

# 8. Completamento di uno spazio di misura.

## 8.1. Spazi di misura. Spazi di misura completi.

**Definizione 8.1.1.** (*Spazio misurabile*). Si chiama *spazio misurabile* ogni coppia ordinata  $(\Omega, \mathcal{A})$ , dove  $\Omega$  è un insieme non vuoto e  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra in  $\Omega$ .

Se  $(\Omega, \mathcal{A})$  è uno spazio misurabile, gli insiemi  $A \in \mathcal{A}$  vengono detti *insiemi misurabili*.

**Definizione 8.1.2.** (*Spazio di misura*). Si chiama *spazio di misura* ogni terna ordinata  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , dove  $(\Omega, \mathcal{A})$  è uno spazio misurabile e  $\mu$  è una misura su  $\mathcal{A}$ .

**Definizione 8.1.3.** (*Spazio di misura completo*). Uno spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  si dice *completo* se è verificata la seguente proprietà:

$$(8.1.1) \quad A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0, B \subseteq A \implies B \in \mathcal{A}$$

(tutti i sottoinsiemi di un insieme misurabile, avente misura nulla, sono insiemi misurabili).

Per significare che lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  è completo talvolta, quando non vi è possibilità di equivoco, si dice anche, più brevemente, che la misura  $\mu$  è completa.

**Esempi 8.1.1.** Fissati l'insieme  $\Omega \neq \emptyset$  e il punto  $\omega \in \Omega$ , consideriamo la delta di Dirac concentrata in  $\omega$  (Esempio 5.3.3). È immediato verificare che:

1) lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_\omega)$  è completo;

2) anche  $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\}, \delta_\omega|_{\{\emptyset, \Omega\}})$  è completo;

(in generale, ogni spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , in cui  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ , oppure  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$  e  $\mu(\Omega) > 0$ , è completo)

3) invece, se  $\Omega$  ha almeno tre elementi e si considera la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  generata dalla famiglia  $\{\{\omega\}\}$ , cioè  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega\}, \{\omega\}^c\}$ , lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_\omega|_{\mathcal{A}})$  non è completo.

**Esempio 8.1.2.** Lo spazio di misura  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$  è completo. Dimostriamo, infatti, che da

$$E \in \mathcal{L}_h, m_h(E) = 0, F \subseteq E$$

segue

$$F \in \mathcal{L}_h .$$

Occorre provare che risulta  $F \cap I \in \mathcal{L}_h$  per ogni intervallo  $I \in \mathcal{I}_h$ . Per ipotesi, per ogni  $I \in \mathcal{I}_h$ , è vero che

$$E \cap I \in \mathcal{L}_h, m_h(E \cap I) = 0 ,$$

cioè

$$\sup\{m_h(C) : C \in \mathcal{C}_h^*, C \subseteq E \cap I\} = \inf\{m_h(A) : A \in \mathcal{A}_h^*, A \supseteq E \cap I\} = 0 ;$$

di conseguenza, essendo

$$\{A \in \mathcal{A}_h^* : A \supseteq E \cap I\} \subseteq \{A \in \mathcal{A}_h^* : A \supseteq F \cap I\}$$

e quindi

$$\inf\{m_h(A) : A \in \mathcal{A}_h^*, A \supseteq F \cap I\} \leq \inf\{m_h(A) : A \in \mathcal{A}_h^*, A \supseteq E \cap I\} ,$$

si ha pure

$$\sup\{m_h(C) : C \in \mathcal{C}_h^*, C \subseteq F \cap I\} = \inf\{m_h(A) : A \in \mathcal{A}_h^*, A \supseteq F \cap I\} = 0 ,$$

dunque  $F \cap I \in \mathcal{L}_h$ .

## 8.2. Completamento di uno spazio di misura.

Gli Esempi 8.1.1 mostrano che, in generale, una misura che è restrizione, oppure prolungamento, di una misura completa non è necessariamente una misura completa. È vero però che un qualunque spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  può essere “immerso” in uno spazio di misura completo, anzi esiste il “minimo” spazio di misura completo nel quale  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  può essere immerso. Più precisamente, si ha il seguente teorema.

**Teorema 8.2.1.** *Sia  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un qualunque spazio di misura. Esistono una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_0$  in  $\Omega$  e una misura  $\mu_0$  su  $\mathcal{A}_0$  tali che:*

- i)  $\mathcal{A}_0 \supseteq \mathcal{A}$  e  $\mu_0|_{\mathcal{A}} = \mu$ ;
- ii) lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$  è completo;
- iii) se  $(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  è un qualunque spazio di misura avente le proprietà i) e ii) (cioè  $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}$ ,  $\mu_1|_{\mathcal{A}} = \mu$  e  $(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  è completo), allora  $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_0$  e  $\mu_1|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{A}_0$  la famiglia di tutti i sottoinsiemi  $C$  di  $\Omega$  che possono essere espressi come unione

$$(8.2.1) \quad C = A \cup M$$

di un insieme  $A \in \mathcal{A}$  e di un insieme  $M$  avente la proprietà di essere sottoinsieme di qualche insieme  $B \in \mathcal{A}$ , con  $\mu(B) = 0$ .

È evidente che la famiglia  $\mathcal{A}_0$  contiene la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$ ; infatti ogni insieme  $A \in \mathcal{A}$ , essendo uguale a  $A \cup \emptyset$ , è del tipo (8.2.1) (con  $M = B = \emptyset$ ).

Verifichiamo che anche  $\mathcal{A}_0$  è una  $\sigma$ -algebra in  $\Omega$ . Si ha infatti:

$\sigma_1)$   $\Omega \in \mathcal{A}_0$ , dato che  $\Omega \in \mathcal{A}$  e  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_0$ ;

$\sigma_2)$   $C \in \mathcal{A}_0 \implies C^c \in \mathcal{A}_0$ ; infatti, se  $C$  è un insieme del tipo (8.2.1), cioè  $C = A \cup M$ , con  $A \in \mathcal{A}$  e  $M \subseteq B \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(B) = 0$ , allora, tenendo presente che  $M^c \supseteq B^c$  e che  $M^c \setminus B^c = B \setminus M$ , si ha che l'insieme complementare  $C^c$  può scriversi

$$C^c = (A \cup M)^c = A^c \cap M^c = A^c \cap (B^c \cup (M^c \setminus B^c)) = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap (B \setminus M)) ,$$

quindi anche  $C^c$  è del tipo (8.2.1), dato che  $A^c \cap B^c \in \mathcal{A}$  e  $A^c \cap (B \setminus M) \subseteq B$ ;

$\sigma_3)$   $C_n \in \mathcal{A}_0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}_0$ ; infatti, se ogni insieme  $C_n$  è del tipo (8.2.1), cioè  $C_n = A_n \cup M_n$ , con  $A_n \in \mathcal{A}$  e  $M_n \subseteq B_n \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(B_n) = 0$ , allora anche l'unione

$$(8.2.2) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right)$$

è del tipo (8.2.1), dato che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

e inoltre, per la  $\sigma$ -sub-additività di  $\mu$ ,

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = 0 .$$

Definiamo adesso una funzione  $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mediante la seguente regola: se  $C \in \mathcal{A}_0$  e  $C = A \cup M$  è una qualunque rappresentazione di  $C$  del tipo (8.2.1), cioè con  $A \in \mathcal{A}$  e  $M \subseteq B \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(B) = 0$ , poniamo  $\mu_0(C) = \mu(A)$ .

Osserviamo come prima cosa che la funzione  $\mu_0$  è ben definita; infatti, se l'insieme  $C \in \mathcal{A}_0$  ammette le due rappresentazioni

$$C = A_i \cup M_i , \quad i = 1, 2 ,$$

con  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $M_i \subseteq B_i \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(B_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , allora, essendo

$$A_1 \subseteq A_1 \cup M_1 = C = A_2 \cup M_2 \subseteq A_2 \cup B_2$$

e, viceversa,

$$A_2 \subseteq A_2 \cup M_2 = C = A_1 \cup M_1 \subseteq A_1 \cup B_1 ,$$

per la monotonia e la finita sub-additività della misura  $\mu$  si ha:

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2) \leq \mu(A_2) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$$

e, viceversa,

$$\mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup B_1) \leq \mu(A_1) + \mu(B_1) = \mu(A_1) ,$$

dunque

$$\mu(A_1) = \mu(A_2) .$$

Notiamo inoltre che la funzione  $\mu_0$  è un prolungamento di  $\mu$ ; infatti abbiamo già osservato che ogni insieme  $A \in \mathcal{A}$  si rappresenta nella forma (8.2.1) scrivendo  $A = A \cup \emptyset$ , quindi, per la definizione di  $\mu_0$ , si ha  $\mu_0(A) = \mu(A)$ .

Proviamo che  $\mu_0$  è una misura. I postulati  $M_1)$  e  $M_2)$  sono ovviamente soddisfatti. Verifichiamo che vale  $M_4)$ . Sia  $\{C_n\}$  una successione di insiemi appartenenti a  $\mathcal{A}_0$ , a due a due disgiunti, e sia, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n = A_n \cup M_n$  una rappresentazione di  $C_n$  del tipo (8.2.1). Allora, come abbiamo già osservato, una rappresentazione del tipo (8.2.1) dell'unione  $\cup_{n=1}^{\infty} C_n$  è data dalla (8.2.2); pertanto, per la definizione di  $\mu_0$ , tenuto conto del fatto che, ovviamente, anche gli insiemi della successione  $\{A_n\}$  sono a due a due disgiunti, si ha

$$\mu_0 \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(C_n) .$$

Abbiamo così costruito una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_0$  e una misura  $\mu_0$  verificanti la i). Proviamo che vale la ii). Sia  $C \in \mathcal{A}_0$ , con  $\mu_0(C) = 0$ , e sia  $D \subseteq C$ . Se consideriamo una qualunque rappresentazione  $C = A \cup M$  dell'insieme  $C$ , con  $A \in \mathcal{A}$ ,  $M \subseteq B \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(B) = 0$ , la definizione di  $\mu_0$  implica che  $\mu(A) = 0$ ; per la finita sub-additività di  $\mu$  si ha pure  $\mu(A \cup B) = 0$ . Di conseguenza, dato che  $D \subseteq C \subseteq A \cup B$  e possiamo scrivere  $D = \emptyset \cup D$ , abbiamo che anche l'insieme  $D$  è del tipo (8.2.1), dunque  $D \in \mathcal{A}_0$ .

Dimostriamo infine che vale la iii). Sia  $(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  uno spazio di misura completo tale che  $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}$  e  $\mu_1|_{\mathcal{A}} = \mu$ . Poiché  $(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  è completo, abbiamo che la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_1$  contiene, oltre che tutti gli insiemi  $A \in \mathcal{A}$  anche tutti gli insiemi  $M$  che sono sottoinsiemi di qualche insieme  $B \in \mathcal{A}$  tale che  $\mu_1(B) = 0$ , cioè tale che  $\mu(B) = 0$ ; di conseguenza  $\mathcal{A}_1$  contiene tutti gli insiemi  $C$  del tipo (8.2.1), con  $A \in \mathcal{A}$ ,  $M \subseteq B \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(B) = 0$ . Abbiamo così provato che la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_1$  contiene la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_0$ . Per completare la dimostrazione osserviamo che, per ogni insieme  $C = A \cup M \in \mathcal{A}_0$ , risulta

$$\mu(A) = \mu_1(A) \leq \mu_1(C) \leq \mu_1(A \cup B) \leq \mu_1(A) + \mu_1(B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(A)$$

e pertanto

$$\mu_1(C) = \mu(A) = \mu_0(C) .$$

**Osservazione 8.2.1.** È chiaro che la proprietà iii) di cui gode lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ , la cui esistenza è assicurata dal precedente teorema, garantisce anche che tale spazio di misura è unico. Ha quindi senso la seguente definizione.

**Definizione 8.2.1.** (*Completamento di uno spazio di misura*). Dato uno spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , si chiama *completamento* di  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$  individuato dalle condizioni i) - iii) del Teorema 8.2.1.

Osserviamo che la dimostrazione del Teorema 8.2.1 implica, ovviamente, la seguente proposizione, la quale fornisce un altro modo, equivalente, di definire il completamento di uno spazio di misura.

**Proposizione 8.2.1.** *Il completamento di uno spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  coincide con lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ , in cui la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_0$  è la seguente famiglia di sottoinsiemi di  $\Omega$ :*

$$(8.2.1) \quad \mathcal{A}_0 = \{A \cup M : A \in \mathcal{A} ; \exists B \in \mathcal{A} \text{ tale che } M \subseteq B, \mu(B) = 0\}$$

e la misura  $\mu_0$  è definita ponendo

$$\mu_0(A \cup M) = \mu(A)$$

per ogni  $A \in \mathcal{A}$  ed ogni insieme  $M$ , sottoinsieme di qualche  $B \in \mathcal{A}$ , con  $\mu(B) = 0$ .

Osserviamo ancora che, se  $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$  è il completamento di  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , allora  $\mu_0$  è l'unica misura su  $\mathcal{A}_0$  prolungamento di  $\mu$ ; ciò segue subito dalla proprietà iii). Pertanto si ha pure la seguente proposizione, che suggerisce un'ulteriore possibile definizione del completamento di uno spazio di misura.

**Proposizione 8.2.2.** *Il completamento di uno spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  coincide con lo spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ , in cui la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}_0$  è data dalla (8.2.1) e la misura  $\mu_0$  è l'unica misura su  $\mathcal{A}_0$  che prolunga  $\mu$ .*

### 8.3. $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$ è il completamento di $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$ .

Il successivo Teorema 8.3.1 precisa il legame che c'è tra gli spazi di misura  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$  e  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$ .

Ricordiamo che  $\mathcal{L}_h \supseteq \mathcal{B}_h$  e  $m_h|_{\mathcal{B}_h} = \lambda_h$ . Ricordiamo inoltre che, come abbiamo già anticipato, dimostreremo in seguito che  $\mathcal{L}_h \supsetneq \mathcal{B}_h$ .

**Teorema 8.3.1.**  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$  è il completamento di  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $\mathcal{L}_h \supseteq \mathcal{B}_h$  e  $m_h|_{\mathcal{B}_h} = \lambda_h$ , per la Proposizione 8.2.2 è sufficiente dimostrare che  $\mathcal{L}_h$  coincide con la  $\sigma$ -algebra

$$(8.3.1) \quad \mathcal{B}_{h,0} = \{D \cup M : D \in \mathcal{B}_h ; \exists B \in \mathcal{B}_h \text{ tale che } M \subseteq B, \lambda_h(B) = 0\} .$$

Ma poiché, in aggiunta alle precedenti informazioni ( $\mathcal{L}_h \supseteq \mathcal{B}_h$  e  $m_h|_{\mathcal{B}_h} = \lambda_h$ ), sappiamo anche che lo spazio di misura  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$  è completo, per la proprietà iii), di cui gode il completamento di uno spazio di misura, abbiamo che  $\mathcal{L}_h \supseteq \mathcal{B}_{h,0}$ . Dobbiamo quindi dimostrare soltanto che vale pure l'inclusione contraria.

Sia  $E \in \mathcal{L}_h$  e supponiamo, in un primo momento, che l'insieme  $E$  sia limitato. Poiché

$$m_h(E) = \sup\{m_h(C) : C \in \mathcal{C}_h^*, C \subseteq E\} = \inf\{m_h(A) : A \in \mathcal{A}_h^*, A \supseteq E\}$$

esistono due successioni  $\{C_n\}$  e  $\{A_n\}$ , di insiemi chiusi e limitati la prima e di insiemi aperti e limitati la seconda, tali da aversi, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$C_n \subseteq E \subseteq A_n ,$$

$$m_h(C_n) > m_h(E) - \frac{1}{n} , \quad m_h(A_n) < m_h(E) + \frac{1}{n} .$$

Considerati allora i due insiemi boreliani

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n , \quad P = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

risulta

$$(8.3.2) \quad D \subseteq E \subseteq P ,$$

nonché, per la monotonia di  $m_h$ ,

$$m_h(E) - \frac{1}{n} \leq m_h(D) \leq m_h(E) \leq m_h(P) \leq m_h(E) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$m_h(D) = m_h(E) = m_h(P) .$$

Dalla (8.3.2) segue che

$$E = D \cup (E \setminus D) ,$$

$$E \setminus D \subseteq P \setminus D .$$

Abbiamo quindi espresso l'insieme  $E$  come unione di un insieme  $D \in \mathcal{B}_h$  e di un insieme  $M = E \setminus D$  che è sottoinsieme di un insieme  $B = P \setminus D \in \mathcal{B}_h$  tale che

$$\lambda_h(B) = \lambda_h(P) - \lambda_h(D) = m_h(P) - m_h(D) = 0 .$$

Per rimuovere l'ipotesi che l'insieme  $E$  sia limitato ragioniamo nel seguente modo. Posto

$$E_n = E \cap [-n, n]^h \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

abbiamo che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , l'insieme  $E_n$  è un insieme limitato e misurabile secondo Lebesgue, quindi, per quanto già dimostrato, esistono  $D_n, B_n \in \mathcal{B}_h$ , con  $\lambda_h(B_n) = 0$ , e  $M_n \subseteq B_n$  tali che

$$E_n = D_n \cup M_n .$$

SI ha allora

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right) ,$$

quindi, anche in questo caso, l'insieme  $E$  è unione,  $E = D \cup M$ , di un insieme

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{B}_h$$

e di un insieme

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n ,$$

sottoinsieme di un insieme

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}_h$$

tale che  $\lambda_h(B) = 0$  (per la  $\sigma$ -subadditività di  $\lambda_h$ ).

È utile osservare esplicitamente che il teorema appena dimostrato implica, in particolare, il seguente corollario.

**Corollario 8.3.1.** *Ogni insieme misurabile secondo Lebesgue è unione disgiunta di un boreliano e di un insieme misurabile secondo Lebesgue, avente misura nulla.*

*Dimostrazione.* Sia  $E \in \mathcal{L}_h$ . Allora  $E$  appartiene (Teorema 8.3.1 e Proposizione 8.3.1) alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}_{h,0}$ , quindi, tenendo presente la completezza di  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$ , possiamo asserire che

$$E = D \cup M ,$$

con  $D \in \mathcal{B}_h$  e  $M \in \mathcal{L}_h$ ,  $m_h(M) = 0$ . Per ottenere la tesi basta allora scrivere

$$E = D \cup (M \setminus D)$$

e osservare che, per la completezza di  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, m_h)$  e la monotonia di  $m_h$ , anche  $M \setminus D \subseteq M$  è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla.

Dal Teorema 8.3.1 discende anche il

**Teorema 8.3.2.** (Unicità della misura di Lebesgue su  $\mathcal{L}_h$ ). *La misura di Lebesgue  $m_h$  è l'unica misura  $\mu$  definita sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{L}_h$  che prolunga la misura elementare, cioè tale che*

$$(8.3.3) \quad \mu(I) = \text{mis}_{e,h}(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}_h .$$

*Dimostrazione.* Infatti, se una misura  $\mu$ , definita su  $\mathcal{L}_h$ , verifica la (8.3.3), allora, per il teorema di unicità della misura secondo Lebesgue su  $\mathcal{B}_h$ , si ha

$$\mu|_{\mathcal{B}_h} = \lambda_h .$$

A questo punto il Teorema 8.3.1 e la Proposizione 8.3.2 implicano che  $\mu = m_h$ .

## 8.4. La definizione assiomatica della misura di Lebesgue.

Nel Cap. 4 abbiamo introdotto, procedendo in maniera costruttiva, la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{L}_h$  degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e la misura secondo Lebesgue  $m_h$ .

Alla luce della teoria svolta nei capitoli successivi possiamo adesso indicare un altro modo, di tipo assiomatico, di definire la misura di Lebesgue.

Il punto di partenza è sempre la misura elementare  $\text{mis}_{e,h}$  degli intervalli chiusi. Grazie al teorema di esistenza ed unicità della misura di Borel  $\mu_F$  su  $\mathbb{R}^h$  associata ad un'arbitraria funzione di distribuzione  $F$  su  $\mathbb{R}^h$  ed alle osservazioni fatte a proposito delle funzioni di distribuzione continue, considerando il caso particolare della funzione di distribuzione

$$F(x_1, \dots, x_h) = x_1 \cdot \dots \cdot x_h \quad \forall x = (x_1, \dots, x_h) \in \mathbb{R}^h$$

si perviene, come sappiamo, al seguente enunciato:

*“Esiste una ed una sola misura  $\lambda_h$ , definita sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}_h$  degli insiemi di Borel di  $\mathbb{R}^h$ , verificante la condizione di prolungare la misura elementare, cioè tale che*

$$\lambda_h(I) = \text{mis}_{e,h}(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}_h .”$$

Si viene così a determinare lo spazio di misura  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$ .

Denotato allora con  $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_{h,0}, \lambda_{h,0})$  il completamento di tale spazio di misura, possiamo assumere, per definizione, che i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^h$  misurabili secondo Lebesgue siano gli insiemi appartenenti alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}_{h,0}$  e, sempre per definizione, chiamare misura secondo Lebesgue (in  $\mathbb{R}^h$ ) la misura  $\lambda_{h,0}$ .

Il Teorema 8.3.1 assicura che i concetti di misurabilità e di misura secondo Lebesgue, che si ottengono mediante il procedimento sopra indicato, sono la stessa cosa di quelli definiti in precedenza.

Naturalmente, quando si sceglie di seguire la via assiomatica per introdurre la misura di Lebesgue, alcuni fatti, che nell'impostazione costruttiva sono veri per definizione, diventano delle proprietà che occorre dimostrare. Un esempio significativo in tal senso è dato dal fatto che un insieme limitato  $E \subseteq \mathbb{R}^h$  è misurabile secondo Lebesgue se e soltanto se gli insiemi numerici delle misure degli insiemi chiusi contenuti in  $E$  e degli aperti limitati contenuti in  $E$  sono contigui.