Corso di studio in Matematica (quadriennale)
Programma di **Istituzioni di Analisi superiore**
Anno accademico **2002-2003**
(Prof. Alfonso Villani)

0. Richiami di Topologia. Spazi topologici. Funzioni continue. Spazi metrizzabili. Confronto tra topologie. Spazi di Hausdorff. Separabilità. Primo e secondo assioma di numerabilità. Compattezza. Connessione.

1. L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$. Ordinamento e aritmetica di $\overline{\mathbb{R}}$. Convergenza – nel senso dell'ordinamento – di successioni e serie in $\overline{\mathbb{R}}$. La topologia di $\overline{\mathbb{R}}$. *Equivalenza tra convergenza nel senso dell'ordinamento e convergenza nel senso della topologia. Compattezza di $\overline{\mathbb{R}}$.

Capitolo 1: nn. 1.1 e 1.2 (Teorema 1.2.1*).

2. La misura secondo Peano-Jordan. Plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. *Proprietà della famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. *La misura elementare dei plurintervalli. *Proprietà della misura elementare. Insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Proprietà della famiglia degli insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Proprietà della famiglia degli insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan e della misura secondo Peano-Jordan.

Capitolo 2: nn. 2.1 (Proposizione 2.1.3*, Teorema 2.1.1*; omettere l'Appendice al n. 2.1), 2.2 (Teorema 2.2.1*; omettere l'Appendice al n. 2.2), 2.3 e 2.4.

3. Successioni di insiemi. Successioni di insiemi: massimo e minimo limite, successioni convergenti, successioni monotone. Distanza di due insiemi di uno spazio metrico. Insiemi con distanza nulla. Continuità della funzione distanza da un insieme fissato. Successioni di insiemi di uno spazio topologico invadenti il prorio limite. Ogni aperto di $\mathbb{R}^h$ è invaso da una successione di plurintervalli.

Capitolo 3: nn. 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

4. La misura di Lebesgue. La misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti limitati di $\mathbb{R}^h$. La misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi limitati di $\mathbb{R}^h$. Insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia degli insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia $\mathcal{L}_h$ degli insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue e della misura di Lebesgue m_h. Confronto tra la teoria della misura secondo Lebesgue e quella secondo Peano-Jordan. Caratterizzazione della misurabilità secondo Peano-Jordan di un insieme mediante la misurabilità della sua frontiera.

Capitolo 4: nn. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5.

5. La teoria astratta della misura. σ-algebre, algebre, anelli. Generatori di una σ-algebra. Traccia di una σ-algebra. Sistemi di Dynkin e loro generatori. Contenuti (cioè: funzioni di insieme finitamente additive) e premisure. Condizioni necessarie e sufficienti affinchè un contenuto sia una premisura. Misure. Misure esterne. Teorema di Charathéodory sulle misure esterne. Prolungamento di premisure. Teorema di coincidenza di due misure. Contenuti σ-finiti. Unicità del prolungamento di una premisura σ-finita.

Capitolo 5: nn. 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.

6. Boreliani di uno spazio topologico. Boreliani di uno spazio topologico. Boreliani di uno sottospazio. Generatori della σ-algebra $\mathcal{B}_h$ dei boreliani di $\mathbb{R}^h$. $\mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{L}_h$. Boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$.

Capitolo 6: nn. 6.1, 6.2 e 6.3.

7. Funzioni di distribuzione e misure di Borel. Funzioni di distribuzione e misure di Borel su $\mathbb{R}$. Esistenza ed unicità della misura μ_F su $\mathcal{B}_1$ associata ad un'arbitraria funzioni di distribuzione F. Studio dell'applicazione $F \to \mu_F$. Il caso delle funzioni di distribuzione continue. *Funzioni di distribuzione e misure di Borel su $\mathbb{R}^h$. Unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{B}_h$.

Capitolo 7: nn. 7.1 e 7.2* (omettere l'appendice al paragrafo).

8. Completamento di uno spazio di misura. Spazi misurabili. Spazi di misura. Spazi di misura completi. Completamento di uno spazio di misura. $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$ è il completamento di $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$. Unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{L}_h$. Unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{L}_h$. La definizione "assiomatica" della misura di Lebesgue.

Capitolo 8: nn. 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4.

9. Funzioni misurabili. Funzioni misurabili. Condizione necessaria e sufficiente di misurabilità. Misurabilità delle funzioni composte. Immagine di una misura mediante una funzione misurabile. Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Capitolo 9: nn. 9.1, 9.2 e 9.3 (omettere l'Esempio 9.3.1 la Proposizione 9.3.1 ed il Corollario 9.3.1).

10. Insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Ogni insieme $E \in \mathcal{L}_h$ di misura positiva contiene un insieme non misurabile secondo Lebesgue (esempio di Vitali). La misura identicamente nulla è l'unica misura su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)$ invariante per traslazioni e finita sugli insiemi limitati. L'insieme di Cantor. La funzione singolare di Lebesgue. Esistenza di insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani.

Capitolo 10: nn. 10.1, 10.2 e 10.3.

11. Misure con segno. Misure con segno e loro prime proprietà. Variazioni superiore, inferiore e totale di una misure con segno. Il teorema della partizione di Hahn. Il teorema di decomposizione di Jordan. Misure mutuamente singolari. Ulteriori proprietà delle misure con segno.

Capitolo 11: nn. 11.1, 11.2 e 11.3.

12. Funzioni numeriche misurabili. Funzioni numeriche misurabili. Funzioni reali misurabili. Indicatore di un insieme. Criteri di misurabilità delle funzioni numeriche. Operazioni con le funzioni numeriche misurabili.

Capitolo 12: nn. 12.1, 12.2 e 12.3.

13. Integrazione in uno spazio di misura. Funzioni elementari. L'integrale delle funzioni elementari. Approssimazione delle funzioni numeriche misurabili e a valori non negativi mediante funzioni elementari. L'integrale delle delle funzioni misurabili e non negative. Proprietà dell'integrale. Il teorema di Beppo Levi. Proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura. Misure su $\mathcal{P}(M)$ (M insieme numerabile). Funzioni μ-quasi-integrabili e loro integrale. Funzioni μ-integrabili. Condizioni di μ-integrabilità. Proprietà dell'integrale. Esempi di integrazione. Proprietà verificate quasi -ovunque. L'integrale delle funzioni definite quasi -ovunque. L'integrale esteso ad un sottoinsieme di Ω. Misure con segno munite di densità rispetto ad una misura μ. Proprietà di $f\mu$. L'integrale di Lebesgue.

Capitolo 13: nn. 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 13.5 (Teorema 13.5.3*), 13.6, 13.7, 13.8, 13.9, 13.10 e 13.11.

14. Confronto tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue. Funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Funzioni generalmente continue in un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Funzioni continue in un intervallo chiuso e non limitato di $\mathbb{R}$. Funzioni di più variabili.

Capitolo 14: nn. 14.1 e 14.2.

15. Gli spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$. Funzioni numeriche μ-integrabili con l'esponente p. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Spazi semimetrici. Spazio metrico associato ad uno spazio semimetrico. Lo spazio semimetrico $\mathcal{L}^p(\mu)$, $0 < p < +\infty$.

Capitolo 15: nn. 15.1, 15.2 (Proposizione 15.2.1*), 15.3 e 15.4.

16. Vari modi di convergenza delle successioni di funzioni reali misurabili. Il lemma di Fatou ed alcune sue conseguenze. Convergenza quasi-ovunque, convergenza in media e passaggio al limite sotto il segno di integrale. Il teorema della convergenza dominata. Completezza degli spazi L^p. Relazioni tra convergenza in media e convergenza quasi-ovunque. La convergenza in media al variare dell'esponente di integrabilità. La convergenza quasi-uniforme. Condizione caratteristica per la convergenza quasi-uniforme. Il teorema di Severini-Egorov. La convergenza in misura. Il criterio di Weyl-Riesz per la convergenza in misura. Riepilogo delle relazioni che intercedono fra i vari tipi di convergenza.

Capitolo 16: nn. 16.1 (omettere l'appendice al paragrafo), 16.2, 16.3, 16.4, 16.5, 16.6, 16.7, 16.8 e 16.9.

17. Misure con densità. Integrazione rispetto ad una misura con densità. Misure con segno assolutamente continue rispetto ad una misura μ. *Il teorema di Radon-Nykodym.

*Unicità della densità. Assoluta continuità secondo Vitali e secondo Caccioppoli. Confronto fra i vari tipi di assoluta continuità.

Capitolo 17: nn. 17.1, 17.2, 17.3, 17.4 (omettere i Lemmi 17.4.1 e 17.4.2; Teorema 17.4.1*), 17.5 (Teorema 17.5.1*) e 17.6.

18. Caratterizzazione della convergenza in media: il teorema di Vitali. Equi-assoluta continuità secondo Vitali e secondo Caccioppoli. Il Teorema di Vitali; varianti e conseguenze. Caratterizzazione della convergenza in media mediante la convergenza delle norme.

Capitolo 18: nn. 18.1, 18.2 (omettere l'appendice al paragrafo 18.2.2) e 18.3.

19. Inclusioni tra spazi L^p. Applicazioni lineari e continue tra spazi normati. Continuità dell'immersione di uno spazio $\mathcal{L}^p(\mu)$ in un altro. Condizione caratteristica per la validità dell'inclusione $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\mu)$.

Capitolo 19: nn. 19.1, 19.2 e 19.3.

Testo di riferimento:

A. Villani, *Appunti del corso di Istituzioni di Analisi superiore* (dispense).

(Le dimostrazioni relative agli argomenti contrassegnati con * possono essere omesse.)

Capitolo 1.
n. 1.2: Teorema 1.2.1*.

Capitolo 2.
n. 2.1: Proposizione 2.1.3*, Teorema 2.1.1*; omettere l'appendice al paragrafo.
n. 2.2: Teorema 2.2.1*; omettere l'appendice al paragrafo.

Capitolo 3.

Capitolo 4.

Capitolo 5.

Capitolo 6.

Capitolo 7.
n. 7.2: omettere l'appendice al paragrafo.

Capitolo 8.

Capitolo 9.
n. 9.3: omettere l'Esempio 9.3.1, la Proposizione 9.3.1 e il Corollario 9.3.1.
n. 9.4: omettere l'intero paragrafo.

Capitolo 10.

Capitolo 11.

Capitolo 12.

Capitolo 13.
n. 13.5: Teorema 13.5.3*.

Capitolo 14.

Capitolo 15.
n. 15.2: Proposizione 15.2.1*.

Capitolo 16.
n. 16.1: omettere l'appendice al paragrafo.

Capitolo 17.
n. 17.4: omettere i Lemmi 17.4.1 e 17.4.2; Teorema 17.4.1*.
n. 17.5: Teorema 17.5.1*.

Capitolo 18.
n. 18.2: omettere l'appendice al paragrafo 18.2.2.

Capitolo 19.