9. Funzioni misurabili.

9.1. Funzioni misurabili.

Definizione 9.1.1. (*Funzione misurabile*). Siano $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ due spazi misurabili. Si chiama *funzione misurabile, dallo spazio misurabile* $(\Omega, \mathcal{A})$ *nello spazio misurabile* $(\Omega', \mathcal{A}')$, ogni funzione $T : \Omega \to \Omega'$ avente la seguente proprietà:

$$\forall A' \in \mathcal{A}' \implies T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \tag{9.1.1}$$

(la controimmagine tramite T di ogni insieme misurabile dello spazio misurabile di arrivo è un insieme misurabile dello spazio di partenza).

In altri termini, ricordando la definizione di σ-algebra controimmagine (Esempio 5.1.3), possiamo dire che una funzione misurabile, dallo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ nello spazio misurabile $(\Omega', \mathcal{A}')$, è una funzione $T : \Omega \to \Omega'$ tale che la σ-algebra controimmagine $T^{-1}(\mathcal{A}')$ è contenuta nella σ-algebra $\mathcal{A}$.

Nel seguito, per significare che T è una funzione misurabile, dallo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ nello spazio misurabile $(\Omega', \mathcal{A}')$, diremo, più concisamente, che $T : \Omega \to \Omega'$ è una funzione $\mathcal{A}{-}\mathcal{A}'$*-misurabile.* Anzi, talvolta parleremo semplicemente di funzione misurabile, senza accennare ai due spazi misurabili $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$, sempreché tali spazi misurabili siano evidenti dal contesto del discorso e non vi sia alcuna possibilità di equivoco.

Osservazione 9.1.1. Il concetto di funzione misurabile, da uno spazio misurabile in un altro, presenta forti analogie con quello di funzione continua, da uno spazio topologico in un altro. Infatti, così come uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ è una coppia ordinata in cui Ω è un insieme non vuoto e $\mathcal{A}$ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω verificante opportune condizioni (i postulati σ_1 - σ_3 che definiscono le σ-algebre), anche uno spazio topologico S può essere pensato come una coppia ordinata $(S, \mathcal{O})$, dove $\mathcal{O}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S (la famiglia degli insiemi aperti di S) soddisfacente opportuni requisiti, dal momento che uno dei modi di introdurre la topologia in un insieme è quello di assegnare la famiglia degli insiemi aperti. Inoltre, dati due spazi topologici S_1, S_2 e denotate con $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ le relative famiglie degli insiemi aperti, sappiamo che una funzione $f : S_1 \to S_2$ è continua se e solo se la controimmagine $f^{-1}(O_2)$ di un qualunque insieme $O_2 \in \mathcal{O}_2$ è un elemento di $\mathcal{O}_1$.

Esempi 9.1.1. 1) Siano $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ due spazi misurabili qualsiasi. Ogni funzione costante $K : \Omega \to \Omega'$ è $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-misurabile. Infatti, supponendo che sia $K(\omega) = \overline{\omega}\,' \ \forall \omega \in \Omega$, per ogni insieme $A' \subseteq \Omega'$ si ha:

$$K^{-1}(A') \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{se } \overline{\omega}\,' \notin A' \,, \\ \Omega' & \text{se } \overline{\omega}\,' \in A' \,, \end{cases}$$

quindi, in ogni caso, risulta $K^{-1}(A') \in \mathcal{A}$.

2) Sia Ω un insieme non vuoto e siano $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ due qualsiasi σ-algebre in Ω. Allora la funzione identità i_Ω, da Ω in sè, è $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$-misurabile se e solo se $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2$.

Teorema 9.1.1. (Criterio generale di misurabilità). *Siano* $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ *due spazi misurabili e sia* $\mathcal{E}'$ *un generatore di* $\mathcal{A}'$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione* $T : \Omega \to \Omega'$ *sia* $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$*-misurabile è che si abbia:*

$$\forall E' \in \mathcal{E}' \implies T^{-1}(E') \in \mathcal{A} \ . \tag{9.1.2}$$

Dimostrazione. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamone la sufficienza. Consideriamo la famiglia $\mathcal{Q}'$ di tutti i sottoinsiemi di Ω' la cui controimmagine, mediante T, appartiene a $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{Q}' \ = \ \{Q' \in \mathcal{P}(\Omega') \ : \ T^{-1}(Q') \in \mathcal{A}\} \ ,$$

e osserviamo che tale famiglia è una σ-algebra in Ω'. Si ha infatti:

— $\Omega' \in \mathcal{Q}'$, poiché $T^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$;

— $Q' \in \mathcal{Q}' \implies \Omega' \setminus Q' \in \mathcal{Q}'$; infatti, dato che, per ipotesi, la controimmagine $T^{-1}(Q')$ appartiene a $\mathcal{A}$, allora anche

$$T^{-1}(\Omega' \setminus Q') \ = \ \Omega \setminus T^{-1}(Q')$$

appartiene a $\mathcal{A}$, vale a dire $\Omega' \setminus Q' \in \mathcal{Q}'$;

— $Q'_n \in \mathcal{Q}' \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \cup_{n=1}^{\infty} Q'_n \in \mathcal{Q}'$; infatti, dato che, per ipotesi, tutte le controimmagini $T^{-1}(Q'_n)$, $n \in \mathbb{N}$, appartengono a $\mathcal{A}$, allora anche

$$T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q'_n\right) \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}\left(Q'_n\right)$$

appartiene a a $\mathcal{A}$, vale a dire $\cup_{n=1}^{\infty} Q'_n \in \mathcal{Q}'$.

Dato che $\mathcal{Q}'$ è una σ-algebra in Ω' e che, per ipotesi, vale la (9.1.2), cioè è vero che $\mathcal{Q}' \supseteq \mathcal{E}'$, è vero anche che $\mathcal{Q}' \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{E}')$, cioè $\mathcal{Q}' \supseteq \mathcal{A}'$, ma questo significa proprio che vale la (9.1.1). Ciò completa la dimostrazione.

Corollario 9.1.1. (Misurabilità delle funzioni continue). *Siano* S_1, S_2 *due spazi topologici e siano* $\mathcal{B}(S_1)$, $\mathcal{B}(S_2)$ *le corrispondenti* σ*-algebre degli insiemi di Borel. Ogni funzione continua* $f : S_1 \to S_2$ *è* $\mathcal{B}(S_1) - \mathcal{B}(S_2)$*-misurabile.*

Dimostrazione. Denotate con $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ le famiglie degli insiemi aperti degli spazi S_1, S_2, la continuità di f equivale, come sappiamo, al sussistere della condizione

$$\forall O_2 \in \mathcal{O}_2 \implies f^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_1 \ .$$

Allora, ricordando che $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ sono, per definizione, generatori di $\mathcal{B}(S_1)$ e $\mathcal{B}(S_2)$, rispettivamente, la tesi segue subito dal precedente teorema.

Il successivo esempio mostra che la continuità di una funzione $f : S_1 \to S_2$ non è condizione necessaria per la sua $\mathcal{B}(S_1) - \mathcal{B}(S_2)$-misurabilità.

Esempio 9.1.2. Sia $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet, cioè

$$D(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Tale funzione, che non è continua in nessun punto di $\mathbb{R}$, è però $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1$-misurabile, anzi $\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}$-misurabile, essendo $\mathcal{A}$ una qualunque σ-algebra in $\mathbb{R}$. Infatti, come è facile verificare, per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha:

$$D^{-1}(A) \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{se } 0, 1 \notin A\,; \\ \mathbb{Q} & \text{se } 0 \in A,\, 1 \notin A\,; \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \text{se } 1 \in A,\, 0 \notin A\,; \\ \mathbb{R} & \text{se } 0, 1 \in A\,; \end{cases}$$

dunque, in ogni caso, risulta $D^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$.

Teorema 9.1.2. (Misurabilità della funzione composta). *Dati gli spazi misurabili* $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ *e* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, *supponiamo che* $T_1 : \Omega \to \Omega_1$ *sia una funzione* $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$*-misurabile e* $T_2 : \Omega_1 \to \Omega_2$ *sia una funzione* $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$*-misurabile. Allora la funzione composta* $T_2 \circ T_1$ *è* $\mathcal{A} - \mathcal{A}_2$*-misurabile.*

Dimostrazione. Per ogni insieme $A_2 \subseteq \Omega_2$ si ha:

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A_2) \;=\; T_1^{-1}(T_2^{-1}(A_2)) \;; \tag{9.1.3}$$

infatti:

$$\omega \in (T_2 \circ T_1)^{-1}(A_2) \iff \omega \in \Omega \text{ e } (T_2 \circ T_1)(\omega) \in A_2 \iff \omega \in \Omega \text{ e } T_2(T_1(\omega)) \in A_2 \iff$$
$$\iff \omega \in \Omega \text{ e } T_1(\omega) \in T_2^{-1}(A_2) \iff \omega \in T_1^{-1}(T_2^{-1}(A_2)) \;.$$

Per la misurabilità delle funzioni T_2 e T_1 si ha:

$$A_2 \in \mathcal{A}_2 \implies T_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1 \implies T_1^{-1}(T_2^{-1}(A_2)) \in \mathcal{A} \;,$$

pertanto, grazie alla (9.1.3), possiamo concludere che:

$$\forall A_2 \in \mathcal{A}_2 \implies (T_2 \circ T_1)^{-1}(A_2) \in \mathcal{A} \;,$$

dunque, a norma di definizione, la funzione $T_2 \circ T_1$ è $\mathcal{A} - \mathcal{A}_2$-misurabile.

Terminiamo il paragrafo evidenziando qualche altra utile proprietà delle funzioni misurabili.

Proposizione 9.1.1. (Misurabilità della restrizione). *Siano* $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ *due spazi misurabili e sia* $\Gamma \subseteq \Omega$, $\Gamma \neq \emptyset$. *Se* $T : \Omega \to \Omega'$ *è una funzione* $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$*-misurabile, la restrizione* $S = T|_{\Gamma}$ *è* $\Gamma \cap \mathcal{A} - \mathcal{A}'$*-misurabile.*

Dimostrazione. Infatti, per ogni $A' \in \mathcal{A}'$, essendo $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$, risulta

$$S^{-1}(A') \ = \ \Gamma \cap T^{-1}(A') \in \Gamma \cap \mathcal{A} \ .$$

Proposizione 9.1.2. (Prolungamento di funzioni misurabili). *Siano* $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ *due spazi misurabili e sia* $\Gamma \subseteq \Omega$, $\Gamma \neq \emptyset$. *Supponiamo inoltre che l'insieme* Γ *appartenga alla* σ*-algebra* $\mathcal{A}$.

Se $S : \Gamma \to \Omega'$ *è una funzione* $\Gamma \cap \mathcal{A} - \mathcal{A}'$*-misurabile, esiste almeno una funzione* $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$*-misurabile* $T : \Omega \to \Omega'$ *tale che* $T|_{\Gamma} = S$.

Dimostrazione. L'ipotesi $\Gamma \in \mathcal{A}$ assicura (Osservazione 5.1.1) che $\Gamma \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, pertanto, grazie alla $\Gamma \cap \mathcal{A} - \mathcal{A}'$-misurabilità di S, abbiamo che

$$\forall A' \in \mathcal{A}' \implies S^{-1}(A') \in \mathcal{A} \ .$$

Fissiamo una qualunque funzione $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-misurabile $H : \Omega \to \Omega'$ (ad esempio una funzione costante) e definiamo la funzione $T : \Omega \to \Omega'$ nel modo seguente:

$$T(\omega) \ = \ \begin{cases} S(\omega) & \text{se } \omega \in \Gamma \,, \\ H(\omega) & \text{se } \omega \in \Omega \setminus \Gamma \,. \end{cases}$$

Allora $T|_{\Gamma} = S$ e, per ogni $A' \in \mathcal{A}'$, risulta

$$T^{-1}(A') \ = \ S^{-1}(A') \cup [(\Omega \setminus \Gamma) \cap H^{-1}(A')] \in \mathcal{A} \ ,$$

dunque T è $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-misurabile.

Proposizione 9.1.3. (Indipendenza della misurabilità dall'insieme di arrivo). *Dati gli spazi misurabili* $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ *e la funzione* $T : \Omega \to \Omega'$, *supponiamo che* Ω'' *sia un qualunque sottoinsieme di* Ω' *tale che* $T(\Omega) \subseteq \Omega''$ *e denotiamo con* $\mathcal{A}''$ *la* σ*-algebra traccia di* $\mathcal{A}'$ *su* Ω''.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè T *sia* $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$*-misurabile è che* T (pensata come funzione a valori in Ω'') *sia* $\mathcal{A} - \mathcal{A}''$*-misurabile.*

Dimostrazione. Si ha, ovviamente,

$$T^{-1}(Q') \ = \ T^{-1}(\Omega'' \cap Q') \qquad \forall Q' \in \mathcal{P}(\Omega') \ ,$$

pertanto l'asserto è un'immediata conseguenza della definizione di σ-algebra traccia.

9.2. Misura immagine.

Supponiamo che $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sia uno spazio di misura, $(\Omega', \mathcal{A}')$ sia uno spazio misurabile e $T : \Omega \to \Omega'$ sia una funzione $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-misurabile. Possiamo allora definire un'applicazione $\mu' : \mathcal{A}' \to \overline{\mathbb{R}}$ mediante la seguente regola:

$$\mu'(A') \; = \; \mu(T^{-1}(A')) \qquad \forall A' \in \mathcal{A}' \; .$$

Si verifica facilmente che μ' è una misura. I postulati M_1) e M_2) sono ovviamente soddisfatti. Proviamo che vale M_4). Sia $\{A'_n\}$ una successione di insiemi di $\mathcal{A}'$, a due a due disgiunti. Allora anche gli insiemi della successione $\{T^{-1}(A'_n)\}$ sono a due a due disgiunti e pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) \; &= \; \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right)\right) \; = \; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A'_n)\right) \; = \\ &= \; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A'_n)) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A'_n) \; . \end{aligned}$$

Ha quindi senso la seguente definizione.

Definizione 9.2.1. (*Misura immagine*). Siano dati: uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, uno spazio misurabile $(\Omega', \mathcal{A}')$ e una funzione $T : \Omega \to \Omega'$, $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-misurabile. Si chiama *misura immagine di μ mediante T*, e si indica con $T(\mu)$, la misura su $\mathcal{A}'$ definita per mezzo della posizione:

$$(T(\mu))(A') \; = \; \mu(T^{-1}(A')) \qquad \forall A' \in \mathcal{A}' \; .$$

Proposizione 9.2.1. (Proprietà associativa della misura immagine). *Siano:* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura;* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *due spazi misurabili;* $T_1 : \Omega \to \Omega_1$ *una funzione* $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$*-misurabile e* $T_2 : \Omega_1 \to \Omega_2$ *una funzione* $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$*-misurabile. Allora*

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) \; = \; T_2(T_1(\mu)) \; . \tag{9.2.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che sia il primo che il secondo membro della (9.2.1) hanno significato e rappresentano delle misure su $\mathcal{A}_2$; il primo membro, in quanto la funzione composta $T_2 \circ T_1$ è una funzione $\mathcal{A} - \mathcal{A}_2$-misurabile; il secondo, in quanto $T_1(\mu)$ è una misura su $\mathcal{A}_1$ e la funzione T_2 è $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$-misurabile.

Proviamo la (9.2.1). Per ogni $A_2 \in \mathcal{A}_2$ si ha:

$$\begin{aligned} ((T_2 \circ T_1)(\mu))(A_2) \; &= \; \mu((T_2 \circ T_1)^{-1}(A_2)) \; = \; \mu(T_1^{-1}(T_2^{-1}(A_2))) \; = \\ &= \; (T_1(\mu))(T_2^{-1}(A_2)) \; = \; (T_2(T_1(\mu))(A_2) \; . \end{aligned}$$

9.3. Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Mediante il concetto di misura immagine possiamo dimostrare, abbastanza facilmente, un'importante proprietà della misura di Lebesgue, vale a dire la sua "invarianza per traslazioni".

Fissato $a \in \mathbb{R}^h$, sia $T_a : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^h$ l'applicazione (*traslazione di passo* a) definita nel modo seguente:

$$T_a(x) \ = \ x + a \qquad \forall x \in \mathbb{R}^h \ .$$

Indicando con d e $\| \ \|$, rispettivamente, la distanza euclidea e la norma euclidea, si ha:

$$d(T_a(x'), T_a(x'')) \ = \ \|T_a(x') - T_a(x'')\| \ = \ \|x' + a - (x'' + a)\| \ =$$

$$= \ \|x' - x''\| \ = d(x', x'') \qquad \forall x', x'' \in \mathbb{R}^h \ ,$$

dunque T_a è un'isometria ([1]) di $\mathbb{R}^h$ in sè e, come tale, è continua (è lipschitziana) ed iniettiva (se $x' \neq x''$ allora $d(T(x'), T(x'')) = d(x', x'') > 0$). La T_a è anche surgettiva; infatti, per ogni $y \in \mathbb{R}^h$, l'equazione, nell'incognita x, $T_a(x) = y$ ammette la soluzione $x = y - a$. Da ciò segue anche che la funzione inversa T_a^{-1} è la traslazione T_{-a}.

Poichè T_a è $\mathcal{B}_h - \mathcal{B}_h$-misurabile ha senso considerare la misura immagine $T_a(\lambda_h)$.

Osserviamo che, per ogni intervallo chiuso $[b, c] \in \mathcal{I}_h$, risulta, come facilmente si verifica,

$$T_a^{-1}([b, c]) \ = \ [b - a, c - a] \ ,$$

$$\mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([b - a, c - a]) \ = \ \mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([b, c])$$

e pertanto

$$(T_a(\lambda_h))([b, c]) \ = \ \lambda_h(T_a^{-1}([b, c])) \ = \ \lambda_h([b - a, c - a]) \ =$$

$$= \ \mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([b - a, c - a]) \ = \ \mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([b, c]) \ ;$$

di conseguenza, per il teorema di unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{B}_h$, possiamo affermare che

$$T_a(\lambda_h) \ = \ \lambda_h \ , \tag{9.3.1}$$

cioè

$$\lambda_h(T_a^{-1}(B)) \ = \ \lambda_h(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}_h \ . \tag{9.3.2}$$

([1]) Per la definizione di isometria si veda il capitolo sull'insieme $\overline{\mathbb{R}}$.

D'altra parte si ha

$$T_a^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^h \, : \, T_a(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R}^h \, : \, x + a \in B\} = \{b - a \, : \, b \in B\} \ ,$$

pertanto, adoperando, come è d'uso, la notazione $B - a$ per l'insieme $\{b - a \, : \, b \in B\}$, la (9.3.2) si scrive

$$\lambda_h(B - a) \ = \ \lambda_h(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}_h \tag{9.3.3}$$

(un insieme boreliano B ed il suo traslato di passo $-a$ hanno la stessa misura).

Nelle considerazioni precedenti il vettore $a \in \mathbb{R}^h$ è arbitrario; pertanto, in tutto ciò che precede e, in particolare, nella (9.3.3), possiamo rimpiazzare a con il suo opposto $-a$. Perveniamo così al

Teorema 9.3.1. (Invarianza per traslazioni di λ_h). *Se $B \in \mathcal{B}_h$, allora, per ogni $a \in \mathbb{R}^h$, l'insieme $B + a$ (2) e l'insieme B hanno la stessa misura secondo Lebesgue.*

Dimostriamo, più in generale, che l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue vale non solo per i boreliani ma per tutti gli insiemi misurabili.

Teorema 9.3.2. (Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue). *Se $E \in \mathcal{L}_h$, allora, per ogni $a \in \mathbb{R}^h$, risulta $E + a \in \mathcal{L}_h$ e $\mathrm{m}_h(E + a) = \mathrm{m}_h(E)$.*

Dimostrazione. Poiché $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$ è il completamento di $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$ (Teorema 8.3.1) si ha

$$E \ = \ D \cup M \ ,$$

con $D \in \mathcal{B}_h$ e $M \subseteq B \in \mathcal{B}_h$, $\lambda_h(B) = 0$. Allora, per ogni $a \in \mathbb{R}^h$, risulta

$$E + a \ = \ (D + a) \cup (M + a)$$

ed è (cfr. la nota (2)) $D + a \in \mathcal{B}_h$, $M + a \subseteq B + a \in \mathcal{B}_h$, con (Teorema 9.3.1)

$$\lambda_h(B + a) \ = \ \lambda_h(B) \ = \ 0;$$

di conseguenza, per il Teorema 8.3.1, la Proposizione 8.2.1 ed il precedente Teorema 9.3.1, si ha $E + a \in \mathcal{L}_h$ e inoltre

$$\mathrm{m}_h(E + a) \ = \ \mathrm{m}_h(D + a) \ = \ \mathrm{m}_h(D) \ = \ \mathrm{m}_h(E) \ .$$

Esempio 9.3.1. Un'altra interessante applicazione del concetto di misura immagine si ottiene considerando, per $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, l'applicazione $H_r : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^h$ definita nel modo seguente:

$$H_r(x) \ = \ rx \qquad \forall x \in \mathbb{R}^h \ .$$

(2) L'insieme $B + a$ appartiene a $\mathcal{B}_h$ poiché $B + a = (T_{-a})^{-1}(B)$ e T_{-a} è $\mathcal{B}_h - \mathcal{B}_h$-misurabile.

Si ha

$$d(H_r(x'), H_r(x'')) \;=\; \|H_r(x') - H_r(x'')\| \;=\; \|rx' - rx''\| \;=$$

$$=\; |r|\,\|x' - x''\| \;=|r|\,d(x', x'') \qquad\qquad \forall x', x'' \in \mathbb{R}^h \ ,$$

pertanto H_r è continua (e quindi $\mathcal{B}_h - \mathcal{B}_h$-misurabile) e iniettiva. È inoltre immediato verificare che H_r è surgettiva e che $H_r^{-1} = H_{\frac{1}{r}}$.

Calcoliamo la misura immagine $H_r(\lambda_h)$.

Per ogni intervallo chiuso $[a, b] \in \mathcal{I}_h$ si ha:

se $r > 0$,

$$(H_r(\lambda_h))([a, b]) \;=\; \lambda_h(H_r^{-1}([a, b])) \;=\; \lambda_h([\tfrac{1}{r}a, \tfrac{1}{r}b]) \;=\; \left(\tfrac{1}{r}\right)^h \lambda_h([a, b]) \ ,$$

se $r < 0$,

$$(H_r(\lambda_h))([a, b]) \;=\; \lambda_h(H_r^{-1}([a, b])) \;=\; \lambda_h([\tfrac{1}{r}b, \tfrac{1}{r}a]) \;=\; \left(-\tfrac{1}{r}\right)^h \lambda_h([a, b]) \ ;$$

quindi, in ogni caso,

$$|r|^h (H_r(\lambda_h))([a, b]) \;=\; \lambda_h([a, b]) \ . \tag{9.3.4}$$

Dalla (9.3.4), tenendo presente che il prodotto di una misura per una costante non negativa è ancora una misura, per il teorema di unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{B}_h$ si deduce che

$$|r|^h H_r(\lambda_h) \;=\; \lambda_h \ ,$$

vale a dire

$$|r|^h \lambda_h(H_r^{-1}(B)) \;=\; \lambda_h(B) \qquad\qquad \forall B \in \mathcal{B}_h \ ,$$

cioè (adottando la notazione $sB \;=\; \{sb \,:\, b \in B\}$, $s \in \mathbb{R}$)

$$\lambda_h\left(\tfrac{1}{r}B\right) \;=\; \tfrac{1}{|r|^h}\lambda_h(B) \qquad\qquad \forall B \in \mathcal{B}_h \ ,$$

ovvero, rimpiazzando, come è lecito, r con $\frac{1}{r}$,

$$\lambda_h\left(rB\right) \;=\; |r|^h \lambda_h(B) \qquad\qquad \forall B \in \mathcal{B}_h \ .$$

Con un ragionamento analogo a quello adottato per il Teorema 9.3.2 si ottiene allora la seguente proposizione.

Proposizione 9.3.1. *Se $E \in \mathcal{L}_h$, allora, per ogni $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, risulta $rE \in \mathcal{L}_h$ e $\mathrm{m}_h(rE) = |r|^h \mathrm{m}_h(E)$.*

In particolare ($r = -1$) si ha il

Corollario 9.3.1. (Invarianza della misura di Lebesgue nella simmetria rispetto all'origine). *Se* $E \in \mathcal{L}_h$, *allora* $-E \in \mathcal{L}_h$ *e* $\mathrm{m}_h(-E) = \mathrm{m}_h(E)$.

Terminiamo il paragrafo con l'enunciato di un teorema generale, in cui rientrano come casi particolari il Teorema 9.3.2 ed il Corollario 9.3.1.

Teorema 9.3.3. (Invarianza per isometrie della misura di Lebesgue). *Sia* $T : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^h$ *un'isometria. Allora, per ogni* $E \in \mathcal{L}_h$, *si ha* $T(E) \in \mathcal{L}_h$ *e* $\mathrm{m}_h(T(E)) = \mathrm{m}_h(E)$.

9.4. σ-algebra generata da una famiglia di funzioni.

Dalla definizione di funzione misurabile segue subito che, dati un insieme $\Omega \neq \emptyset$, uno spazio misurabile $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ ed una funzione $T_1 : \Omega \to \Omega_1$, la σ-algebra controimmagine $T_1^{-1}(\mathcal{A}_1)$ è la minima σ-algebra $\mathcal{A}$ in Ω avente la proprietà che T_1 è $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$-misurabile.

Generalizziamo la precedente situazione. Siano dati un insieme non vuoto Ω, una famiglia di spazi misurabili $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ ed una famiglia di funzioni $\{T_i\}_{i \in I}$, con

$$T_i : \Omega \to \Omega_i \quad \forall i \in I \ .$$

Precisiamo che il termine "famiglia" è usato qui (e sarà così tutte le volte che si adopererà una notazione del tipo $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$, dove la variabilità dell'indice è specificata esternamente alla parentesi graffa) non come sinonimo di "insieme", ma di "applicazione". Pertanto, dicendo che sono date le due famiglie $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ e $\{T_i\}_{i \in I}$, intendiamo dire che sono assegnate due applicazioni:

$$i \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i) \quad , \quad i \to T_i \quad ,$$

entrambe definite in uno stesso insieme I ed a valori, rispettivamente, in un (dato) insieme di spazi misurabili ed in un (dato) insieme di funzioni.

Ovviamente esistono σ-algebre $\mathcal{A}$ in Ω aventi la proprietà che T_i è $\mathcal{A} - \mathcal{A}_i$-misurabile per ogni $i \in I$ (basta prendere $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) e quindi, dato che la σ-algebra intersezione di tali σ-algebre conserva la stessa proprietà ([3]), abbiamo che esiste la minima σ-algebra $\mathcal{A}$ in Ω che rende misurabili tutte le funzioni T_i, $i \in I$. Pertanto ha senso porre la seguente definizione.

([3]) Denotata con Σ la famiglia di tutte le σ-algebre $\mathcal{A}$ in Ω tali che T_i è $\mathcal{A} - \mathcal{A}_i$-misurabile per ogni $i \in I$ e posto

$$\mathcal{A}^* = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Sigma} \mathcal{A} \ ,$$

risulta $\mathcal{A}^* \in \Sigma$; infatti, fissata una qualunque funzione T_i, $i \in I$, per ogni insieme $A' \in \mathcal{A}_i$, risulta

$$T_i^{-1}(A') \in \mathcal{A} \qquad \forall \mathcal{A} \in \Sigma \ ,$$

cioè $T_i^{-1}(A') \in \mathcal{A}^*$, dunque si ha che T_i è $\mathcal{A}^* - \mathcal{A}_i$-misurabile.

Definizione 9.4.1. (*σ-algebra generata da una famiglia di funzioni*). Dati un insieme $\Omega \neq \emptyset$, una famiglia di spazi misurabili $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ ed una famiglia di funzioni $\{T_i\}_{i\in I}$, con $T_i : \Omega \to \Omega_i$ $\forall i \in I$, si chiama *σ-algebra generata dalle funzioni T_i, $i \in I$,* e si denota con il simbolo $\mathcal{A}(T_i : i \in I)$, la minima σ-algebra $\mathcal{A}$ in Ω tale che T_i è $\mathcal{A} - \mathcal{A}_i$-misurabile per ogni $i \in I$.

Poiché, fissata una σ-algebra $\mathcal{A}$ in Ω e fissato un indice $i \in I$, la funzione T_i risulta $\mathcal{A} - \mathcal{A}_i$-misurabile se e solo se $\mathcal{A} \supseteq T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$, abbiamo l'equivalenza

$$T_i \text{ è } \mathcal{A} - \mathcal{A}_i\text{−misurabile } \forall i \in I \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \supseteq \bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \ .$$

Ne segue, ovviamente, che la famiglia (di sottoinsiemi di Ω)

$$\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$$

è un generatore di $\mathcal{A}(T_i : i \in I)$, dunque abbiamo la

Proposizione 9.4.1. *Dati un insieme Ω, una famiglia di spazi misurabili $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ ed una famiglia di funzioni $\{T_i\}_{i\in I}$, con $T_i : \Omega \to \Omega_i$ $\forall i \in I$, risulta*

$$\mathcal{A}(T_i : i \in I) \ = \ \mathcal{A}\left(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) \ .$$

Osservazione 9.4.1. Notiamo che, a rigore, sia l'espressione "σ-algebra generata dalle funzioni T_i, $i \in I$" che la corrispondente notazione $\mathcal{A}(T_i : i \in I)$ sono imprecise. Infatti è chiaro che la σ-algebra in questione, oltre che dalle funzioni T_i, dipende anche dagli spazi misurabili $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Tuttavia, per semplicità, manterremo la terminologia ed il simbolismo introdotti, anche perché nei casi che dovremo effettivamente considerare non vi sarà alcuna possibilità di equivoco in merito agli spazi misurabili $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ai quali ci si intende riferire.

Nel caso di una famiglia finita di funzioni $\{T_1, \ldots, T_n\}$ alla notazione sopra introdotta, che in questo caso diviene $\mathcal{A}(T_i : i \in \{1, \ldots, n\})$, preferiremo la più semplice notazione "per elenco" $\mathcal{A}(T_1, \ldots, T_n)$.

Esempio 9.4.1. Siano:

$$\Omega = \mathbb{R}^h \ , \quad (\Omega_1, \mathcal{A}_1) = \ldots = (\Omega_h, \mathcal{A}_h) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$$

e, per ogni $i = 1, \ldots, h$, sia T_i la i-ma proiezione di $\mathbb{R}^h$ su $\mathbb{R}$, cioè

$$T_i(x) \ = \ x_i \qquad\qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h \ .$$

Verifichiamo che la σ-algebra $\mathcal{A}(T_1, \ldots, T_h)$, generata dalle proiezioni $T_1, \ldots, T_h$, coincide con la σ-algebra $\mathcal{B}_h$ degli insiemi di Borel di $\mathbb{R}^h$.

Infatti ogni proiezione T_i, $i = 1, \ldots, h$, è una funzione continua e quindi (Corollario 9.1.1) $\mathcal{B}_h - \mathcal{B}_1$-misurabile; di conseguenza si ha

$$\mathcal{B}_h \supseteq \mathcal{A}(T_1, \ldots, T_h) \ .$$

Per provare l'inclusione contraria osserviamo che un qualunque intervallo chiuso

$$[a, b] \ = \ [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_h, b_h]$$

di $\mathbb{R}^h$ può scriversi nella forma

$$[a, b] \ = \ \{x \in \mathbb{R}^h \ : \ a_1 \leq x_1 \leq b_1\} \cap \ldots \cap \{x \in \mathbb{R}^h \ : \ a_h \leq x_h \leq b_h\} \ =$$

$$= \ T_1^{-1}([a_1, b_1]) \cap \ldots \cap T_h^{-1}([a_h, b_h])$$

e quindi appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}(T_1, \ldots, T_h)$, dato che ognuno dei fattori $T_i^{-1}([a_i, b_i])$, $i = 1, \ldots, h$, della precedente intersezione appartiene a tale σ-algebra (essendo la controimmagine, tramite una funzione $\mathcal{A}(T_1, \ldots, T_h) - \mathcal{B}_1$-misurabile, di un insieme – l'intervallo $[a_i, b_i]$ – che appartiene a $\mathcal{B}_1$). Di conseguenza si ha

$$\mathcal{A}(T_1, \ldots, T_h) \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h) = \mathcal{B}_h \ .$$

Teorema 9.4.1. (Criterio di $\mathcal{A}^* - \mathcal{A}(T_i \ : \ i \in I)$-misurabilità). *Siano dati: un insieme $\Omega \neq \emptyset$, una famiglia di spazi misurabili $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ ed una famiglia di funzioni $\{T_i\}_{i \in I}$, con $T_i : \Omega \to \Omega_i$ $\forall i \in I$. Sia dato inoltre uno spazio misurabile $(\Omega^*, \mathcal{A}^*)$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione

$$T : \Omega^* \to \Omega$$

sia $\mathcal{A}^* - \mathcal{A}(T_i \ : \ i \in I)$-misurabile è che ciascuna delle composizioni $T_i \circ T$, $i \in I$, sia una funzione $\mathcal{A}^* - \mathcal{A}_i$-misurabile.

Dimostrazione. La necessità della condizione segue subito dal Teorema 9.1.2.

Per dimostrarne la sufficienza utilizziamo il criterio generale di misurabilità. Per la Proposizione 9.4.1 un generatore di $\mathcal{A}(T_i \ : \ i \in I)$ è

$$\mathcal{E} \ = \ \bigcup_{i \in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \ .$$

Proviamo che

$$\forall E \in \mathcal{E} \implies T^{-1}(E) \in \mathcal{A}^* \ .$$

Infatti, se l'insieme E appartiene a $\mathcal{E}$, allora esso appartiene a qualcuna delle controimmagini $T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ e quindi è del tipo $T_i^{-1}(A_i)$, con $i \in I$ e $A_i \in \mathcal{A}_i$; pertanto, tenendo presente che $T_i \circ T$ è $\mathcal{A}^* - \mathcal{A}_i$-misurabile per ipotesi, si ha

$$T^{-1}(E) \;=\; T^{-1}(T_i^{-1}(A_i)) \;=\; (T_i \circ T)^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}^* \;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Esempio 9.4.2. Consideriamo la funzione $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita nel modo seguente:

$$T(x) \;=\; (x, x^2, D(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \;,$$

essendo D la funzione di Dirichlet, e verifichiamo che tale funzione è $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_3$-misurabile. Poichè la σ-algebra dello spazio misurabile di arrivo, $\mathcal{B}_3$, è generata da una famiglia di funzioni, precisamente (Esempio 9.4.1) dalle tre proiezioni T_1, T_2, T_3 di $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$, possiamo fare uso del precedente criterio. Dobbiamo allora dimostrare che ciascuna delle tre composizioni $T_i \circ T$, $i = 1, 2, 3$, è una funzione $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1$-misurabile. Ma ciò è di immediata verifica in quanto le funzioni $T_1 \circ T$ e $T_2 \circ T$, cioè le funzioni

$$x \;\to\; x \qquad \text{e} \qquad x \;\to\; x^2 \;,$$

sono continue e quindi misurabili (Corollario 9.1.1), mentre la misurabiltà di $T_3 \circ T = D$ è stata acquisita nell'Esempio 9.4.1.