

Alfonso Villani

Appunti
del corso di
Istituzioni di Analisi Superiore

Università degli Studi di Catania
Dipartimento di Matematica e Informatica

Prefazione

Ho scritto gli appunti del corso di Istituzioni di Analisi superiore, da me svolto negli anni accademici 2002-03 e 2003-04, perché animato dalla buona intenzione di fornire agli studenti un utile supporto didattico. Non so se vi sono riuscito. Sono invece consapevole del fatto che il desiderio di chiarire un concetto, l'intendimento di rendere meno ostica una dimostrazione, ed anche la volontà di fare apprezzare appieno la bellezza – secondo me – di alcune delle questioni studiate, possono avermi avermi condotto, talora, ad eccedere nelle spiegazioni; ciò, di norma, non è una buona cosa e sicuramente produce l'effetto di annoiare qualche lettore, al quale, sin d'ora, chiedo scusa per questo.

Ho approfittato inoltre della redazione delle dispense – ma questo è veramente uno scopo molto secondario – per dare forma compiuta alla mia elaborazione personale di alcuni capitoli, altrimenti destinata a rimanere nascosta tra le mie carte sotto la veste di schema molto, molto sintetico; con il concreto rischio che tra alcuni anni neanche io sarei riuscito ad interpretare e sviluppare quello schema secondo l'intendimento originario.

Sarò sinceramente grato a tutti coloro che mi segnaleranno gli inevitabili errori o mi daranno suggerimenti per migliorare il testo.

Ringrazio inoltre tutti gli studenti che vorranno ripagarmi del mio lavoro dimostrando interesse per la materia e conseguendo un buon profitto.

Ringrazio, infine, mia moglie per l'affetto che sempre mi porta e le chiedo scusa per il tempo che, durante la scrittura di questi appunti, è stato sottratto a lei ed alla famiglia.

Indice

Capitolo 1 – *L'insieme \mathbb{R}*

- 1.1 – Ordinamento, aritmetica e convergenza di successioni e serie in $\overline{\mathbb{R}}$... pag. 1
- 1.2 – La topologia di $\overline{\mathbb{R}}$ pag. 5

Capitolo 2 – *La misura secondo Peano-Jordan*

- 2.1 – Plurintervalli di \mathbb{R}^h pag. 1
- Appendice al n. 2.1 pag. 5
- 2.2 – La misura elementare dei plurintervalli pag. 11
- Appendice al n. 2.2 pag. 16
- 2.3 – La misura secondo Peano-Jordan degli insiemi limitati pag. 19
- 2.4 – La misura secondo Peano-Jordan in generale pag. 26

Capitolo 3 – *Successioni di insiemi*

- 3.1 – Minimo e massimo limite di una successione di insiemi pag. 1
- 3.2 – Successioni di insiemi invadenti il proprio limite pag. 7
- 3.3 – Distanza di due insiemi in uno spazio metrico pag. 8
- 3.4 – Ogni aperto di \mathbb{R}^h è invaso da una successione di plurintervalli pag. 11

Capitolo 4 – *La misura di Lebesgue*

- 4.1 – La misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti e limitati pag. 2
- 4.2 – La misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi e limitati pag. 7
- 4.3 – La misura secondo Lebesgue degli insiemi limitati pag. 12
- 4.4 – La misurabilità e la misura secondo Lebesgue in generale pag. 20
- 4.5 – Caratterizzazione della misurabilità secondo Peano-Jordan pag. 24

Capitolo 5 – *La teoria astratta della misura*

- 5.1 – σ -algebre pag. 1
 - 5.1.1 – σ -algebre e loro proprietà pag. 1
 - 5.1.2 – Generatori di una σ -algebra pag. 4
 - 5.1.3 – Anelli, algebre pag. 6
- 5.2 – Sistemi di Dynkin pag. 7
- 5.3 – Contenuti e premisure pag. 11
 - 5.3.1 – Definizioni ed esempi pag. 11
 - 5.3.2 – Proprietà dei contenuti e delle premisure pag. 15
 - 5.3.3 – Condizioni affinché un contenuto sia una premisura pag. 18
 - 5.3.4 – Misure pag. 23
- 5.4 – Misure esterne pag. 24
 - 5.4.1 – Misure esterne. Il teorema di Carathéodory pag. 24

5.4.2 – Prolungamento di premisure	pag. 27
5.4.3 – Un teorema di coincidenza di misure	pag. 30
5.4.4 – Premisure σ -finite. Unicit� della misura prolungamento	pag. 32

Capitolo 6 – *Boreliani di uno spazio topologico*

6.1 – La σ -algebra degli insiemi di Borel di uno spazio topologico	pag. 1
6.2 – Boreliani di \mathbb{R}^h	pag. 2
6.3 – Boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$	pag. 3

Capitolo 7 – *Funzioni di distribuzione e misure di Borel*

7.1 – Funzioni di distribuzione e misure di Borel su \mathbb{R}	pag. 1
Appendice al n. 7.1	pag. 11
7.2 – Funzioni di distribuzione e misure di Borel su \mathbb{R}^h	pag. 15
Appendice al n. 7.2	pag. 25

Capitolo 8 – *Completamento di uno spazio di misura*

8.1 – Spazi di misura. Spazi di misura completi	pag. 1
8.2 – Completamento di uno spazio di misura	pag. 2
8.3 – $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$ � il completamento di $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$	pag. 5
8.4 – La definizione assiomatica della misura di Lebesgue	pag. 8

Capitolo 9 – *Funzioni misurabili*

9.1 – Funzioni misurabili	pag. 1
9.2 – Misura immagine	pag. 5
9.3 – Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue	pag. 6
9.4 – σ -algebra generata da una famiglia di funzioni	pag. 9

Capitolo 10 – *Insiemi non misurabili secondo Lebesgue*

10.1 – Esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue	pag. 1
10.2 – L'insieme di Cantor	pag. 5
10.3 – Confronto tra le σ -algre \mathcal{B}_h e \mathcal{L}_h	pag. 13

Capitolo 11 – *Misure con segno*

11.1 – Misure con segno	pag. 1
11.2 – Variazioni di una misura con segno	pag. 3
11.3 – Il teorema della partizione di Hahn e le sue conseguenze	pag. 7

Capitolo 12 – *Funzioni numeriche misurabili*

12.1 – Funzioni numeriche misurabili	pag. 1
12.2 – Criteri di misurabilit� delle funzioni numeriche	pag. 2
12.3 – Operazioni con le funzioni numeriche misurabili	pag. 5

Capitolo 13 – *Integrazione in uno spazio di misura*

13.1 – Funzioni elementari in uno spazio misurabile	pag. 1
13.2 – L'integrale delle funzioni elementari	pag. 6
13.3 – L'integrale delle funzioni misurabili e non negative	pag. 9
13.4 – Alcuni esempi	pag. 15
13.5 – La proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura	pag. 18
Appendice al n. 13.5	pag. 24
13.6 – Misure sulla σ -algebra di tutti i sottoinsiemi di un insieme numerabile	pag. 28
13.7 – Funzioni numeriche μ -quasi-integrabili e loro integrale	pag. 31
13.8 – Proprietà verificate quasi-ovunque	pag. 42
13.9 – L'integrale delle funzioni definite quasi-ovunque	pag. 45
13.10 – L'integrale esteso ad un sottoinsieme di Ω	pag. 47
13.11 – L'integrale di Lebesgue	pag. 59

Capitolo 14 – *Confronto tra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann*

14.1 – Funzioni di una variabile	pag. 2
14.1.1 – Funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato	pag. 2
14.1.2 – Funzioni generalmente continue in un intervallo chiuso e limitato	pag. 4
14.1.3 – Funzioni continue in un intervallo chiuso non limitato	pag. 10
14.2 – Funzioni di più variabili	pag. 14
14.2.1 – Funzioni continue in un dominio limitato e misurabile secondo Peano-Jordan	pag. 14
14.2.2 – Funzioni generalmente continue in un dominio limitato e misurabile secondo Peano-Jordan	pag. 16
14.2.3 – Funzioni continue in un dominio non limitato, misurabile secondo Peano-Jordan	pag. 19
14.3 – Alcuni esempi	pag. 20

Capitolo 15 – *Gli spazi L^p*

15.1 – Funzioni di classe L^p	pag. 1
15.2 – Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski	pag. 7
15.3 – Spazi simmetrici	pag. 16
15.4 – Lo spazio simmetrico $\mathcal{L}^p(\mu)$	pag. 18

Capitolo 16 – *Vari modi di convergenza delle successioni di funzioni reali misurabili*

16.1 – Il lemma di Fatou ed alcune sue conseguenze	pag. 2
Appendice al n. 16.1	pag. 10
16.2 – Convergenza quasi-ovunque, convergenza in media e passaggio al limite sotto il segno di integrale	pag. 15
16.3 – Il teorema della convergenza dominata	pag. 21

16.4 – Completezza degli spazi L^p	pag. 26
16.5 – Relazioni tra convergenza in media e convergenza quasi-ovunque ...	pag. 29
16.6 – La convergenza in media al variare dell'esponente di integrabilità ..	pag. 33
16.7 – Convergenza quasi-uniforme	pag. 36
16.8 – Convergenza in misura	pag. 44
16.9 – Riepilogo delle relazioni esistenti tra i vari modi di convergenza	pag. 52

Capitolo 17 – *Il teorema di Radon-Nikodym*

17.1 – Integrazione rispetto ad una misura con densità	pag. 1
17.2 – Unicità della densità (1)	pag. 3
17.3 – Assoluta continuità	pag. 5
17.4 – Il teorema di Radon-Nikodym	pag. 7
17.5 – Unicità della densità (2)	pag. 15
17.6 – Assoluta continuità secondo Vitali e secondo Caccioppoli	pag. 17

Capitolo 18 – *Caratterizzazione della convergenza in media: il teorema di Vitali*

18.1 – Equi-assoluta continuità	pag. 2
18.2 – Il teorema di Vitali. Varianti e conseguenze	pag. 7
18.2.1 – Il teorema di Vitali	pag. 7
18.2.2 – Caratterizzazione della convergenza in media verso una data funzione limite	pag. 14
Appendice al n. 18.2.2	pag. 15
18.2.3 – Caratterizzazione della convergenza in media per le successio- ni convergenti quasi-ovunque	pag. 17
18.3 – Caratterizzazione della convergenza in media mediante la conver- genza delle norme	pag. 20

Capitolo 19 – *Inclusioni tra spazi L^p*

19.1 – Applicazioni lineari e continue tra spazi normati	pag. 2
19.2 – Continuità dell'immersione di uno spazio $\mathcal{L}^p(\mu)$ in un altro	pag. 5
19.3 – Caratterizzazione dell'inclusione tra due spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$	pag. 9