Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato il 12 giugno 2000

1 Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x^2} \geq 9\sqrt{3} \\ \log_2(13-2x) > 3 \\ \dfrac{2x-9}{x^4+1} < 0 \end{cases} \quad .$$

2 Scrivere le equazioni delle circonferenze che passano per il punto $A = (-2, 2)$ e sono tangenti alle rette di equazioni $y - x = 0$ e $y + x = 0$.

3 Sia f la funzione reale definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 2 & \text{se } x \in \left]-\infty, 0\right] \\ 2^{-x^2+2x+1} & \text{se } x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases} \quad .$$

Dire quali sono i punti di estremo relativo per f, precisando se tali punti sono anche di estremo assoluto. Giustificare le risposte date.

4 Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - 2y + z = k - 1 \\ y + 3z = 0 \\ 2x - 5y - kz = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

5 Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 + |4 - x^2|}} \, dx \quad .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato il 12 luglio 2000

1 Trovare il dominio della funzione reale di variabile reale

$$\sqrt{\frac{2x+3}{7-x^2}} + \log_5\left(4^x - \frac{1}{8\sqrt{2}}\right) \quad .$$

2 Scrivere le equazioni delle circonferenze che passano per il punto $A = (1, \sqrt{3})$ e sono tangenti alle rette di equazioni $y = 0$ e $y - \sqrt{3}x = 0$.

3 Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione reale di variabile reale definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(4-5x) & \text{se} \quad x \in \left]-\frac{12}{5}, 0\right[\\ \\ x^3 - 5x + 3 & \text{se} \quad x \in \ [0,1] \end{cases} \quad ,$$

precisando se l'estremo inferiore è minimo e l'estremo superiore è massimo.

4 Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - 2y + z = k - 1 \\ 2x - 5y - k^2 z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

5 Sia f la funzione reale di variabile reale definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{se } x \in \left]-\infty, 0\right] \\ x\sqrt{1+3x^2} & \text{se } x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases} \quad .$$

Verificare che la funzione f è continua.
Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \quad .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato l'11 settembre 2000

1 Trovare il dominio della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log_5 \left(x - \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} \right) .$$

2 Scrivere l'equazione della circonferenza Γ di centro $C = (1, -2)$ tangente alla retta t di equazione $y = x - 4$.
Trovare le ascisse dei due punti di Γ nei quali la retta tangente è parallela alla retta s di equazione $y = 2\sqrt{2}x$.

3 Studiare la funzione $f :]-\infty, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10x}{1-x} & \text{se } x \in]-\infty, 0] \\ 5\cos x - 2 & \text{se } x \in]0, 2\pi] \end{cases}$$

e disegnarne il grafico.
[In particolare si richiede di studiare la continuità, la monotonia e la convessità della funzione f nonché l'esistenza di asintoti per il grafico di f .]

4 Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - 2y + z = k \\ y + 3z = 0 \\ x - 3y - 2z = k \\ 2x - 5y - kz = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

5 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1 + \log x}{x(\log^2 x - 3\log x + 2)}\, dx \qquad .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato il 4 ottobre 2000

1 Trovare il dominio della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log_7 \left(x + 2 - \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right) \quad .$$

2 Scrivere l'equazione della circonferenza Γ di centro $C = (0, 2)$ che stacca sulla retta r di equazione $2x + y + 1 = 0$ un segmento di lunghezza $\frac{8}{\sqrt{5}}$.
Trovare i due punti di Γ nei quali la retta tangente è parallela a r .

3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{se } x \in \,]-\infty, 0] \\ 2^{x - x^2} & \text{se } x \in \,]0, +\infty[\end{cases} \quad .$$

La funzione f è continua? È derivabile?
Vi sono punti di estremo relativo per la funzione f ? E di estremo assoluto?
Giustificare le risposte date.

4 Stabilire, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, se il seguente sistema di equazioni lineari è determinato, indeterminato o impossibile:

$$\begin{cases} (2k - k^2)x - 2y + z = 1 \\ x + (k-3)y + kz = 2 - k \\ kx - 2y + z = k^2 \end{cases} \quad .$$

Risolvere quindi il sistema nei casi $k = 1$ e $k = 2$.

5 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \left(\mathrm{e}^{3x} + \frac{5}{x^2 + x - 6} \right) \, dx \quad .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato il 15 dicembre 2000

1 Trovare il dominio della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^2-4}{3x^2+4}} + \log_5\left(x - \sqrt{4-3x}\right) \quad .$$

2 Provare che l'equazione $3(x^2+y^2-10x)-40y+175=0$ rappresenta una circonferenza Γ mostrando che essa è equivalente ad un'equazione del tipo $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ con $r>0$.
Verificare che il punto $A=(3,4)$ appartiene a Γ.
Scrivere l'equazione della circonferenza tangente esternamente a Γ nel punto A e avente raggio 5.

3 Sia $f:\ [-3,3] \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 \dfrac{16+5x}{1-x} & \text{se } x \in \ [-3,0] \\ (x-2)^2 & \text{se } x \in \ ]0,3] \end{cases} \quad .$$

Provare che la funzione f è continua.
Trovare il massimo ed il minimo assoluto di f.

4 Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - 2y + z = k-1 \\ x - 3z = 0 \\ x - y - k^2 z = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

5 Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^\pi \left(x + \frac{2}{3+\cos 2x}\right) \operatorname{sen} 2x \, dx \quad .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato il 15 dicembre 2000

B

1 Trovare il dominio della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log_2\left(x - \sqrt{5-4x}\right) + \sqrt{\frac{5x^2+4}{5x^2-4}}\ .$$

2 Provare che l'equazione $9(x^2+y^2-8y)-48x+195=0$ rappresenta una circonferenza Γ mostrando che essa è equivalente ad un'equazione del tipo $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ con $r>0$.
Verificare che il punto $A=(2,3)$ appartiene a Γ.
Scrivere l'equazione della circonferenza tangente esternamente a Γ nel punto A e avente raggio $\sqrt{13}$.

3 Sia $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{64+5x}{1-x}} & \text{se } x \in\ [-3,0[\\ (2-x)^3 & \text{se } x \in\ [0,3] \end{cases}\ .$$

Provare che la funzione f è continua.
Trovare il massimo ed il minimo assoluto di f.

4 Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2z = k-1 \\ x - y + k^2 z = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

5 Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \left(x + \frac{2}{\sqrt{3+\operatorname{sen} 2x}}\right)\cos 2x\ dx\ .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato l'1 febbraio 2001

1 Disegnare in uno stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni 2^x e 3^x.
Disegnare il grafico della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \max\{2^x, 3^x\} \quad ,$$

evidenziandone gli eventuali punti angolosi.
Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} f(x) \leq 5 \\ f(x) > \dfrac{1}{5} \end{cases} \quad .$$

2 In un piano cartesiano sono assegnati i punti $A = (-1, 2)$, $P = (2 - t, 2t)$ $(t \in \mathbb{R})$ e Q, simmetrico di P rispetto all'origine.
Verificare che, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$, i vettori $P - A$ e $Q - A$ non sono paralleli.
Trovare i valori di t per i quali il triangolo APQ è:
a) isoscele rispetto alla base PQ;
b) rettangolo in A.

3 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$\frac{|2^x - 1| - 2}{2^x + 3}$$

nell'intervallo $[-1, 2]$.

4 Risolvere i seguenti due sistemi di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - ky = 3k + 2 \\ 3x - y = k \end{cases} \quad , \qquad (2) \quad \begin{cases} 2x - y + kz = 0 \\ 2x - y = 1 \\ 4x - 2y + kz = 1 \end{cases} \quad .$$

5 a) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2^x - x\sqrt{1 + 3x^2}\right) \quad .$$

b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \left(2^x - x\sqrt{1 + 3x^2}\right) \, dx \quad .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato il 20 febbraio 2001

1 Disegnare in uno stesso piano cartesiano i grafici delle funzioni 2^x e 5^x.
Disegnare il grafico della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \min\{2^x, 5^x\} \quad ,$$

evidenziandone gli eventuali punti angolosi.
Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} f(x) \leq \sqrt[5]{4} \\ f(x) > \dfrac{1}{5\sqrt{5}} \end{cases} \quad .$$

2 In un piano cartesiano sono assegnati i punti $A = (-1, 1)$, $P = (t, 1-t)$ $(t \in \mathbb{R})$ e Q, simmetrico di P rispetto all'origine.
Verificare che, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$, i vettori $P - A$ e $Q - A$ non sono paralleli.
Trovare i valori di t per i quali il triangolo APQ è:
a) isoscele rispetto alla base PQ;
b) rettangolo in A.

3 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$\frac{4 - \log_2 x}{|\log_2 x| + 3}$$

nell'intervallo $[\frac{1}{8}, 16]$.

4 Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = k \\ y + 2z = -k \\ x - k^2 z = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

5 Trovare il dominio della funzione reale di variabile reale

$$g(x) = \frac{2^{\sqrt{3x+1}}}{\sqrt{3x+1}} \quad .$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) \quad .$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 g(x)\, dx \quad .$$

Corso di laurea in **Scienze Biologiche**
Compito di **Istituzioni di Matematiche**
assegnato il 5 aprile 2001

1 Disegnare il grafico della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{se } x\in\,]-\infty,1] \\ \log_{\frac{1}{3}} x & \text{se } x\in\,]1,+\infty[\end{cases} \qquad .$$

Dire se f è iniettiva oppure no. Giustificare la risposta.
Risolvere il sistema di disequazioni $-3\le f(x)<\frac{1}{5}$.

2 In un piano cartesiano sono assegnati i punti $A=(0,1)$ e $P=(t,t+2)$ ($t\in\mathbb{R}$).
Trovare le coordinate del punto Q, simmetrico di P rispetto alla retta di equazione $x-y=0$.
Trovare i valori di t per i quali i punti A, P e Q sono allineati.
Trovare i valori di t per i quali i punti A, P e Q sono i vertici di un triangolo rettangolo di ipotenusa PQ.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x)=\frac{2^x}{|2^x-1|}$$

e disegnarne il grafico. [In particolare si richiede di: a) calcolare la derivata prima e studiare la monotonia di f; b) calcolare la derivata seconda e studiare la convessità di f; c) trovare gli eventuali asintoti per il grafico di f].

4 Stabilire, al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$, se il seguente sistema di equazioni lineari è determinato, indeterminato o impossibile:

$$\begin{cases} x-y+kz=1 \\ (2-k)x-2y=0 \\ 5x+(k-5)y+kz=0 \end{cases} \qquad .$$

Risolvere quindi il sistema nel caso $k=1$.

5 Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi}\left[x+\frac{2}{(3+\cos 2x)^2}\right]\operatorname{sen} 2x\; dx \qquad .$$