2))$ e, al tendere di $x$ a $+\infty$, tende a sollevarsi alla "quota" $y = L$.

Ricordando la (9.3) e tenendo presente che

$$f(c_2) \;< l \;<\; f(c_1) \;<\; L \quad ,$$

per l'equazione (°) si hanno i seguenti risultati ([10]):

– se $y = f(c_2)$, la (°) ha un'unica soluzione $x_1$, precisamente $x_1 = c_2$;

– se $f(c_2) < y \leq l$, la (°) ha due soluzioni: $x_1$, $x_2$, che appartengono, rispettivamente, all'intervallo $]c_1,c_2[$ ed all'intervallo $]c_2,+\infty[$;

– se $l < y < f(c_1)$, la (°) ha tre soluzioni: $x_1$, $x_2$, $x_3$, e risulta: $x_1 \in ]a,c_1[$, $x_2 \in ]c_1,c_2[$, $x_3 \in ]c_2,+\infty[$;

– se $y = f(c_1)$, la (°) ha due soluzioni: $x_1$, $x_2$, con $x_1 = c_1$, $x_2 \in ]c_2,+\infty[$;

– se $f(c_1) < y < L$, la (°) ha un'unica soluzione $x_1$, che appartiene all'intervallo $]c_2,+\infty[$.

## 9.3. Il teorema di Weierstrass.

Premettiamo il seguente lemma.

**Lemma 9.1.** (Continuità e successioni). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua nel punto $c \in A$. Sia, inoltre, $\{c_n\}$ una successione di elementi di $A$ convergente a $c$:*

$$\text{i)} \;\; c_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \text{ii)} \;\; \lim_{n\to\infty} c_n = c \quad .$$

([9]) Si pensa di percorrere il grafico nella direzione positiva dell'asse delle ascisse.

([10]) È utile che lo studente riscontri "graficamente" i risultati elencati, tracciando un possibile grafico di $f$ (una linea continua costituita da tre tratti con le caratteristiche precedentemente descritte) e ricordando che, per ogni $\overline{y} \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione $f(x) = \overline{y}$ sono le ascisse degli eventuali punti comuni al grafico di $f$ ed alla retta di equazione $y = \overline{y}$.

*Allora la successione $\{f(c_n)\}$ converge a $f(c)$:*

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) \;=\; f(c) \quad .$$

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(f(c)) \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \;:\quad f(c_n) \in U \quad \forall n \geq \overline{n} \quad . \tag{9.4}$$

Per provare ciò osserviamo che, fissato comunque l'intorno $U \in \mathcal{U}(f(c))$, per la continuità di $f$ nel punto $c$ possiamo trovare un intorno $V \in \mathcal{U}(c)$ tale che:

$$x \in V \cap A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in U \quad ;$$

inoltre, per l'ipotesi ii), in corrispondenza dell'intorno $V$ così determinato possiamo trovare un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n \geq \overline{n} \quad \Longrightarrow \quad c_n \in V \quad ;$$

tenuto conto dell'ipotesi i), abbiamo allora le seguenti implicazioni:

$$n \geq \overline{n} \implies c_n \in V \text{ e } c_n \in A \iff c_n \in V \cap A \implies f(c_n) \in U \quad ;$$

con ciò rimane provata la (9.4).

**Teorema 9.9.** (Teorema di Weierstrass). *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ è dotata di minimo e di massimo.*

*Dimostrazione.* Proviamo che la funzione $f$ è dotata di massimo (analogamente si procede per il minimo), cioè proviamo che:

$$\exists x^* \in [a,b] \;:\; f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a,b] \quad . \tag{9.5}$$

Perverremo alla (9.5) in due tappe; precisamente, faremo vedere, nell'ordine, che sono vere le seguenti due affermazioni:

1) la funzione $f$ è limitata superiormente;

2) denotato con $L$ il $\sup_{[a,b]} f$, esiste almeno un punto $x^* \in [a,b]$ tale che $f(x^*) = L$.

Dimostriamo l'affermazione 1). Supponiamo, per assurdo, che la funzione $f$ non sia limitata superiormente. Allora, fissato comunque $n \in \mathbb{N}$, dato che il numero $n$ non è un maggiorante di $f([a,b])$, esistono punti $x$ dell'intervallo $[a,b]$ tali che $f(x) > n$; pertanto, considerato l'insieme

$$A_n \;=\; \{x \in [a,b] \;:\; f(x) > n\} \quad ,$$

abbiamo che $A_n \neq \emptyset$. Indichiamo con $c_n$ l'estremo inferiore di $A_n$. Dato che $A_n$ è un sottoinsieme di $[a,b]$, è facile convincersi che anche $c_n$ è un elemento di $[a,b]$. Verifichiamo che risulta

$$f(c_n) \;\geq\; n \quad . \tag{9.6}$$

Infatti, se fosse $f(c_n) < n$, allora, applicando il teorema della permanenza del segno alla funzione $f(x) - n$, relativamente al punto $c_n$, avremmo l'esistenza di un intorno circolare $I(c_n, \delta)$ di $c_n$ tale che:

$$f(x) \ < \ n \quad \forall x \in I(c_n, \delta) \cap [a, b] \ \ ; \tag{9.7}$$

d'altra parte, per la seconda proprietà dell'estremo inferiore, deve esistere almeno un elemento $x' \in A_n$ tale che $x' < c_n + \delta$; osservando che il numero $x'$ appartiene ad $[a, b]$ (in quanto $A_n \subseteq [a, b]$) e che inoltre si ha $x' \geq c_n$ (in quanto $c_n = \inf A_n$), avremmo allora $x' \in I(c_n, \delta) \cap [a, b]$ e quindi, per la (9.7), $f(x') < n$; questo però è assurdo in quanto $x' \in A_n$ e quindi $f(x') > n$.

A questo punto, dato che le precedenti considerazioni valgono per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo una successione

$$A_0, \ A_1, \ A_2, \ \ldots \ , \ A_n \ , \ \ldots \tag{9.8}$$

di sottoinsiemi non vuoti di $[a, b]$ ed una successione

$$c_0, \ c_1, \ c_2, \ \ldots \ , \ c_n \ , \ \ldots \tag{9.9}$$

di elementi di $[a, b]$ (gli estremi inferiori degli insiemi (9.8)). Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta, ovviamente,

$$A_{n+1} \ \subseteq \ A_n \tag{9.10}$$

e quindi

$$c_n \ \leq c_{n+1} \quad (^{11}) \ ,$$

dunque la successione $\{c_n\}$ è crescente. Indichiamo con $c$ l'estremo superiore della successione; poiché $c_n \in [a, b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, anche $c$ è un elemento di $[a, b]$; inoltre, per il teorema sulle successioni crescenti, abbiamo che

$$\lim_{n \to \infty} c_n \ = \ c$$

e quindi (Lemma 9.1)

$$\lim_{n \to \infty} f(c_n) \ = \ f(c) \ \ ;$$

d'altra parte, come abbiamo verificato, risulta

$$f(c_n) \ \geq \ n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n \to \infty} f(c_n) \ = \ +\infty \ \ ;$$

siamo dunque pervenuti alla seguente contraddizione: la successione $\{f(c_n)\}$ è sia convergente che divergente; la contraddizione deriva dall'aver ammesso che $f$ non sia limitata superiormente.

Dimostriamo adesso l'affermazione 2). Per la seconda proprietà dell'estremo superiore, fissato comunque $n \in \mathbb{N}^+$, esistono elementi $x$ dell'intervallo $[a,b]$ tali che $f(x) > L - \frac{1}{n}$, quindi, considerato l'insieme

$$B_n \;=\; \left\{ x \in [a,b] \;:\; f(x) > L - \frac{1}{n} \right\} \quad ,$$

abbiamo che $B_n \neq \emptyset$. Indichiamo con $x_n$ l'estremo inferiore di $B_n$ ed osserviamo che $x_n$ è, ovviamente, un elemento di $[a,b]$ e che risulta inoltre

$$f(x_n) \;\geq\; L - \frac{1}{n}$$

(per convincersi di questa seconda affermazione basta adattare il ragionamento per assurdo seguito per dimostrare la (9.6)).

Abbiamo allora, ancora una volta, una succesione

$$B_1,\; B_2,\; \ldots \;,\; B_n \;,\; \ldots$$

di sottoinsiemi non vuoti di $[a,b]$ e la successione

$$x_1,\; x_2,\; \ldots \;,\; x_n \;,\; \ldots$$

dei loro estremi inferiori. Poiché, ovviamente,

$$B_{n+1} \;\subseteq\; B_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad ,$$

si ha

$$x_n \;\leq\; x_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad ,$$

dunque (come abbiamo già visto a proposito della $\{c_n\}$) la successione $\{x_n\}$ converge ad un elemento $x^*$ di $[a,b]$. Per il Lemma 9.1 abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; f(x^*) \quad ; \tag{9.11}$$

d'altra parte abbiamo pure

$$L - \frac{1}{n} \;<\; f(x_n) \;\leq\; L \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

---

(11) Infatti, dalla (9.10) segue che ogni minorante di $A_n$ è anche un minorante di $A_{n+1}$; in particolare, anche $c_n$ è un minorante di $A_{n+1}$ e quindi $c_n$ è minore o uguale a $c_{n+1}$ (dato che $c_{n+1}$ è il massimo dei minoranti di $A_{n+1}$).

(la disuguaglianza di sinistra è stata dimostrata in precedenza, quella di destra segue dal fatto che $L = \sup_{[a,b]} f$), dunque, per il teorema dei carabinieri,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; L \quad . \tag{9.12}$$

Dalla (9.11) e dalla (9.12), per l'unicità del limite, segue che $f(x^*) = L$. Ciò completa la dimostrazione.

## 9.4. Continuità della funzione composta e della funzione inversa.

Terminiamo questo capitolo con due teoremi che, come suggerisce il titolo, garantiscono, sotto opportune ipotesi, la continuità della funzione composta $g \circ f$ e della funzione inversa $f^{-1}$. Il primo dei due teoremi ha carattere "locale": si suppone la continuità di ognuna delle due funzioni "componenti" $f$ e $g$ in un punto e si ottiene, come conseguenza, la continuità di $g \circ f$ in un punto; il secondo, invece, è di tipo "globale": occorre assumere, per ipotesi, la continuità di $f$ in tutto il suo dominio, ma, come conseguenza, si ha la continuità di $f^{-1}$ in tutto il suo dominio.

**Teorema 9.10.** (Continuità della funzione composta). *Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $g : C \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(A) \subseteq C$* (per cui è possibile considerare la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$). *Supponiamo che la funzione $f$ sia continua nel punto $x_0 \in A$ e che la funzione $g$ sia continua nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora anche la funzione composta $g \circ f$ è continua nel punto $x_0$.*

*Dimostrazione.* Come è nostra abitudine, indichiamo la variabile indipendente con $x$ nel caso della funzione "interna" $f$ e con $y$ nel caso della $g$.

Dire che la funzione $g$ è continua nel punto $y_0$ vuol dire che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(g(y_0)) \quad \exists V \in \mathcal{U}(y_0) \quad : \quad g(y) \in U \qquad \forall y \in V \cap C \quad ; \tag{9.13}$$

analogamente, dire che $f$ è continua nel punto $x_0$ vuol dire che (ricordiamo che $f(x_0) = y_0$):

$$\forall V \in \mathcal{U}(y_0) \quad \exists W \in \mathcal{U}(x_0) \quad : \quad f(x) \in V \qquad \forall x \in W \cap A \quad . \tag{9.14}$$

La tesi da dimostrare (cioè la continuità di $g \circ f$ nel punto $x_0$) si può esprimere nel modo seguente (dato che $g(f(x_0)) = g(y_0)$):

$$\forall U \in \mathcal{U}(g(y_0)) \quad \exists W \in \mathcal{U}(x_0) \quad : \quad g(f(x)) \in U \qquad \forall x \in W \cap A \quad . \tag{9.15}$$

Per provare la (9.15) basta "combinare" la (9.13) e la (9.14). Infatti, fissato un qualsiasi intorno $U \in \mathcal{U}(g(y_0))$, la (9.13) assicura l'esistenza di un intorno $V \in \mathcal{U}(y_0)$ tale che:

$$y \in V \cap C \quad \Longrightarrow \quad g(y) \in U \quad ;$$

ma, in corrispondenza dell'intorno $V \in \mathcal{U}(y_0)$ così determinato, è possibile trovare, per la (9.14), un intorno $W \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che:

$$x \in W \cap A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in V \ \ ;$$

ricordando che $f(A) \subseteq C$, abbiamo allora la seguente catena di implicazioni:

$$x \in W \cap A \implies f(x) \in V \text{ e } f(x) \in C \iff f(x) \in V \cap C \implies g(f(x)) \in U \ \ ;$$

pertanto è provata la (9.14).

**Esempio 9.3.** La funzione $5^{2x-3\cos x}$ è continua in $\mathbb{R}$. Infatti $5^{2x-3\cos x}$ è una funzione composta $g \circ f$ per mezzo delle due funzioni

$$f(x) \ = \ 2x - 3\cos x \ \ , \ \ g(y) \ = \ 5^y \ \ ,$$

entrambe continue in tutto $\mathbb{R}$. Applicando il Teorema 9.10 (con $x_0$ un qualsiasi punto di $\mathbb{R}$ e $y_0 = 2x_0 - 3\cos x_0$) otteniamo che $5^{2x-3\cos x}$ è continua in $x_0$ e quindi, per l'arbitrarietà di $x_0 \in \mathbb{R}$, è continua in tutto $\mathbb{R}$.

**Esempio 9.4.** La funzione $\log(x^2-4)$ è continua in tutto il suo dominio, che è $A = ]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Infatti $\log(x^2-4)$ è una funzione composta:

$$\log(x^2-4) \ = \ g(f(x)) \ \ ,$$

essendo

$$f(x) \ = \ (x^2-4)|_A \ \ , \ \ g(y) \ = \ \log y \ \ ;$$

inoltre $f$ è continua in tutto $A$ (in quanto restrizione della funzione $x^2-4$, continua in tutto $\mathbb{R}$), $g$ è continua nel suo dominio $C = ]0, +\infty[$ e $f(A) \subseteq C$. Basta allora applicare il Teorema 9.10 (con $x_0$ un punto qualsiasi di $A$ e $y_0 = x_0^2 - 4$).

**Teorema 9.11.** (Continuità della funzione inversa). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e fortemente monotona nell'intervallo $I$. Allora anche la funzione inversa $f^{-1}$ (12) è continua nell'intervallo $J = f(I)$ (13).*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per fissare le idee, che la funzione $f$ sia fortemente decrescente in $I$; di conseguenza anche la funzione inversa $f^{-1}$ è fortemente decrescente in $J$. Dimostriamo che $f^{-1}$ è continua in un qualsiasi punto $y_0$ di $J$. Posto $x_0 = f^{-1}(y_0)$, dobbiamo provare che:

$$\forall V \in \mathcal{U}(x_0) \ \ \exists U \in \mathcal{U}(y_0) \ \ : \ \ f^{-1}(y) \in V \quad \forall y \in U \cap J \ \ . \tag{9.16}$$

---

(12) Ricordiamo che l'esistenza della funzione inversa è assicurata dalla forte monotonia di $f$; ricordiamo inoltre che, in questa situazione, anche la funzione inversa risulta monotona nello stesso modo di $f$.

(13) L'insieme $f(I)$ è un intervallo per il Corollario 9.2.

Supponiamo, in un primo momento, che $y_0$ sia un punto interno all'intervallo $J$; ne segue che anche $x_0$ è interno all'intervallo $I$, quindi esiste un intorno circolare $I(x_0, \delta_1)$ di $x_0$ tale che $I(x_0, \delta_1) \subseteq I$. Fissato un qualsiasi intorno $V \in \mathcal{U}(x_0)$, esiste un altro intorno circolare $I(x_0, \delta_2)$ tale che $I(x_0, \delta_2) \subseteq V$, pertanto, posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, risulta $I(x_0, \delta) \subseteq V \cap I$. Fissiamo due numeri $x_1, x_2$ in modo che

$$x_0 - \delta \ < \ x_1 \ < x_0 \ < x_2 \ < x_0 + \delta$$

ed indichiamo con $y_1, y_2$ i loro corrispondenti tramite la $f$:

$$y_1 \ = \ f(x_1) \quad , \quad y_2 \ = \ f(x_2) \quad .$$

Risulta

$$y_1 \ > \ y_0 \ > y_2 \quad ,$$

dunque l'insieme $U = [y_2, y_1]$ è un intorno di $y_0$, e si ha:

$$y \in U \cap J \ (= U) \implies f^{-1}(y) \in [f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)] \ = \ [x_1, x_2] \ \subseteq \ I(x_0, \delta) \ \subseteq \ V \cap I \ \subseteq \ V \quad ,$$

con il che resta provata la (9.15).

Supponiamo, adesso, che $y_0$ sia un estremo dell'intervallo $J$, ad esempio $y_0 = \min J$; ne segue che $x_0$ è il massimo dell'intervallo $I$ ed esiste $\delta_1 > 0$ tale che $]x_0 - \delta_1, x_0] \subseteq I$. Fissato un qualsiasi intorno $V \in \mathcal{U}(x_0)$, esiste un intorno circolare $I(x_0, \delta_2)$ tale che $I(x_0, \delta_2) \subseteq V$; pertanto, posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, risulta $]x_0 - \delta, x_0] \subseteq V \cap I$. Fissiamo un numero $x_1$ in modo che

$$x_0 - \delta \ < \ x_1 \ < x_0$$

e poniamo $y_1 = f(x_1)$. Risulta

$$y_1 \ > \ y_0 \quad ,$$

dunque l'insieme $U = ]-\infty, y_1]$ è un intorno di $y_0$, e si ha:

$$y \in U \cap J \ = [y_0, y_1] \implies$$
$$\implies \ f^{-1}(y) \in [f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_0)] \ = \ [x_1, x_0] \ \subseteq ]x_0 - \delta, x_0] \ \subseteq \ V \cap I \ \subseteq \ V \quad ;$$

pertanto, anche in questo caso, è provata la (9.15).

Presentiamo infine due importanti applicazioni del Teorema 9.11.

**Esempio 9.5.** (Continuità della funzione $\sqrt[n]{y}$).

La funzione $\sqrt[n]{y}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, (avente come dominio tutto $\mathbb{R}$ ovvero l'intervallo $[0, +\infty[$, secondo che $n$ sia dispari ovvero pari) è la funzione inversa della funzione $x^n$ ovvero della restrizione $x^n|_{[0,+\infty[}$, secondo che $n$ sia dispari ovvero pari. In entrambi i casi abbiamo che la funzione "originaria" $f$ (cioè $f(x) = x^n$ se $n$ è dispari e $f(x) = x^n|_{[0,+\infty[}$ se $n$ è pari) è fortemente crescente e continua nel suo dominio, quindi sono verificate le ipotesi del Teorema 9.11. Ne segue che $\sqrt[n]{y}$ è continua nel suo dominio, qualunque sia

$n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Possiamo dunque asserire che, per ogni $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ ed ogni punto $c$ del dominio di $\sqrt[n]{y}$, risulta:

$$\lim_{y \to c} \sqrt[n]{y} \ = \ \sqrt[n]{c} \ .$$

Per quanto riguarda i limiti per $y \to +\infty$ e $y \to -\infty$ (quest'ultimo, naturalmente, solo nel caso $n$ dispari) dato che, in ogni caso $\sqrt[n]{y}$ è una funzione fortemente crescente, basta tenere presente che il codominio di $\sqrt[n]{y}$ è $\mathbb{R}$ quando $n$ è dispari e $[0,+\infty[$ quando $n$ è pari ed applicare il teorema sui limiti delle funzioni monotone; si ottiene in questo modo:

$$\lim_{y \to +\infty} \sqrt[n]{y} \ = \ +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \ , \tag{9.17}$$

$$\lim_{y \to -\infty} \sqrt[n]{y} \ = \ -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ dispari},\ n \geq 3 \ . \tag{9.18}$$

Riepilogando, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 9.1.** *La funzione* $\sqrt[n]{y}$ *è continua* (nel suo dominio) *qualunque sia* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. *Valgono inoltre le relazioni di limite* (9.17) *e* (9.18).

**Esempio 9.5.** (Continuità delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche).

La funzione $\operatorname{arcsen} y$ è, per definizione, la funzione inversa della funzione $\operatorname{sen} x|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Poiché $\operatorname{sen} x|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ è fortemente crescente e continua in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, per il Teorema 9.11 la funzione $\operatorname{arcsen} y$ è continua nel suo dominio $[-1,1]$.

Analogamente si ha che $\arccos y$ è continua in $[-1,1]$.

Infine, anche la funzione $\operatorname{arctg} y$, che è la funzione inversa della restrizione $\operatorname{tg} x|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, fortemente crescente e continua in $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, risulta, per il Teorema 9.11, continua nel suo dominio $\mathbb{R}$.

Si ha inoltre, dato che $\operatorname{arctg} y$ è fortemente crescente in $\mathbb{R}$ ed ha come codominio $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$\lim_{y \to -\infty} \operatorname{arctg} y = \inf_{y \in \mathbb{R}} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2} \ , \quad \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \sup_{y \in \mathbb{R}} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \ .$$

Abbiamo pertanto la seguente proposizione.

**Proposizione 9.2.** *Le funzioni* $\operatorname{arcsen} y$ *e* $\arccos y$ *sono continue in* $[-1,1]$. *La funzione* $\operatorname{arctg} y$ *è continua in* $\mathbb{R}$. *Valgono inoltre le seguenti relazioni di limite:*

$$\lim_{y \to -\infty} \operatorname{arctg} y \ = \ -\frac{\pi}{2} \ , \quad \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y \ = \ \frac{\pi}{2} \ .$$