Esercizi sui sistemi di equazioni lineari.

1 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y - z = -3 \\ x - y - z = 0 \end{cases} .$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite x, y e z. Poichè $m = n = 3$, la prima cosa da fare è calcolare il determinante della matrice incompleta A per vedere se sono verificate le ipotesi del teorema di Cramer. Si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

(effettuando la sostituzione $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$)

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3(1+1) = -6 \neq 0 ,$$

dunque, per il teorema di Cramer, il sistema è determinato. La soluzione $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ si trova con la regola di Cramer:

$$\overline{x} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} \overset{(\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1)}{=} \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3(1+1)}{-6} = 1 ;$$

$$\overline{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-6} \overset{(\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1(-6-6)}{-6} = -2 ;$$

$$\overline{z} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} \overset{(\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)}{=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3 \cdot 6}{-6} = 3 .$$

In conclusione, il sistema è determinato e la sua unica soluzione è la terna ordinata $(1, -2, 3)$.

2 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x \ \ - y + 4z = 0 \\ x - 2y \qquad = 1 \\ 2x - 5y - 4z = 2 \end{cases} .$$

Anche in questo caso è $m = n = 3$, per cui conviene iniziare dal calcolo del determinante della matrice incompleta. Si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

e quindi, dato che nell'ultimo determinante è $\mathbf{R}_1 = 3\mathbf{R}_2$, si conclude che $\det A = 0$.

Cerchiamo allora la caratteristica della matrice incompleta A e di quella completa

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \end{Vmatrix} .$$

Per la matrice A, essendo $\det A = 0$, si ha $\mathrm{r}(A) \leq 2$; osservando, poi, che per il minore

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

risulta $\det M = -2 + 1 = -1 \neq 0$, si conclude che $\mathrm{r}(A) = 2$. Per la matrice completa si ha allora $2 \leq \mathrm{r}(B) \leq 3$ e, per decidere se è $\mathrm{r}(B) = 2$ oppure $\mathrm{r}(B) = 3$, basta controllare gli orlati di M in B; essi sono: la matrice A, il cui determinante è uguale a zero, e la matrice

$$O = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{Vmatrix} ,$$

per la quale risulta

$$\det O = -4 - 2 - (-2 - 5) = -6 + 7 = 1 \neq 0 ;$$

ne segue che $\mathrm{r}(B) = 3$, dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è impossibile.

3 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 0 \\ x \ - y = 1 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} .$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni lineari nelle due incognite x e y. Le matrici incompleta A e completa B sono:

$$\underbrace{\left\| \underbrace{\begin{matrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}}_{A} \ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \right\|}_{B} .$$

Si nota subito che la matrice A possiede un minore di ordine due:

$$M = \left\| \begin{matrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| ,$$

il cui determinante è diverso da zero:

$$\det M = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2};$$

si ha quindi $\mathrm{r}(A) = 2$. Si ha inoltre, per quanto riguarda la matrice completa, $2 \leq \mathrm{r}(B) \leq 3$ e, per stabilire se è $\mathrm{r}(B) = 2$ oppure $\mathrm{r}(B) = 3$, occorre calcolare il determinante di B. Si trova:

$$\det B = 2 + \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2} + 4) = 0 \ ,$$

pertanto anche $\mathrm{r}(B) = 2$. A questo punto, essendo

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2 = \text{ numero delle incognite } ,$$

possiamo concludere che il sistema è determinato ed è equivalente (dato che il minore M individua le prime due righe) al sistema

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 0 \\ x \ - y = 1 \end{cases} .$$

Risolvendo con la regola di Cramer, abbiamo che l'unica soluzione è la coppia ordinata $(\overline{x}, \overline{y})$, dove

$$\overline{x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{5} \ , \ \overline{y} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5} \ .$$

Riepilogando, il sistema è determinato e la sua unica soluzione è $\left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

4 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - 7z = -4 \end{cases} .$$

Il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite ($m = n = 3$). Consideriamo pertanto il determinante della matrice incompleta

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -7 \end{Vmatrix} .$$

Notiamo subito che in tale matrice si ha $\mathbf{C}_2 = -2\mathbf{C}_1$, dunque $\det A = 0$ e quindi $\mathrm{r}(A) \leq 2$. D'altra parte, la matrice A possiede un minore di ordine due:

$$M = \begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} ,$$

il cui determinante è diverso da zero:

$$\det M = -6 + 2 = -4;$$

si ha pertanto $\mathrm{r}(A) = 2$. Calcoliamo la caratteristica della matrice completa

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -7 & -4 \end{Vmatrix} .$$

Consideriamo, a tale scopo, gli orlati di M in B; essi sono: la matrice A, per la quale è $\det A = 0$, e la matrice

$$O = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \end{Vmatrix} ,$$

per la quale si trova:

$$\det O = 24 + 12 - (8 + 28) = 0 \ ;$$

se ne conclude che anche B ha caratteristica uguale a 2.

Essendo $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$, mentre il numero delle incognite è 3, concludiamo che il sistema è indeterminato ed ha ∞^1 soluzioni. Tenendo presente che il minore M individua nella matrice A le prime due righe e la seconda e la terza colonna, cioè individua le prime due equazioni e le incognite y e z, si ha che le soluzioni si trovano assegnando valori arbitrari all'incognita x e risolvendo in corrispondenza, con la regola di Cramer, il sistema nelle due incognite y e z:

$$\begin{cases} -2y \quad - z = -x \\ \quad 2y + 3z = 2 + x \end{cases} .$$

In questo modo si ottiene:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2+x & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-3x + 2 + x}{-4} = \frac{x-1}{2} \ , \ z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -x \\ 2 & 2+x \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4 - 2x + 2x}{-4} = 1 \ .$$

In conclusione, il sistema è indeterminato e le sue soluzioni sono le infinite (∞^1) terne ordinate

$$\left(x, \frac{x-1}{2}, 1 \right) \ ,$$

ottenute al variare di x in $\mathbb{R}$.

5 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x - y + 2z = \ \ 0 \\ x - y - 3z = \ \ 5 \\ -x + y + \dfrac{1}{2} z = -\dfrac{5}{2} \\ x - y + 9z = -9 \end{cases} .$$

Si tratta di un sistema di 4 equazioni lineari nelle 3 incognite x, y e z, le cui matrici incompleta A e completa B sono:

$$\underbrace{\underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 9 \end{matrix} \right\|}_{A} \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ -\frac{5}{2} \\ -9 \end{matrix} \Bigg\|}_{B} .$$

Osserviamo che nella matrice A è $\mathbf{C}_2 = -\mathbf{C}_1$, per cui tutti i minori di ordine 3 hanno il determinante uguale a zero; d'altra parte c'è un minore di ordine 2,

$$M = \left\| \begin{matrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{matrix} \right\| ,$$

il cui determinante è diverso da zero:

$$\det M = 3 + 2 = 5;$$

si ha pertanto $\mathrm{r}(A) = 2$. Per determinare la caratteristica della matrice B occorre considerare gli orlati di M in B; essi sono: i due orlati di M in A, che, come sappiamo, hanno determinante uguale a zero, e le due matrici

$$O_1 = \left\|\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{matrix}\right\| \;, \; O_2 = \left\|\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 9 & -9 \end{matrix}\right\| \;,$$

per le quali si trova:

$$\det O_1 = -\frac{15}{2} + 10 - \left(5 - \frac{5}{2}\right) = 0 \;,$$

$$\det O_2 = -27 - 10 - (18 - 45) = -10 \neq 0 \;;$$

ne segue che $\mathrm{r}(B) = 3$, pertanto, essendo $\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}(B)$, il sistema è impossibile.

6 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} 4x + y + 2z - 3t = 0 \\ 3x - y \qquad\quad + t = 1 \\ \qquad y - 2z \; - t = -4 \\ 3x \qquad + z \; - t = 0 \end{cases} .$$

Si tratta di un sistema di quattro equazioni lineari nelle quattro incognite x, y, z e t. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

(effettuando le sostituzioni $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$)

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

(sviluppando secondo $\mathbf{C}_2$)

$$= - \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3)}{=} - \begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-7+6) = -2 \;.$$

Poichè $\det A \neq 0$, il sistema è determinato e la sua unica soluzione $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$ si trova mediante la regola di Cramer:

$$\overline{x} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_4)}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

(sviluppando secondo $\mathbf{R}_4$)

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3)}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

(sviluppando secondo $\mathbf{R}_1$)

$$= \frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-2) = 1 \ ;$$

$$\overline{y} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 + 4\mathbf{R}_2)}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 12 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1)}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(-16)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8(-2+3) = 8 \ ;$$

$$\overline{z} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 + 3\mathbf{C}_4)}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[-5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-5(4-1) - (-24+3)\right] = \frac{1}{2}(-15+21) = 3 \ ;$$

$$\overline{t} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 + 4\mathbf{R}_2)}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 12 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$
= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 12 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_3)}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 18 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(6-18) = 6\ .
$$

Riepilogando, il sistema è determinato e la sua unica soluzione è la quaterna ordinata $(1, 8, 3, 6)$.

7 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$
\begin{cases} x + \frac{1}{2}y \qquad - t = 0 \\ x - y + z + 2t = 1 \\ \qquad y - 2z + t = 2 \\ x - \frac{7}{2}y + 4z + 4t = -1 \end{cases} .
$$

Anche questo è un sistema di quattro equazioni lineari nelle quattro incognite x, y, z e t. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta A:

$$
\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 4 & 4 \end{vmatrix} =
$$

(mediante le sostituzioni $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1$)

$$
= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 15 - 4 + 12 - (24 + 5 - 6) = 23 - 23 = 0\ .
$$

Cerchiamo allora la caratteristica di A. Si trova subito un minore di A di ordine due avente determinante non nullo:

$$
M = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| ,
$$

quindi $\mathrm{r}(A) \geq 2$. Per stabilire se è $\mathrm{r}(A) = 2$ oppure $\mathrm{r}(A) = 3$ occorre considerare i minori orlati di M in A e vedere se almeno uno di essi ha determinante diverso da zero. Gli orlati di M sono quattro (vi sono due possibilità di scelta sia per la riga che per la colonna da aggiungere); considerando l'orlato P ottenuto aggiungendo la terza riga e la terza colonna, troviamo

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ ,$$

pertanto $\mathrm{r}(A) = 3$. Passiamo adesso alla matrice completa

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 4 & 4 & -1 \end{Vmatrix} \ ;$$

gli orlati di P in B sono la matrice A, che, come sappiamo, ha determinante uguale a zero, e la matrice

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 4 & -1 \end{Vmatrix} \ ,$$

per la quale si trova:

$$\det Q \overset{(\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 8 & -\frac{7}{2} & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 8 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}[6 + 16 - 8 - (-16 + 2 + 24)] = -\frac{1}{2}[14 - 10] = -2 \neq 0 \ ;$$

si ha pertanto $\mathrm{r}(B) = 4$, dunque il sistema è impossibile.

8 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y \qquad + 2t = 0 \\ \qquad y + 2z - 2t = 1 \\ x + y + 6z - 2t = 3 \\ \qquad y \ \ - z + 3t = 0 \end{cases} .$$

Ci troviamo nuovamente nel caso $m = n = 4$. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta A; otteniamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{(\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - 2\mathbf{R}_1)}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

e, osservando che nell'ultimo determinante si ha $\mathbf{R}_3 = 3\mathbf{R}_2$, concludiamo che $\det A = 0$. Inoltre, poichè il secondo determinante è stato ottenuto dal $\det A$ mediante la sostituzione $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - 2\mathbf{R}_1$, deduciamo che nella matrice A risulta $\mathbf{R}_3 - 2\mathbf{R}_1 = 3\mathbf{R}_2$, cioè $\mathbf{R}_3 = 2\mathbf{R}_1 + 3\mathbf{R}_2$. Passando alla matrice completa

$$B = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{Vmatrix} ,$$

constatiamo subito che la relazione $\mathbf{R}_3 = 2\mathbf{R}_1 + 3\mathbf{R}_2$, che è verificata in A, è vera pure nella matrice B; pertanto le caratteristiche delle matrici A e B sono uguali a quelle delle matrici A' e B' ottenute eliminando la terza riga:

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} \underbrace{\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}}_{A'} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{Vmatrix}}_{B'} .$$

Nella matrice A' si nota subito un minore M di ordine 3 con determinante diverso da zero:

$$M = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \quad ; \quad \det M = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1-2) = -\frac{3}{2} \; ;$$

di conseguenza si ha $\mathrm{r}(A') = \mathrm{r}(B') = 3$ e quindi anche $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 3$. Per il teorema di Rouché-Capelli concludiamo che il sistema è indeterminato ed ha ∞^1 soluzioni, che si trovano (dato che M individua in A le righe $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ e $\mathbf{R}_4$ e le colonne $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}_3$) attribuendo valori arbitrari all'incognita t nel sistema formato dalla prima, seconda e quarta equazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y \qquad = -2t \\ \qquad y + 2z = 1 + 2t \\ \qquad y \; - z = -3t \end{cases}$$

e ricavando i valori delle altre tre incognite con la regola di Cramer. In questo modo si ottiene:

$$x = \frac{1}{\det M} \begin{vmatrix} -2t & -1 & 0 \\ 1+2t & 1 & 2 \\ -3t & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}[2t + 6t - (1 + 2t - 4t)] =$$

$$-\frac{2}{3}[8t - (1 - 2t)] = -\frac{2}{3}(10t - 1) \; ;$$

$$y = -\frac{2}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2t & 0 \\ 0 & 1+2t & 2 \\ 0 & -3t & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1+2t & 2 \\ -3t & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}(-1-2t+6t) = -\frac{1}{3}(4t-1) \ ;$$

$$z = -\frac{2}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -2t \\ 0 & 1 & 1+2t \\ 0 & 1 & -3t \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1+2t \\ 1 & -3t \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}(-3t-1-2t) = \frac{1}{3}(5t+1) \ .$$

In conclusione, il sistema è indeterminato ed ha ∞^1 soluzioni: le infinite quaterne ordinate

$$\left(\frac{2(1-10t)}{3} \ , \ \frac{1-4t}{3} \ , \ \frac{5t+1}{3} \ , \ t\right)$$

che si ottengono al variare di t in $\mathbb{R}$.

9 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x + 2y - z - t = 0 \\ \frac{1}{4}x - y - \frac{1}{2}z + 2t = 1 \\ 2x - 2y - 3z + 7t = 4 \end{cases} .$$

In questo caso è $m = 3$, $n = 4$. Le matrici incompleta A e completa B sono

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 7 \end{Vmatrix}}_{A} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}\Bigg\|}_{B} .$$

La matrice A possiede un minore M di ordine 2 con determinante diverso da zero:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{Vmatrix} \quad ; \quad \det M = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \ ,$$

pertanto $\mathrm{r}(A) \geq 2$. Gli orlati di M in A sono

$$O_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & -3 \end{Vmatrix} \ , \ O_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{Vmatrix}$$

e si ha:

$$\det O_1 = 3 - 2 + \frac{1}{2} - \left[2 - \frac{3}{2} + 1\right] = 0 \ , \ \det O_2 = -7 + 8 + \frac{1}{2} - \left[2 + \frac{7}{2} - 4\right] = 0 \ ,$$

dunque $\mathrm{r}(A) = 2$. Nella matrice B il minore M ha un altro orlato:

$$O_3 = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{matrix} \right\| \ ,$$

ma anche per questo si ha

$$\det O_3 = -4 + 4 - (2 - 2) = 0 \ ,$$

di conseguenza $\mathrm{r}(B) = 2$.

Poichè $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$, mentre il numero delle incognite è 4, il sistema è indeterminato ed ha ∞^2 soluzioni, le quali (tenendo presente che M individua le prime due righe e le prime due colonne) si trovano attribuendo valori arbitrari alle incognite z e t nel sistema formato dalle prime due equazioni:

$$\begin{cases} x + 2y = z + t \\ \frac{1}{4}x \ \ - y = 1 + \frac{1}{2}z - 2t \end{cases}$$

e ricavando i valori delle incognite x e y con la regola di Cramer. Procedendo in questo modo si ottiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z \ \ +t & 2 \\ 1 + \frac{1}{2}z - 2t & -1 \end{vmatrix}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(-z - t - 2 - z + 4t) = \frac{4}{3}z - 2t + \frac{4}{3} \ ;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \ \ +t \\ \frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{2}z - 2t \end{vmatrix}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{2}z - 2t - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}t\right] = -\frac{1}{6}z + \frac{3}{2}t - \frac{2}{3} \ .$$

In conclusione, il sistema è indeterminato e le sue soluzioni sono le ∞^2 quaterne ordinate del tipo

$$\left(\frac{4}{3}z - 2t + \frac{4}{3} \ , \ -\frac{1}{6}z + \frac{3}{2}t - \frac{2}{3} \ , \ z \ , \ t\right) \ ,$$

ottenute al variare di z e t in $\mathbb{R}$.

10 *Risolvere il seguente sistema di equazioni (nelle incognite x, y e z):*

$$\begin{cases} x + \log_2 y + z(z+1) = 0 \\ 3x + \log_2 y^2 + \frac{3}{2}z(z+1) = 0 \\ 2x + \log_2 \frac{1}{y} - \frac{1}{2}z(z+1) = 4 \end{cases} .$$

(9 ottobre 1992)

Il sistema assegnato può essere scritto nel modo seguente:

$$(10.1)\qquad \begin{cases} x & +\log_2 y & +z(z+1) & =0 \\ 3x & +2\log_2 y & +\frac{3}{2}z(z+1) & =0 \\ 2x & -\log_2 y & -\frac{1}{2}z(z+1) & =4 \end{cases} \quad ;$$

ne segue che, considerato il sistema di equazioni lineari

$$(10.2)\qquad \begin{cases} u & +v & +w & =0 \\ 3u & +2v & +\frac{3}{2}w & =0 \\ 2u & -v & -\frac{1}{2}w & =4 \end{cases} \quad ,$$

nelle incognite u, v e w, si ha l'equivalenza:

$$\text{la terna } (x,y,z) \text{ è soluzione del sistema (10.1)} \iff$$
$$\iff \; y>0 \text{ e la terna } (x,\log_2 y, z(z+1)) \text{ è soluzione del sistema (10.2)} \; .$$

Risolviamo pertanto il sistema (10.2). Calcoliamo il determinante della matrice incompleta A; troviamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1+3-3-\left(4-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right) = -1-1=-2 \; ,$$

pertanto il sistema (10.2) è determinato e la sua soluzione $(\overline{u},\overline{v},\overline{w})$ è data da:

$$\overline{u} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 4 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2\left(\frac{3}{2}-2\right) = 1 \; ;$$

$$\overline{v} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)(-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 2\left(\frac{3}{2}-3\right) = -3 \; ;$$

$$\overline{w} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1) = 2 \; .$$

Ritornando al sistema iniziale, poichè

$$\log_2 y = -3 \iff y = 2^{-3} = \frac{1}{8} \; ,$$

$$z(z+1)=2 \iff z^2+z-2=0 \iff z = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \iff$$
$$\iff z=1 \text{ oppure } z=-2 \; ,$$

concludiamo che esso ha due soluzioni:

$$(1, \frac{1}{8}, 1) \ \text{ e } \ (1, \frac{1}{8}, -2) \ .$$

11 *Risolvere il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 3x & +2y & -z & = 0 \\ x & +y & +z & = 3 \end{cases} \quad ;$$

trovarne inoltre, qualora ciò sia possibile, almeno una soluzione (x, y, z) *verificante l'ulteriore condizione* $yz \leq 0$*.*

(9 giugno 1995)

Si ha $m = 2, n = 3$. Si osserva subito che il minore

$$M = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

ha determinante uguale a 1; ne segue che il sistema è indeterminato con ∞^1 soluzioni. Le soluzioni si ottengono attribuendo valori arbitrari all'incognita z, che viene trattata come un termine noto:

$$\begin{cases} 3x & +2y & = z \\ x & +y & = 3 - z \end{cases} \quad ,$$

e ricavando i valori delle incognite x e y con la regola di Cramer:

$$x = \begin{vmatrix} z & 2 \\ 3 - z & 1 \end{vmatrix} = 3z - 6 \quad , \quad y = \begin{vmatrix} 3 & z \\ 1 & 3 - z \end{vmatrix} = 9 - 4z \ .$$

In altre parole, le soluzioni sono le infinite terne ordinate

$$(3z - 6, 9 - 4z, z) \quad , \quad z \in \mathbb{R} \ ;$$

quelle che verificano l'ulteriore condizione $yz \leq 0$ sono quelle per cui è $(9 - 4z)z \leq 0$, cioè quelle che si ottengono facendo variare z in $] - \infty, 0] \cup [\frac{9}{4}, +\infty[$.

12 *Per quali valori del parametro reale* a *il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} ax & +2y & +z & = a^2 - 1 \\ x & +(a+1)y & +z & = 0 \\ 3x & +2y & +(4-a)z & = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni?

(26 febbraio 1993)

Poichè il numero delle incognite è 3, i valori del parametro a per i quali il sistema è indeterminato sono quelli per cui risulta

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) < 3 \ ,$$

dove, come di consueto, si sono denotate con A e B, rispettivamente, la matrice incompleta e quella completa.

La condizione $\mathrm{r}(A) < 3$ equivale a $\det A = 0$. Calcoliamo il $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 3 & 2 & 4-a \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+1)(4-a)+6+2-[3(a+1)+2(4-a)+2a] = a(-a^2+3a+4)+8-[3a+3+8-2a+2a] =$$
$$= -a^3+3a^2+a-3 = -a^2(a-3)+a-3 = (a-3)(1-a^2) \ ;$$

pertanto

$$\mathrm{r}(A) < 3 \iff (a-3)(1-a^2) = 0 \iff a = 3 \text{ oppure } a = \pm 1 \ .$$

Adesso dobbiamo vedere per quali dei valori trovati è soddisfatta anche l'altra condizione $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$. Nel caso $a = \pm 1$ la colonna dei termini noti ha tutti gli elementi nulli, dumque $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$. Invece, se $a = 3$, la matrice incompleta è

$$B = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

e si nota subito un minore di ordine 3 con determinante diverso da zero:

$$M = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \quad , \quad \det M = 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -80 \ ,$$

dunque $\mathrm{r}(B) = 3 \neq \mathrm{r}(A)$.

In conclusione, i valori di a per i quali il sistema ha infinite soluzioni sono: 1 e -1.

13 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} 4x & -y & +2z & = 0 \\ x & -y & +z & = 0 \\ 5x & -2y & +kz & = -3 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

(3 febbraio 1995)

Si tratta di un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite x, y e z. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & k \end{vmatrix} =$$
$$= -4k - 5 - 4 - (-10 - k - 8) = -3k + 9 = 3(3-k) \ ;$$

pertanto

$$\det A = 0 \iff k = 3 \ .$$

Ne segue che per $k \neq 3$ il sistema è determinato ed ha come unica soluzione la terna $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, dove

$$\overline{x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & k \end{vmatrix}}{3(3-k)} = \frac{-3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{3(3-k)} = \frac{1}{k-3} \ ;$$

$$\overline{y} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & k \end{vmatrix}}{3(3-k)} = \frac{3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3(3-k)} = \frac{2}{3-k} \ ;$$

$$\overline{z} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{3(3-k)} = \frac{-3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3(3-k)} = \frac{3}{3-k} \ .$$

Nel caso $k = 3$ la matrice incompleta A e quella completa B sono:

$$\underbrace{\left\| \underbrace{\begin{matrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{matrix} \right\|}_{B} \ .$$

Poichè, come sappiamo, $\det A = 0$ e poichè il minore

$$M = \begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, risulta $\mathrm{r}(A) = 2$. Passando alla matrice B, abbiamo che l'altro orlato di M, oltre A, è

$$O = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$$

ed il suo determinante è

$$\det O = -3 \det M = 9 \neq 0 \ ,$$

pertanto $\mathrm{r}(B) = 3$; ne segue che il sistema è impossibile.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti:

- se $k \neq 3$ il sistema è determinato e la sua unica soluzione è

$$\left(\frac{1}{k-3} \ , \ \frac{2}{3-k} \ , \ \frac{3}{3-k} \right) \quad ;$$

- se $k = 3$ il sistema è impossibile.

14 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x & -y & +2z & = 1 \\ 3x & -3y & +4z & = k-2 \\ 2x & -2y & +3z & = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

(1 dicembre 1994)

Siamo nel caso $m = n = 3$. Si osserva subito che nella matrice incompleta

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{Vmatrix} \ ,$$

la quale non dipende dal parametro k, è $\mathbf{C}_2 = -\mathbf{C}_1$, dunque $\det A = 0$; inoltre, vi è un minore di ordine 2 con determinante diverso da zero:

$$M = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix} \quad , \quad \det M = -4 + 6 = 2 \ ;$$

pertanto $\mathrm{r}(A) = 2 \ \forall k \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la matrice completa B, abbiamo che l'altro minore orlato di M, oltre A, è

$$O = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & k-2 \\ -2 & 3 & 2 \end{Vmatrix} \ ;$$

effettuando la sostituzione $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_1$ otteniamo

$$\det O = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & k-5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(k-5) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 - k \ ;$$

ne segue che

$$\mathrm{r}(B) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 5, \\ 3 & \text{se } k \neq 5. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $k \neq 5$ il sistema è impossibile, mentre nel caso $k = 5$ il sistema è indeterminato con ∞^1 soluzioni; le soluzioni si trovano assegnando valori arbitrari all'incognita x nel sistema formato dalle prime due equazioni:

$$\begin{cases} -y & +2z & = 1 - x \\ -3y & +4z & = 3 - 3x \end{cases}$$

e ricavando i valori di y e z con la regola di Cramer:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3-3x & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4 - 4x - 6 + 6x}{2} = x - 1 \ ,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1-x \\ -3 & 3-3x \end{vmatrix}}{2} = 0 \ .$$

Riepilogando:

- se $k \neq 5$ il sistema è impossibile;
- se $k = 5$ il sistema è indeterminato con ∞^1 soluzioni; le soluzioni sono le terne ordinate $(x, x-1, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

15 *Risolvere il seguente sistema al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x & +ky & +k^2 z & = 0 \\ (4k+1)x & -y & -(8k^2-1)z & = 1 \\ x & +y & +z & = 0 \end{cases} \quad .$$

(28 febbraio 1992)

Si tratta di un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite x, y e z.
Calcoliamo il determinante della matrice incompleta A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 4k+1 & -1 & -(8k^2-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - k(8k^2-1) + k^2(4k+1) - [-k^2 + k(4k+1) - (8k^2-1)] =$$
$$= -1 + k^2 + (-k+1)(8k^2-1) + (k^2-k)(4k+1) =$$
$$= (k-1)(k+1) - (k-1)(8k^2-1) + k(k-1)(4k+1) =$$
$$= (k-1)[k+1-8k^2+1+4k^2+k] = (k-1)[-4k^2+2k+2] = -2(k-1)(2k^2-k-1) \ ;$$

troviamo i valori di k per i quali il $\det A$ si annulla; si ha:

$$\det A = 0 \iff (k-1)(2k^2 - k - 1) = 0 \iff$$

$$\iff k = 1 \ \text{ oppure } \ k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \iff k = 1 \ \text{ oppure } \ k = -\frac{1}{2} \ ;$$

da ciò segue pure che il $\det A$ può essere fattorizzato nel seguente modo:

$$\det A = -2(k-1)2(k-1)(k+\frac{1}{2}) = -4(k-1)^2(k+\frac{1}{2}) \ .$$

Per quanto sopra trovato abbiamo che se $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}\}$ il sistema è determinato e la sua unica soluzione $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ - che si trova con la regola di Cramer - è data da:

$$\overline{x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & k^2 \\ 1 & -1 & -(8k^2-1) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} = \frac{-\begin{vmatrix} k & k^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{k^2 - k}{-4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} = \frac{-k}{4(k-1)(k+\frac{1}{2})} \ ;$$

$$\overline{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 4k+1 & 1 & -(8k^2-1) \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{k^2 - 1}{4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} = \frac{k+1}{4(k-1)(k+\frac{1}{2})} \ ;$$

$$\overline{z} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 4k+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{1-k}{4(k-1)^2(k+\frac{1}{2})} = \frac{-1}{4(k-1)(k+\frac{1}{2})} \ .$$

Studiamo adesso il caso $k = 1$. Osservando che risulta (sia in A che in B) $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1$ e che vi è un minore M di A con determinante diverso da zero:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{Vmatrix} \ , \ \det M = -6 \ ,$$

otteniamo che $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$. Di conseguenza il sistema è indeterminato ed ha ∞^1 soluzioni, che si ottengono attribuendo valori arbitrari all'incognita z nel sistema formato dalle prime due equazioni

$$\begin{cases} x & +y & = -z \\ 5x & -y & = 1+7z \end{cases} ,$$

e risolvendo quest'ultimo rispetto alle incognite x e y con la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 1+7z & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{z-1-7z}{-6} = \frac{6z+1}{6} ;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 5 & 1+7z \end{vmatrix}}{-6} = \frac{1+7z+5z}{-6} = -\frac{12z+1}{6} .$$

Consideriamo, infine , il caso $k = -\frac{1}{2}$. Le matrici A e B sono:

$$\underbrace{\left\| \underbrace{\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \right\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{B} \Bigg\| .$$

Poichè, come sappiamo, $\det A = 0$ e poichè il minore

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, risulta $\mathrm{r}(A) = 2$. Passando alla matrice B, abbiamo che l'altro orlato di M, oltre A, è

$$O = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

ed il suo determinante è

$$\det O = -\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0 ,$$

pertanto $\mathrm{r}(B) = 3$; ne segue che il sistema è impossibile.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}\}$ il sistema è determinato e la sua unica soluzione è

$$\left(\frac{-k}{4(k-1)(k+\frac{1}{2})} , \frac{k+1}{4(k-1)(k+\frac{1}{2})} , \frac{-1}{4(k-1)(k+\frac{1}{2})} \right) ;$$

- se $k = 1$ il sistema è indeterminato ed ha ∞^1 soluzioni:

$$\left(\frac{6z+1}{6} , \frac{-12z+1}{6} , z \right) , \quad z \in \mathbb{R} ;$$

- se $k = -\frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.