7. Funzioni di distribuzione e misure di Borel.

7.1. Funzioni di distribuzione e misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Una notevole applicazione del teorema di esistenza ed unicità del prolungamento di una premisura σ-finita è data dal teorema seguente, che è importante anche nella Teoria della probabilità.

Teorema 7.1.1. *Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente e continua da sinistra, cioè:*

i) $F(x_1) \leq F(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,,\ x_1 < x_2\ ;$

ii) $\lim_{x \to c-} F(x) = F(c) \qquad \forall c \in \mathbb{R}\ .$

Esiste, ed è unica, una misura μ su $\mathcal{B}_1$ tale che

$$\mu([a,b[\,) \;=\; F(b) - F(a) \qquad \forall\, [a,b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \tag{7.1.1}$$

(ricordiamo che $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ indica la famiglia degli intervalli semiaperti a destra di $\mathbb{R}$).

La dimostrazione del Teorema 7.1.1 si articola in vari punti e fa riferimento, per alcune delle affermazioni in essa contenute, ad una serie di lemmi tecnici riportati nell'appendice al paragrafo.

Dimostrazione del Teorema 7.1.1.

1. Per ogni intervallo $I = [a,b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ indichiamo con $\delta_F(I)$ la quantità

$$\delta_F(I) \;=\; F(b) - F(a) \quad (^1)\ . \tag{7.1.2}$$

Si verifica (Lemma 7.1.1) che l'applicazione

$$\delta_F \,:\, \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \;\to\; \mathbb{R}\ , \tag{7.1.3}$$

che così si ottiene, è finitamente additiva, cioè, se $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ sono a due a due disgiunti e tali che $I_1 \cup \ldots \cup I_k = I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, allora

$$\delta_F(I) \;=\; \delta_F(I_1) + \ldots + \delta_F(I_k)\ .$$

(^{1}) Osserviamo che la $\delta_F(I)$ è ben definita. Infatti, se $I \neq \emptyset$, gli estremi a e b dell'intervallo I sono univocamente determinati (da $I = [a,b[$ e $I = [c,d[$ segue necessariamente $a = c$ e $b = d$). Se invece $I = \emptyset$, allora, anche se l'intervallo I è rappresentabile nella forma $[a,b[$ in infiniti modi diversi (precisamente $I = [a,a[\,$, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$) la (7.1.2) fornisce sempre $\delta_F(I) = 0$, indipendentemente dalla rappresentazione di I che si adopera.

Si verifica inoltre (Lemma 7.1.2) che l'applicazione (7.1.3) gode della seguente proprietà di approssimazione:

per ogni $I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ *ed ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ *tale che*

$$\overline{J} \subseteq I \quad , \quad \left|\delta_F(J) - \delta_F(I)\right| < \varepsilon \quad .$$

2. Indichiamo con $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ la famiglia di insiemi avente come elementi le unioni finite di intervalli appartenenti a $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$.

Osserviamo che è

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}) \;=\; \mathcal{B}_1 \quad .$$

Infatti ogni insieme $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ appartiene a $\mathcal{B}_1$ (in quanto unione finita di insiemi appartenenti a $\mathcal{B}_1$), pertanto si ha

$$\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \;\subseteq\; \mathcal{B}_1$$

e quindi

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}) \;\subseteq\; \mathcal{B}_1 \;.$$

D'altra parte si ha pure (ovviamente)

$$\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \;\supseteq\; \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$$

e quindi

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}) \;\supseteq\; \mathcal{A}(\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}) \;=\; \mathcal{B}_1 \;.$$

Si dimostra (Lemma 7.1.3) che le famiglie di insiemi $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ e $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ hanno le seguenti proprietà:

a) $I, J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \implies I \cap J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$;

b) $I, J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \implies I \setminus J$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti;*

c) $I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}\,,\ A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \implies I \setminus A$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti;*

d) *ogni insieme* $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti.*

Usando tali proprietà si verifica (Lemma 7.1.4) che $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ *è un anello in* $\mathbb{R}$.

3. A questo punto la finita additività della funzione di insieme δ_F e la precedente proprietà d) permettono di provare che *esiste, ed è unico, un contenuto* ν_F *sull'anello* $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ *tale che*

$$\nu_F(I) \;=\; F(b) - F(a) \qquad \forall I = [a,b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \;. \tag{7.1.4}$$

Ovviamente, il contenuto ν_F si definisce "per additività" nel modo seguente: dato un insieme $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$, lo si rappresenta (proprietà d)) nella forma $A = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, con

$I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti, e si pone $\nu_F(A) = \delta_F(I_1) + \ldots + \delta_F(I_k)$. Si dimostra che la funzione ν_F è ben definita e soddisfa ai requisiti richiesti (in particolare, il fatto che sia $\nu_F \geq 0$ segue dall'ipotesi i)). Per i dettagli di questa dimostrazione rinviamo al Lemma 7.1.5.

Anche il contenuto ν_F gode (Lemma 7.1.6) di una proprietà di approssimazione analoga a quella della funzione d'insieme (7.1.3), precisamente:

per ogni $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ tale che

$$\overline{B} \subseteq A \quad , \quad |\nu_F(B) - \nu_F(A)| < \varepsilon \quad .$$

4. Proviamo adesso che *il contenuto ν_F è una premisura.*

Poiché ν_F è finito (ogni $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ è un insieme limitato e quindi contenuto in qualche intervallo $I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, pertanto $\nu_F(A) \leq \nu_F(I) = \delta_F(I) < +\infty$), è sufficiente provare che ν_F ha la proprietà di $\emptyset$-continuità.

Notiamo che una formulazione equivalente della proprietà di $\emptyset$-continuità (per un generico contenuto μ su un anello $\mathcal{R}$) è la seguente:

β_0^*) *per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, con $\mu(A_1) < +\infty$, tale che $A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) > 0$, risulta*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \quad .$$

Dimostriamo che il contenuto ν_F ha la proprietà β_0^*). Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ tale che

$$A_n \supseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} \nu_F(A_n) = \lambda > 0 \quad .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la proprietà di approssimazione enunciata nel punto 3, esiste $B_n \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ tale che $\overline{B_n} \subseteq A_n$ e

$$\nu_F(B_n) > \nu_F(A_n) - \lambda 2^{-n} \quad .$$

Poniamo

$$C_n = B_1 \cap \ldots \cap B_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed osserviamo che si ha

$$C_n \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \quad , \quad C_n \supseteq C_{n+1} \quad , \quad \overline{C_n} \subseteq \overline{B_n} \subseteq A_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

Si ha inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_F(C_n) > \nu_F(A_n) - \lambda(1 - 2^{-n}) \quad . \tag{7.1.5}$$

Per verificare ciò procediamo per induzione. Per $n = 1$ si ha

$$\nu_F(C_1) \;=\; \nu_F(B_1) \;>\; \nu_F(A_1) \;-\; \lambda\, 2^{-1} \;=\; \nu_F(A_1) \;-\; \lambda\,(1 - 2^{-1})\;,$$

quindi la (7.1.5) è vera. Supponiamo che la (7.1.5) sia vera per l'indice n e dimostriamo che essa è vera pure per l'indice $n + 1$. Si ha infatti

$$\nu_F(C_{n+1}) \;=\; \nu_F(C_n \cap B_{n+1}) \;=\; \nu_F(C_n) + \nu_F(B_{n+1}) - \nu_F(C_n \cup B_{n+1}) \;\geq$$

(poiché $C_n \cup B_{n+1} \subseteq A_n \cup A_{n+1} = A_n$)

$$\geq\; \nu_F(C_n) + \nu_F(B_{n+1}) - \nu_F(A_n) \;>$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$>\; \nu_F(A_n) - \lambda\,(1 - 2^{-n}) + \nu_F(B_{n+1}) - \nu_F(A_n) \;>$$

(per la scelta dell'insieme B_{n+1})

$$>\; -\lambda\,(1 - 2^{-n}) + \nu_F(A_{n+1}) - \lambda\, 2^{-(n+1)} \;=$$

$$=\; \nu_F(A_{n+1}) - \lambda\,(1 - 2^{-n} + 2^{-(n+1)}) \;=\; \nu_F(A_{n+1}) - \lambda\,(1 - 2^{-(n+1)}) \;.$$

Dalla (7.1.5) segue che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\nu_F(C_n) \;>\; \nu_F(A_n) - \lambda\,(1 - 2^{-n}) \;\geq\; \lambda - \lambda\,(1 - 2^{-n}) \;=\; \lambda\, 2^{-n} \;>\; 0$$

e quindi è $C_n \neq \emptyset$. Possiamo pertanto applicare alla successione di insiemi $\{\overline{C_n}\}$ il teorema di Cantor sulle successioni non crescenti di insiemi sequenzialmente compatti, non vuoti, di uno spazio metrico ([2]); concludiamo che è

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} \;\neq\; \emptyset$$

e quindi, a maggior ragione,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \;\neq\; \emptyset\;.$$

([2]) **Teorema** (di Cantor). *Sia $\{K_n\}$ una successione di sottoinsiemi sequenzialmente compatti di uno spazio metrico (S, d) tale che $K_n \supseteq K_{n+1}$ e $K_n \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta allora*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \;\neq\; \emptyset\;.$$

5. *La premisura ν_F è σ-finita.* Infatti ν_F è una premisura finita ed esiste una successione di insiemi appartenenti all'anello $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ (ad esempio la successione di intervalli $\{[-n,n[\}$) tale che $[-n,n[\uparrow \mathbb{R}$.

6. A questo punto, per completare la dimostrazione, basta osservare che una misura μ sulla σ-algebra $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}(\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}})$ verifica la condizione (7.1.1) se e soltanto essa è un prolungamento della premisura ν_F e applicare il teorema di esistenza ed unicità del prolungamento di una premisura σ-finita (Teorema 5.4.4) alla premisura ν_F.

Osservazione 7.1.1. È evidente che in tutto ciò che precede il ruolo ricoperto dagli intervalli semiaperti a destra può essere assegnato, facendo le dovute modifiche, agli intervalli semiaperti a sinistra. Si perviene in questo modo al seguente teorema, "gemello" del Teorema 7.1.1.

Teorema 7.1.1$'$. *Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente e continua da destra, cioè:*

i$'$) $G(x_1) \leq G(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,,\ x_1 < x_2\ ;$

ii$'$) $\displaystyle\lim_{x\to c+} G(x) = G(c) \qquad \forall c \in \mathbb{R}\ .$

Esiste, ed è unica, una misura μ su $\mathcal{B}_1$ tale che

$$\mu(\,]a,b]) \;=\; G(b) - G(a) \qquad \forall\,]a,b]\,\in \mathcal{I}_1^{\mathrm{s}}\ . \tag{7.1.1$'$}$$

Le funzioni F verificanti le ipotesi del Teorema 7.1.1 (o, secondo altri Autori, le funzioni G verificanti le ipotesi del Teorema 7.1.1$'$) prendono il nome di "funzioni di distribuzione" su $\mathbb{R}$.

Definizione 7.1.1. (*Funzione di distribuzione su* $\mathbb{R}$). Si chiama *funzione di distribuzione su* $\mathbb{R}$ ogni funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non decrescente e continua da sinistra, cioè tale che:

i) $F(x_1) \leq F(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,,\ x_1 < x_2\ ;$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to c-} F(x) = F(c) \qquad \forall c \in \mathbb{R}\ .$

Notiamo che la misura μ che figura nell'enunciato del Teorema 7.1.1 è una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}_1$ che assume valore finito su ogni boreliano limitato (se $L \in \mathcal{B}_1$ è un insieme limitato, allora L è contenuto in qualche intervallo $I = [a,b[\,\in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ e quindi si ha

$$\mu(L) \;\leq\; \mu(I) \;=\; F(b) \;-\; F(a) \;<+\infty \quad)\ .$$

Chiameremo "misura di Borel su $\mathbb{R}$" ogni misura avente le predette caratteristiche.

Definizione 7.1.2. (*Misura di Borel su* $\mathbb{R}$). Si chiama *misura di Borel su* $\mathbb{R}$ ogni misura μ, definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}_1$ dei boreliani di $\mathbb{R}$, tale che

$$\mu(L) < +\infty$$

per ogni insieme limitato $L \in \mathcal{B}_1$.

Notazioni. Indichiamo con $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{M}_1$, rispettivamente, l'insieme delle funzioni di distribuzione su $\mathbb{R}$ e l'insieme delle misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Inoltre, per ogni $F \in \mathbb{F}_1$, indichiamo con μ_F l'unica misura $\mu \in \mathbb{M}_1$ verificante la (7.1.1).

Introdotte le precedenti notazioni, possiamo dire che grazie al Teorema 7.1.1 resta individuata un'applicazione

$$F \;\to\; \mu_F \tag{7.1.6}$$

da $\mathbb{F}_1$ in $\mathbb{M}_1$.

Studiamo l'iniettività e la surgettività di tale applicazione.

Osserviamo che, date due funzioni di distribuzione $F, F_1 \in \mathbb{F}_1$, si ha, ovviamente, la catena di equivalenze

$$\mu_F \;=\; \mu_{F_1} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad F(b) \,-\, F(a) \;=\; F_1(b) \,-\, F_1(a) \quad \forall\, [a,b[\in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad F(b) \,-\, F_1(b) \;=\; F(a) \,-\, F_1(a) \quad \forall a,b \in \mathbb{R},\ a < b\ ,$$

dunque sussiste la seguente proposizione.

Proposizione 7.1.1. *Siano F, F_1 due funzioni di distribuzione su $\mathbb{R}$. Risulta $\mu_F = \mu_{F_1}$ se e soltanto se la differenza $F - F_1$ è una funzione costante.*

Conseguentemente, l'applicazione (7.1.6) non è iniettiva, ma, se si considera in $\mathbb{F}_1$ la relazione di equivalenza $\sim$ definita ponendo

$$F \,\sim\, F_1 \quad \Longleftrightarrow \quad F - F_1 \ \text{ è una funzione costante}$$

e si indica, per ogni $F \in \mathbb{F}_1$, con $[F]$ la classe di equivalenza di F ([3]), si ha che l'applicazione "indotta" dalla (7.1.6) sull'insieme quoziente, cioè l'applicazione

$$[F] \;\to\; \mu_F \quad ,$$

dall'insieme quoziente $\mathbb{F}_1/_\sim$ in $\mathbb{M}_1$, è iniettiva.

Tenuto conto dei precedenti risultati (Teorema 7.1.1 e Proposizione 7.1.1), ogni qual volta che $F \in \mathbb{F}_1$ e $\mu \in \mathbb{M}_1$ sono tali che $\mu = \mu_F$, si suole esprimere tale circostanza dicendo che "*μ è* la *misura di Borel associata a F*", ovvero, reciprocamente, che "*F è* una *funzione di distribuzione di μ*".

([3]) È ovvio che, se $F \in \mathbb{F}_1$, anche tutte le funzioni del tipo $F + k$, k costante, appartengono a $\mathbb{F}_1$; se ne deduce che la classe di equivalenza $[F]$ ha come elementi tutte e sole le funzioni $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo $H = F + k$, k costante.

Per quanto concerne la questione della surgettività dell'applicazione (7.1.6), la risposta è affermativa. Si ha infatti il seguente risultato.

Teorema 7.1.2. *Data una qualsiasi $\mu \in \mathbb{M}_1$, esiste una funzione di distribuzione $F \in \mathbb{F}_1$ tale che $\mu_F = \mu$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita, a partire dalla misura μ, nel modo seguente:

$$F(x) \;=\; \begin{cases} \mu([0,x[) & \text{se } x \geq 0 \ , \\ -\mu([x,0[) & \text{se } x \leq 0 \ . \end{cases}$$

Utilizzando le proprietà di finita additività e di sottrattività della misura μ è facile verificare che risulta

$$F(b) - F(a) \;=\; \mu([a,b[) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R},\ a < b \ (^4) \ . \tag{7.1.7}$$

Ne segue che la funzione F è non decrescente e che per dimostrare la tesi basta provare soltanto che F è anche continua dalla sinistra (infatti, una volta provato ciò, si ha che la funzione F appartiene a $\mathbb{F}_1$ e la (7.1.7) implica, ovviamente, che è $\mu_F = \mu$).

Proviamo che F è continua dalla sinistra. Osserviamo che la non decrescenza di F implica che il limite

$$\lim_{x \to c-} F(x)$$

esiste (finito) per ogni $c \in \mathbb{R}$ e conseguentemente si ha, per un teorema di Analisi 1,

$$\lim_{x \to c-} F(x) \;=\; \lim_{n \to \infty} F(c_n) \ ,$$

essendo $\{c_n\}$ una qualsiasi successione di numeri reali minori di c, convergente a c. Tenuto conto di ciò, si ha, se $c \leq 0$, grazie alla proprietà di continuità verso il basso,

$$\lim_{x \to c-} F(x) \;=\; \lim_{n \to \infty} F(c - \tfrac{1}{n}) \;=\; \lim_{n \to \infty} \big(-\mu([c - \tfrac{1}{n}, 0[\,)\big) \;=\; -\mu([c,0[\,) \;=\; F(c)$$

e, se $c > 0$, per la proprietà di continuità verso l'alto,

$$\lim_{x \to c-} F(x) \;=\; \lim_{n \to \infty} F(c - \tfrac{c}{n}) \;=\; \lim_{n \to \infty} \mu([0, c - \tfrac{c}{n}[\,) \;=\; \mu([0,c[\,) \;=\; F(c) \ .$$

Ciò completa la dimostrazione.

---

(4) Conviene distinguere i tre casi $b \leq 0$, $a < 0 < b$ e $a \geq 0$. Ad esempio, se $b \leq 0$, si ha

$$\mu([a,b[) \;=\; \mu([a,0[\setminus [b,0[) \;=\; \mu([a,0[) - \mu([b,0[) \;=\; -F(a) + F(b) \ ,$$

mentre, se $a < 0 < b$, risulta

$$\mu([a,b[) \;=\; \mu([a,0[\cup [0,b[) \;=\; \mu([a,0[) + \mu([0,b[) \;=\; -F(a) + F(b) \ .$$

Osservazione 7.1.2. Se μ è una misura di Borel su $\mathbb{R}$ e F è una sua funzione di distribuzione, è possibile esprimere esplicitamente tramite la F i valori $\mu(J)$ che la misura μ assume in corrispondenza di tutti gli intervalli J di $\mathbb{R}$, di qualunque tipo essi siano, quindi non soltanto di quelli appartenenti a $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$. Ciò si ricava dalla successiva Proposizione 7.1.2. È utile precisare preliminarmente il simbolismo adottato.

Notazioni. Sia F una funzione di distribuzione su $\mathbb{R}$. Poiché F è non decrescente il limite destro

$$\lim_{x\to c+} F(x)$$

esiste finito qualunque sia $c \in \mathbb{R}$. Indicheremo per brevità tale limite con il simbolo $F(c+)$.

Anche i limiti

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} F(x)$$

esistono (finiti o no); essi saranno indicati, rispettivamente, con i simboli $F(-\infty)$ e $F(+\infty)$.

Proposizione 7.1.2. *Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ e sia F una funzione di distribuzione di μ.*

Si ha, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$\mu([a,b]) \;=\; F(b+) - F(a) \quad , \quad \mu(]a,b]) \;=\; F(b+) - F(a+) \tag{7.1.8}$$

e, se $a < b$,

$$\mu(]a,b[) \;=\; F(b) - F(a+) \quad . \tag{7.1.9}$$

Si ha inoltre, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\mu([a,+\infty[) \;=\; F(+\infty) - F(a) \quad , \quad \mu(]a,+\infty[) \;=\; F(+\infty) - F(a+) \quad , \tag{7.1.10}$$

$$\mu(]-\infty,a[) \;=\; F(a) - F(-\infty) \quad , \quad \mu(]-\infty,a]) \;=\; F(a+) - F(-\infty) \quad . \tag{7.1.11}$$

Si ha infine

$$\mu(\mathbb{R}) \;=\; F(+\infty) - F(-\infty) \quad . \tag{7.1.12}$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che, per la (7.1.1) e la proprietà di continuità verso il basso di μ, per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mu(\{c\}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu([c, c+\tfrac{1}{n}[) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left[F(c+\tfrac{1}{n}) - F(c)\right] \;=\; F(c+) - F(c) \quad .$$

A questo punto, usando la (7.1.1) e le proprietà di finita additività e di sottrattività di μ, è facile provare che valgono la (7.1.8) e la (7.1.9). Si ha infatti, ad esempio,

$$]a,b] \;=\; ([a,b[\setminus \{a\}) \cup \{b\}$$

e quindi

$$\mu(]a,b]) \;=\; \mu([a,b[) - \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) \;=$$

$$=\; F(b) - F(a) - (F(a+) - F(a)) + F(b+) - F(b) \;=\; F(b+) - F(a+) \quad .$$

Per quanto riguarda le (7.1.10) osserviamo che è

$$[a, a+n[\,\uparrow\, [a, +\infty[\quad , \quad]a, +\infty[\, = \,[a, +\infty[\setminus \{a\}$$

e quindi, usando la continuità verso l'alto e la sottrattività, si ha

$$\mu([a, +\infty[\,) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu([a, a+n[\,) \;=$$

$$=\; \lim_{n\to\infty} [F(a+n) - F(a)] \;=\; F(+\infty) - F(a) \quad ,$$

$$\mu(]a, +\infty[) \;=\; \mu([a, +\infty[\setminus \{a\}) \;=\; F(+\infty) - F(a) - (F(a+) - F(a)) \;=\; F(+\infty) - F(a+) \,.$$

Analogamente si provano le (7.1.11). Infine si ha, per la continuità verso l'alto,

$$\mu(\mathbb{R}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu([-n, n[\,) \;=\; \lim_{n\to\infty} [F(n) - F(-n)] \;=\; F(+\infty) - F(-\infty) \quad .$$

Osservazione 7.1.3. La (7.1.12) implica che, se μ è una misura di Borel su $\mathbb{R}$ e F è una sua qualsiasi funzione di distribuzione, la misura μ è finita se e soltanto se i limiti

$$F(-\infty) \;=\; \lim_{x\to-\infty} F(x) \quad , \quad F(+\infty) \;=\; \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

sono entrambi finiti.

Di conseguenza, se μ è una misura di Borel finita su $\mathbb{R}$, fra tutte le funzioni di distribuzione di μ ve n'è una – che indicheremo con F_μ – "privilegiata" rispetto alle altre in quanto soddisfa ai seguenti requisiti di "normalizzazione":

$$\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) \;=\; 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} F_\mu(x) \;=\; \mu(\mathbb{R}) \quad ;$$

per rendersi conto dell'esistenza di F_μ basta osservare che, se F è una qualunque funzione di distribuzione di μ, allora la funzione di distribuzione di μ che si ottiene da F sottraendo la costante $F(-\infty)$ ha i requisiti sopra menzionati. La legge di F_μ si esprime direttamente tramite la μ; si ha infatti, dalla prima delle (7.1.11),

$$F_\mu(x) \;=\; \mu(]-\infty, x[) \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

Osserviamo ancora che la restrizione dell'applicazione (7.1.6) al sottoinsieme $\mathbb{F}_1^*$ di $\mathbb{F}_1$ costituito da tutte le funzioni di distribuzione del tipo F_μ, cioè dalle funzioni di distribuzione F tali che $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) \in \mathbb{R}$, è una bigezione tra $\mathbb{F}_1^*$ e l'insieme $\mathbb{M}_1^*$ delle misure di Borel finite su $\mathbb{R}$; l'inversa di tale bigezione è l'applicazione $\mu \to F_\mu$.

Quanto detto in precedenza giustifica la consuetudine di dire, nel caso di una misura di Borel finita μ, che la F_μ è <u>la</u> funzione di distribuzione di μ.

Osservazione 7.1.4. Le considerazioni svolte nella precedente osservazione si applicano in particolare alle misure di probabilità P su $\mathcal{B}_1$, cioè alle misure P su $\mathcal{B}_1$ tali che $P(\mathbb{R}) = 1$. In questo caso le corrispondenti funzioni di distribuzione F_P sono tutte e sole le $F \in \mathbb{F}_1^*$ che soddisfano all'ulteriore requisito $F(+\infty) = 1$.

La successiva Proposizione 7.1.3 sarà utile per la cosiddetta "definizione assiomatica" della misura di Lebesgue.

Proposizione 7.1.3. *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione non decrescente e continua e sia* μ *una misura su* $\mathcal{B}_1$.

Le seguenti affermazioni (a) - (d) *sono equivalenti:*

(a) $\mu([a,b[\,) = F(b) - F(a) \quad \forall\ [a,b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$;

(b) $\mu([a,b]) = F(b) - F(a) \quad \forall\ [a,b] \in \mathcal{I}_1$;

(c) $\mu(\,]a,b]) = F(b) - F(a) \quad \forall\ ]a,b] \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{s}}$;

(d) $\mu(\,]a,b[\,) = F(b) - F(a) \quad \forall\ ]a,b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{o}}$.

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) . Qualunque sia $[a,b] \in \mathcal{I}_1$ si ha

$$[a, b + \tfrac{1}{n}[\ \downarrow\ [a,b]$$

e quindi, per la proprietà di continuità verso il basso di μ,

$$\mu([a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mu([a, b + \tfrac{1}{n}[\,) = \lim_{n\to\infty} \left[F(b + \tfrac{1}{n}) - F(a)\right] = F(b) - F(a) \ .$$

(b) $\Longrightarrow$ (c) . Qualunque sia $]a,b] \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{s}}$, $]a,b] \neq \emptyset$, fissato $0 < h \leq b - a$, si ha

$$[a + \tfrac{h}{n}, b]\ \uparrow\ ]a,b]$$

e quindi, per la proprietà di continuità verso l'alto,

$$\mu(\,]a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mu([a + \tfrac{h}{n}, b]) = \lim_{n\to\infty} \left[F(b) - F(a + \tfrac{h}{n})\right] = F(b) - F(a) \ .$$

Ovviamente, se $]a,b] = \emptyset$, si ha $a = b$ e quindi è vero che $\mu(\,]a,b]) = F(b) - F(a)$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) . Sia $]a,b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{o}}$. Come per la precedente implicazione possiamo supporre senz'altro che sia $]a,b[\, \neq \emptyset$. Fissato $0 < h \leq b - a$, si ha

$$]a, b - \tfrac{h}{n}]\ \uparrow\ ]a,b[$$

e quindi, per la proprietà di continuità verso l'alto,

$$\mu(\,]a,b[\,) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(\,]a, b-\tfrac{h}{n}]) \;=\; \lim_{n\to\infty} \big[F(b-\tfrac{h}{n}) - F(a)\big] \;=\; F(b) - F(a) \quad .$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) . Si ha

$$]a-\tfrac{1}{n}, b[\,\downarrow\, [a,b[$$

e quindi (continuità verso il basso)

$$\mu([a,b[\,) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(\,]a-\tfrac{1}{n}, b[\,) \;=\; \lim_{n\to\infty} \big[F(b) - F(a-\tfrac{1}{n})\big] \;=\; F(b) - F(a) \quad .$$

Appendice al n. 7.1.

Lemma 7.1.1. *L'applicazione* $\delta_F : \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$*, definita dalla* (7.1.2)*, è finitamente additiva, cioè: se* $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ *sono a due a due disgiunti e tali che* $I_1 \cup \ldots \cup I_k = I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$*, allora*

$$\delta_F(I) \;=\; \delta_F(I_1) \,+\, \ldots \,+\, \delta_F(I_k) \;. \tag{7.1.13}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero k degli intervalli $I_1, \ldots, I_k$. Per $k = 1$ la (7.1.13) è ovviamente verificata. Supponiamo che l'asserto sia vero per l'indice k e dimostriamo che è vero pure per $k+1$. Siano $I_1, \ldots, I_k, I_{k+1} \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti e tali che

$$I_1 \cup \ldots \cup I_k \cup I_{k+1} \;=\; I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \;.$$

Proviamo che

$$\delta_F(I) \;=\; \delta_F(I_1) \,+\, \ldots \,+\, \delta_F(I_k) + \delta_F(I_{k+1}) \;.$$

Ciò è ovvio se $I = \emptyset$. Supponiamo quindi $I \neq \emptyset$ e poniamo $I = [a,b[$. Uno solo degli intervalli $I_1, \ldots, I_k, I_{k+1}$ contiene il punto a; supponiamo che sia $a \in I_1$; ne segue che $I_1 = [a,c[$ con $c \leq b$ e $[c,b[= I_2 \cup \ldots \cup I_{k+1}$; si ha allora, per l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}\delta_F(I) \;&=\; F(b) - F(a) \;=\; F(b) - F(c) + F(c) - F(a) \;=\delta_F([c,b[\,) + \delta_F(I_1) \;=\\ &=\; \delta_F(I_1) + \delta_F([c,b[\,) \;=\; \delta_F(I_1) \,+\, \delta_F(I_2) \,+\, \ldots \,+\, \delta_F(I_{k+1}) \;.\end{aligned}$$

Lemma 7.1.2. *Per ogni* $I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ *ed ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ *tale che*

$$\overline{J} \subseteq I \quad , \quad \big|\delta_F(J) - \delta_F(I)\big| < \varepsilon \quad .$$

Dimostrazione. Se $I = \emptyset$ la tesi si ottiene prendendo $J = \emptyset$. Se $I = [a,b[\, \neq \emptyset$ l'intervallo J si trova tra gli intervalli del tipo $[a,c[$ con $c < b$; infatti, dato che F è continua dalla sinistra, si ha

$$\lim_{x\to b-} \delta_F([a,x[\,) \;=\; \delta_F([a,b[\,) \;,$$

quindi esiste c, $a \leq c < b$, tale che

$$\Big|\, \delta_F([a,c[\,) \,-\, \delta_F([a,b[\,) \,\Big| \;<\; \varepsilon \;.$$

Osservazione 7.1.5. Notiamo che per il Lemma 7.1.1 non si è utilizzata nessuna delle due ipotesi i) e ii), mentre per il Lemma 7.1.2 è servita soltanto la ii). I due lemmi che seguono riguardano esclusivamente le famiglie di insiemi $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ e $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ e pertanto sono indipendenti dalle ipotesi sulla funzione F. L'ipotesi i) sarà utilizzata per il Lemma 7.1.5, mentre per il successivo Lemma 7.1.6 occorreranno entrambe le ipotesi i) e ii).

Lemma 7.1.3. *Le famiglie di insiemi* $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ *e* $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ *hanno le seguenti proprietà:*

a) $I, J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \implies I \cap J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$;

b) $I, J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \implies I \setminus J$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti;*

c) $I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \implies I \setminus A$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti;*

d) *ogni insieme* $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti.*

Dimostrazione. a) Siano $I = [a, b[$, $J = [c, d[$. L'asserto è vero se $I \cap J = \emptyset$. Supponiamo quindi $I \cap J \neq \emptyset$. È allora immediato verificare che risulta $a \vee c < b \wedge d$ e si ha

$$I \cap J \;=\; [\, a \vee c\,,\, b \wedge d\, [\;\; .$$

Ricordiamo (cfr. il n. 2.1) che $a \vee c = \max\{a, c\}$, $b \wedge d = \min\{b, d\}$.

b) Poiché $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ e $I \cap J \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, possiamo supporre che sia $J \subseteq I$. Siano $I = [a, b[$, $J = [c, d[$. Sia, inoltre, $[c, d[\neq \emptyset$ (poiché, altrimenti, non c'è nulla da dimostrare). Si ha allora $a \leq c$, $d \leq b$ e risulta

$$I \setminus J \;=\; [a, c[\cup [d, b[\;\; ,$$

quindi è vera la tesi.

c) Posto $A = J_1 \cup \ldots \cup J_k$ con $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, procediamo per induzione sull'indice k. Per $k = 1$ la tesi è vera (proprietà b)). Supponiamo che l'asserto sia vero per l'indice k e dimostriamo che esso è vero pure per l'indice $k + 1$. Supponiamo pertanto che sia $A = J_1 \cup \ldots \cup J_k \cup J_{k+1}$, con $J_1, \ldots, J_k, J_{k+1} \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$. Si ha

$$I \setminus A \;=\; \big(I \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_k) \big) \setminus J_{k+1}$$

e quindi, per l'ipotesi induttiva, esistono $K_1, \ldots, K_r \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, a due a due disgiunti, tali che

$$I \setminus A \;=\; (K_1 \cup \ldots \cup K_r) \setminus J_{k+1} \;=\; (K_1 \setminus J_{k+1}) \cup \ldots \cup (K_r \setminus J_{k+1}) \;;$$

poiché gli insiemi $K_i \setminus J_{k+1}$, $i = 1, \ldots r$, sono a due a due disgiunti e ciascuno di essi è (proprietà b)) unione finita di intervalli di $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti, ne segue che anche $I \setminus A$ è unione finita di intervalli di $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti.

d) Se $A = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, con $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, possiamo scrivere

$$A \;=\; I_1 \cup \big(I_2 \setminus I_1\big) \cup \big(I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)\big) \cup \ldots \cup \big(I_k \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_{k-1})\big) \;;$$

poiché gli addendi dell'unione al secondo membro sono a due a due disgiunti e ciascuno di essi è (proprietà c)) unione finita di intervalli di $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti, ne segue la tesi.

Lemma 7.1.4. *La famiglia di insiemi $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ è un anello in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. I postulati

r$_1$) $\emptyset \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$,

r$_3$) $A, B \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \implies A \cup B \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$

sono ovviamente soddisfatti. Proviamo che vale anche

r$_2$) $A, B \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$.

Sia $A = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, con $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$. Allora

$$A \setminus B \ = \ (I_1 \setminus B) \cup \ldots \cup (I_k \setminus B)$$

e ognuno degli addendi dell'unione al secondo membro appartiene a $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ (Lemma 7.1.3, c)); ne segue che anche $A \setminus B$ appartiene a $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$.

Lemma 7.1.5. *Esiste ed è unico ν_F, contenuto sull'anello $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$, tale che*

$$\nu_F(I) \ = \ F(b) - F(a) \qquad \forall I = [a, b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \ . \tag{7.1.4}$$

Dimostrazione. Sia $\nu_F : \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$ la funzione d'insieme definita nel seguente modo: per ogni insieme $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ ed ogni rappresentazione dell'insieme A del tipo

$$A = I_1 \cup \ldots \cup I_k \ ,$$

con $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti (rappresentazione che esiste per il Lemma 7.1.3, d)) poniamo

$$\nu_F(A) \ = \ \delta_F(I_1) + \ldots + \delta_F(I_k) \ . \tag{7.1.14}$$

Verifichiamo che la funzione ν_F è ben definita. Occorre provare che, se $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ e

$$A \ = \ I_1 \cup \ldots \cup I_k \quad , \quad A \ = \ J_1 \cup \ldots \cup J_h$$

sono due qualsiasi rappresentazioni dell'insieme A come unione finita di intervalli di $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti, risulta

$$\sum_{r=1}^{k} \delta_F(I_r) \ = \ \sum_{s=1}^{h} \delta_F(J_s) \ . \tag{7.1.15}$$

Si ha infatti, per ogni $r = 1, \ldots, k$,

$$I_r \ = \ I_r \cap A \ = \ I_r \cap \Big(\bigcup_{s=1}^{h} J_s \Big) \ = \ \bigcup_{s=1}^{h} \big(I_r \cap J_s \big)$$

e quindi, per il Lemma 7.1.1, tenuto conto del Lemma 7.1.3, a),

$$\delta_F(I_r) \;=\; \sum_{s=1}^{h} \delta_F(I_r \cap J_s) \;;$$

ne segue che

$$\sum_{r=1}^{k} \delta_F(I_r) \;=\; \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{h} \delta_F(I_r \cap J_s) \;.$$

Analogamente, scambiando i ruoli degli intervalli I_r e J_s, si ottiene

$$\sum_{s=1}^{h} \delta_F(J_s) \;=\; \sum_{s=1}^{h} \sum_{r=1}^{k} \delta_F(I_r \cap J_s) \;,$$

dunque vale la (7.1.15).

È evidente che ν_F è un contenuto su $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ (in particolare risulta $\nu_F \geq 0$ grazie all'ipotesi ii)) e che vale la (7.1.4).

L'unicità di ν_F segue dall'osservazione che, se ν è un qualunque contenuto su $\mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ che verifica la condizione

$$\nu(I) \;=\; F(b) - F(a) \qquad\qquad \forall I = [a,b[\, \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}} \;,$$

allora per ogni insieme $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ ed ogni rappresentazione di A del tipo

$$A = I_1 \cup \ldots \cup I_k \;,$$

con $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti, deve necessariamente aversi

$$\nu(A) \;=\; \delta_F(I_1) + \ldots + \delta_F(I_k) \;=\; \nu_F(A) \;.$$

Lemma 7.1.6. *Per ogni $A \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}}$ tale che*

$$\overline{B} \subseteq A \quad , \quad \big|\nu_F(B) - \nu_F(A)\big| < \varepsilon \quad .$$

Dimostrazione. Sia $A = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, con $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti. Per il Lemma 7.1.2 esistono $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ tali che

$$\overline{J_r} \subseteq I_r \quad , \quad |\delta_F(J_r) - \delta_F(I_r)| < \frac{\varepsilon}{k} \;, \qquad\qquad r = 1, \ldots, k \;.$$

Posto $B = J_1 \cup \ldots \cup J_k$, si ha

$$B \in \mathcal{F}_1^{\mathrm{d}} \quad , \quad \overline{B} \subseteq \overline{J_1} \cup \ldots \cup \overline{J_k} \subseteq A$$

e inoltre, dato che anche gli intervalli $J_1, \ldots, J_k$ sono a due a due disgiunti,

$$\big|\nu_F(B) - \nu_F(A)\big| \;=\; \Big|\sum_{r=1}^{k} \delta_F(J_r) \;-\; \sum_{r=1}^{k} \delta_F(I_r)\Big| \;\leq\; \sum_{r=1}^{k} \big|\delta_F(J_r) - \delta_F(I_r)\big| \;<\; \varepsilon \;.$$

7.2. Funzioni di distribuzione e misure di Borel su $\mathbb{R}^h$.

Ci proponiamo adesso di estendere allo spazio $\mathbb{R}^h$ la teoria svolta nel precedente paragrafo nel caso in cui lo spazio ambiente è $\mathbb{R}$.

Cominciamo, naturalmente, dal Teorema 7.1.1.

Esaminando la possibilità di estendere tale teorema al caso h-dimensionale ci troviamo subito a dover risolvere due problemi. Un primo problema è quello della formulazione di adeguate ipotesi sulla funzione $F : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$, che generalizzino le i) e ii) del Teorema 7.1.1. Un altro problema riguarda invece la natura del legame da richiedere tra la funzione F e la misura μ, legame che nel caso unidimensionale è espresso dalla (7.1.1); infatti, come vedremo proseguendo nella lettura del paragrafo, l'estensione pedissequa della (7.1.1) non permette di ottenere risultati significativi.

Per cominciare a renderci conto di come stiano le cose in dimensione $h \geq 2$ e a orientarci nella risoluzione dei due precedenti problemi prendiamo lo spunto dal fatto che per $h = 1$, nel caso di una misura di Borel finita, una funzione di distribuzione F associata a μ si ottiene ponendo

$$F(x) \;=\; \mu(]-\infty, x[) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{7.2.1}$$

e, ipotizzando che un risultato analogo valga pure per $h \geq 2$, ragioniamo nel seguente modo: proviamo ad estendere la (7.2.1) al caso h-dimensionale sostituendo all'intervallo $]-\infty, x[$ l'insieme

$$]-\infty, x_1[\, \times \ldots \times \,]-\infty, x_h[\;, \qquad x = (x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h\;,$$

e studiamo le proprietà della funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che così si ottiene.

Per semplicità esaminiamo in dettaglio solo il caso $h = 2$.

Supponiamo pertanto che μ sia una misura su $\mathcal{B}_2$, con $\mu(\mathbb{R}^2) < +\infty$, e consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita, a partire da μ, nel modo seguente:

$$F(x) \;=\; \mu(\,]-\infty, x_1[\, \times \,]-\infty, x_2[\,) \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\;. \tag{7.2.2}$$

Dato un intervallo $I = [a, b[\, \in \mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$, con $a < b$, cerchiamo di esprimere la misura $\mu(I)$ dell'intervallo I mediante la funzione F. Siano

$$a \;=\; (a_1, a_2) \quad , \quad b \;=\; (b_1, b_2)$$

le coordinate dei punti a e b. Osserviamo che la differenza

$$F(b_1, b_2) \;-\; F(a_1, a_2)$$

è uguale (proprietà di sottrattività) alla misura dell'insieme

$$L \;=\; \big(]-\infty, b_1[\, \times \,]-\infty, b_2[\big) \setminus \big(]-\infty, a_1[\, \times \,]-\infty, a_2[\big) \;=$$

$$=\; \big([a_1, b_1[\, \times \,]-\infty, b_2[\big) \cup \big(]-\infty, b_1[\, \times [a_2, b_2[\big)$$

e che per ottenere l'intervallo I occorre sottrarre da L l'unione $M \cup N$ dei due insiemi disgiunti

$$M \;=\; [a_1, b_1[\, \times \,]-\infty, a_2[\quad , \quad N \;=\,]-\infty, a_1[\, \times [a_2, b_2[\quad ;$$

ognuno di tali insiemi si può esprimere come differenza di due insiemi del tipo

$$]-\infty, x_1[\, \times \,]-\infty, x_2[$$

(cioè del tipo di quelli considerati nella (7.2.2)); si ha infatti

$$\begin{aligned} M \;&=\; \Big(\,]-\infty, b_1[\, \times \,]-\infty, a_2[\,\Big) \setminus \Big(\,]-\infty, a_1[\, \times \,]-\infty, a_2[\,\Big) \quad , \\ N \;&=\; \Big(\,]-\infty, a_1[\, \times \,]-\infty, b_2[\,\Big) \setminus \Big(\,]-\infty, a_1[\, \times \,]-\infty, a_2[\,\Big) \end{aligned}$$

e pertanto

$$\mu(M) \;=\; F(b_1, a_2) \,-\, F(a_1, a_2) \quad , \quad \mu(N) \;=\; F(a_1, b_2) \,-\, F(a_1, a_2) \ .$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} \mu(I) \;&=\; \mu(L) \,-\, \Big[\mu(M) \,+\, \mu(N)\Big] \;= \\ =\; F(b_1, b_2) \,-\, F(a_1, a_2) \,-\, &\Big[F(b_1, a_2) \,-\, F(a_1, a_2) \,+\, F(a_1, b_2) \,-\, F(a_1, a_2)\Big] \;= \\ &=\; F(b_1, b_2) \,-\, F(b_1, a_2) \,-\, F(a_1, b_2) \,+\, F(a_1, a_2) \quad . \end{aligned}$$

Se proviamo a trasferire le considerazioni che precedono da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, ottienamo, con calcoli un po' più laboriosi e con ovvio significato dei simboli,

$$\begin{aligned} \mu([a, b[\,) \;&=\; F(b_1, b_2, b_3) \,- \\ -\, F(a_1, b_2, b_3) \,&-\, F(b_1, a_2, b_3) \,-\, F(b_1, b_2, a_3) \,+ \\ +\, F(b_1, a_2, a_3) \,&+\, F(a_1, b_2, a_3) \,+\, F(a_1, a_2, b_3) \,- \\ &-\, F(a_1, a_2, a_3) \ . \end{aligned}$$

In generale, in $\mathbb{R}^h$, si può dimostrare (cfr. il Lemma 7.2.7 nell'appendice al paragrafo) che, data una misura finita μ su $\mathcal{B}_h$ e posto

$$F(x) \;=\; \mu(\,]-\infty, x_1[\, \times \,\ldots\, \times \,]-\infty, x_h[\,) \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h \ ,$$

la misura $\mu([a, b[\,)$ di un intervallo non vuoto $[a, b[\, \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ risulta uguale alla somma dei valori che la funzione F assume in ognuno dei 2^h "vertici" dell'intervallo $[a, b[$, valori preceduti dal segno $+$ o $-$ secondo che il numero delle componenti del vertice considerato che coincidono con le omologhe componenti del "vertice iniziale" $a = (a_1, \ldots, a_h)$ sia pari o dispari.

Ritornando al caso $h = 2$, osserviamo ancora che la funzione F definita dalla (7.2.2) gode della proprietà di essere *continua dalla sinistra rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2)$, nel loro complesso*, cioè

$$(7.2.3) \qquad \forall c \in \mathbb{R}^2\,, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ d(x,c) < \delta\,,\, x \le c \quad \Longrightarrow \quad |F(x) - F(c)| < \varepsilon$$

(d è la distanza euclidea). Per dimostrare ciò basta osservare che la proprietà (7.2.3) equivale, per una qualsiasi funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alla seguente:

(7.2.4) *per ogni $c \in \mathbb{R}^2$ ed ogni successione $\{c_n\}$ di elementi di $\mathbb{R}^2$ tale che*

$$(*) \qquad c_n \le c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \ = \ F(c)$$

e che, dato che ogni successione $\{c_n\}$ di elementi di $\mathbb{R}^2$ verificante le condizioni (*) ammette un'estratta $\{c_{n_r}\}$ soddisfacente l'ulteriore requisito $c_{n_r} \le c_{n_{r+1}}$ $\forall r \in \mathbb{N}$ (si veda in proposito il Lemma 7.2.8 nell'appendice al paragrafo), la (7.2.4) è, a sua volta, equivalente a

(7.2.5) *per ogni $c \in \mathbb{R}^2$ ed ogni successione $\{c_n\}$ di elementi di $\mathbb{R}^2$ tale che*

$$c_n \le c_{n+1} \le c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \ = \ F(c)$$

(l'implicazione (7.2.4) $\Longrightarrow$ (7.2.5) è ovvia; l'implicazione contraria si prova con un facile ragionamento per assurdo); la validità della (7.2.5) per la funzione (7.2.2) segue poi facilmente dalla proprietà di continuità verso l'alto della misura μ.

Osserviamo che non c'è alcuna difficoltà ad estendere quanto detto a proposito della continuità dalla sinistra dal caso $h = 2$ al caso generale.

Torniamo adesso all'estensione del Teorema 7.1.1 e precisiamo i simboli che adopereremo.

Notazioni. Per ogni coppia a, b di elementi di $\mathbb{R}^h$ tali che $a < b$ indichiamo con $V_{a,b}$ l'insieme dei *vertici* dell'intervallo chiuso, non degenere, $[a, b]$, cioè l'insieme

$$V_{a,b} \ = \ \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_h, b_h\} \ .$$

Indichiamo inoltre, per ogni $c = (c_1, \ldots, c_h) \in V_{a,b}$, con $i_{a,b}(c)$ il numero degli elementi dell'insieme

$$\{r \in \{1, \ldots, h\} \ : \ c_r = a_r\} \ ,$$

cioè il numero delle componenti di c che sono uguali alle omologhe componenti di a.

Data una funzione $F : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$, indichiamo, per ogni $a, b \in \mathbb{R}^h$ tali che $a < b$, con $F[a; b]$ la quantità

$$F[a; b] \ = \ \sum_{c \in V_{a,b}} (-1)^{i_{a,b}(c)} F(c) \ .$$

Inoltre, se $a, b \in \mathbb{R}^h$ sono tali che $a \leq b$, ma $a \not< b$, poniamo $F[a; b] = 0$. Ovviamente, per $h = 1$ si ha $F[a; b] = F(b) - F(a)$.

Definizione 7.2.1. (*Funzione di distribuzione su* $\mathbb{R}^h$). Si chiama *funzione di distribuzione su* $\mathbb{R}^h$ ogni funzione $F : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$ avente le seguenti due proprietà:

j) $F[a; b] \ \geq \ 0 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^h, \ a \leq b$;

jj) F è *continua dalla sinistra rispetto a ciascuna delle variabili* $x_1, \ldots, x_h$, *separatamente*.

La jj) vuol dire che, per ogni $c = (c_1, \ldots, c_h) \in \mathbb{R}^h$, i limiti

$$\lim_{x_1 \to c_1 -} F(x_1, c_2, \ldots, c_h) \ , \ \lim_{x_2 \to c_2 -} F(c_1, x_2, c_3, \ldots, c_h) \ , \ \ldots \ , \ \lim_{x_h \to c_h -} F(c_1, c_2, \ldots, c_{h-1}, x_h)$$

esistono tutti e sono tutti uguali a $F(c_1, c_2, \ldots, c_h)$.

Osservazioni 7.2.1. 1) È evidente che per $h = 1$ le proprietà j) e jj) della precedente definizione si riducono alle proprietà i) e ii) della Definizione 7.1.1, dunque c'è coerenza tra le due definizioni.

2) Per $h \geq 2$ la proprietà j) non è sufficiente a garantire, così come accade per $h = 1$, l'esistenza dei limiti che figurano nella proprietà jj) (un facile controesempio per $h = 2$ si ottiene ponendo

$$F(x_1, x_2) \ = \ D(x_1) + D(x_2) \qquad\qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

essendo $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet: $D(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

3) Nella precedente definizione di funzione di distribuzione abbiamo richiesto una proprietà di continuità dalla sinistra (continuità rispetto a ciascuna delle variabili separatamente) più debole della continuità dalla sinistra rispetto a tutte le variabili, nel loro complesso, che avevamo trovato per la funzione (7.2.2). Il motivo di questa scelta è quello di adottare, nel successivo Teorema 7.2.1, ipotesi quanto più leggere possibile.

4) A proposito di quanto detto in 3) segnaliamo che – a prescindere dallo "scambio destra-sinistra" (cfr. la successiva Osservazione 7.2.2) – per $h \geq 2$ la definizione di funzione di distribuzione, nei vari libri di testo, non è uniforme. Altri Autori richiedono infatti che le funzioni di distribuzione siano continue dalla sinistra rispetto a tutte le variabili, nel loro complesso; altri ancora richiedono che la F soddisfi ulteriori proprietà di monotonia oltre alla j).

Osservazione 7.2.2. Avvertiamo sin d'ora – e non ritorneremo più su questa osservazione – che la teoria che svolgeremo in questo paragrafo "da sinistra" continua a valere, specularmente, "da destra", a condizione, ovviamente, di fare le dovute modifiche e cioè sostituire la continuità da sinistra con quella da destra e gli intervalli semiaperti a destra con quelli semiaperti a sinistra.

Definizione 7.2.2. (*Misura di Borel su* $\mathbb{R}^h$). Si chiama *misura di Borel su* $\mathbb{R}^h$ ogni misura μ, definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}_h$ dei boreliani di $\mathbb{R}^h$, tale che

$$\mu(L) < +\infty$$

per ogni insieme limitato $L \in \mathcal{B}_h$.

Possiamo adesso enunciare il risultato principale.

Teorema 7.2.1. *Sia F una qualsiasi funzione di distribuzione su $\mathbb{R}^h$. Esiste ed è unica μ_F, funzione di distribuzione su $\mathbb{R}^h$, tale che*

$$\mu_F(I) \;=\; F[a;b] \qquad\qquad \forall I = [a,b[\, \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}} \;.$$

La dimostrazione del Teorema 7.2.1 si ottiene seguendo la falsariga di quella del Teorema 7.1.1; anzi, la maggior parte delle verifiche che occorre effettuare si ottengono ripetendo pedissequamente quanto detto nel caso $h = 1$; fanno eccezione soltanto la dimostrazione del Lemma 7.2.1 (più complicata di quella dell'analogo Lemma 7.1.1) e quelle dei Lemmi 7.2.2 e 7.2.3 (che necessitano di qualche aggiustamento rispetto agli analoghi lemmi relativi al caso unidimensionale).

Per comodità del lettore riportiamo un breve schema della dimostrazione del teorema 7.2.1, rinviando all'appendice al paragrafo per i lemmi tecnici di supporto.

Dimostrazione del Teorema 7.2.1.

Supponiamo, naturalmente, che sia $h \geq 2$.

1. Si verifica (Lemma 7.2.1) che l'applicazione

$$I \;\rightarrow\; \delta_F(I) \;,$$

da $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ in $\mathbb{R}$, ottenuta associando ad ogni intervallo $I = [a,b[\, \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ la quantità

$$\delta_F(I) \;=\; F[a;b] \;,$$

è finitamente additiva e che vale (Lemma 7.2.2) la seguente proprietà di approssimazione:

per ogni $I \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $J \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ tale che

$$\overline{J} \subseteq I \quad , \quad \left|\delta_F(J) - \delta_F(I)\right| < \varepsilon \;.$$

2. Denotata con $\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ la famiglia delle unioni finite di intervalli di $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$, si osserva, come nel Teorema 7.1.1, che è

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}) \;=\; \mathcal{B}_h$$

e si dimostra (Lemma 7.2.3) che le famiglie di insiemi $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ e $\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ godono delle stesse proprietà proprietà a) - d) che valevano nel caso $h = 1$. Se ne deduce (Lemma 7.2.4) che *$\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ è un anello in $\mathbb{R}^h$.*

3. Si prova (Lemma 7.2.5) che *esiste, ed è unico, un contenuto ν_F sull'anello $\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ tale che*

$$\nu_F(I) \;=\; F[a;b] \qquad\qquad \forall I = [a,b[\, \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$$

e che vale (Lemma 7.2.6) la proprietà di approssimazione:

per ogni $A \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ tale che

$$\overline{B} \subseteq A \quad , \quad \left|\nu_F(B) - \nu_F(A)\right| < \varepsilon \; .$$

4. Si prova, esattamente come nel Teorema 7.1.1, che *il contenuto ν_F è una premisura.*

5. Come nel Teorema 7.1.1 si ha che *la premisura ν_F è σ-finita* (basta tenere presente che $[-n,n[^{\,h} \uparrow \mathbb{R}^h$).

6. A questo punto, per completare la dimostrazione, basta ragionare esattamente come per il Teorema 7.1.1, facendo ricorso al teorema di esistenza ed unicità del prolungamento di una premisura σ-finita.

Notazioni. Come nel caso $h = 1$ indichiamo con $\mathbb{F}_h$ e $\mathbb{M}_h$, rispettivamente, l'insieme delle funzioni di distribuzione su $\mathbb{R}^h$ e l'insieme delle misure di Borel su $\mathbb{R}^h$.

Studiamo, come già fatto nel caso $h = 1$, l'iniettività e la surgettività dell'applicazione

$$F \;\to\; \mu_F \;, \tag{7.2.6}$$

da $\mathbb{F}_h$ in $\mathbb{M}_h$, determinata dal Teorema 7.2.1. Si hanno risultati analoghi a quelli del caso $h = 1$ e precisamente: la (7.2.6) non è iniettiva (Proposizione 7.2.1) ma è surgettiva (Teorema 7.2.2) (ovviamente, per recuperare l'iniettività, basta passare all'insieme quoziente). Omettiamo, per semplicità, le relative dimostrazioni, che riportiamo nell'appendice al paragrafo nel caso particolare $h = 2$.

Proposizione 7.2.1. *Siano $F, F_1 \in \mathbb{F}_h$ due funzioni di distribuzione su $\mathbb{R}^h$, $h \geq 2$.*

Risulta $\mu_F = \mu_{F_1}$ se e soltanto se la differenza $F - F_1$ è uguale ad una somma di funzioni del tipo

$$H_1 \,+\, \ldots \,+\, H_h \;,$$

dove $H_i : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, h$, è una funzione "muta" rispetto alla variabile x_i (cioè

$$H_i(x_1, \ldots, x_h) \;=\; \widetilde{H}_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_h) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h \;,$$

essendo $\widetilde{H}_i$ una funzione da $\mathbb{R}^{h-1}$ in $\mathbb{R}$).

Teorema 7.2.2. *Data una qualsiasi misura $\mu \in \mathbb{M}_h$, esiste $F \in \mathbb{F}_h$ tale che $\mu_F = \mu$. Inoltre F può essere costruita in modo tale da risultare continua dalla sinistra rispetto a tutte le variabili da cui dipende, nel loro complesso* ([5]) .

Tenuto conto dei precedenti risultati, anche per $h \geq 2$, ogni qual volta che $F \in \mathbb{F}_h$ e $\mu \in \mathbb{M}_h$ sono tali da risultare $\mu = \mu_F$, diciamo che "μ è la *misura di Borel associata a F*", ovvero, reciprocamente, che "F è una *funzione di distribuzione di μ*".

Esaminiamo adesso il caso delle misure di Borel finite.
Si ha in proposito il seguente teorema.

Teorema 7.2.3. *Sia $\mu \in \mathbb{M}_h$ $(h \geq 2)$ una misura di Borel finita e sia $F : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:*

$$F(x) \ = \ \mu(\,]-\infty, x_1[\, \times \, \dots \, \times \,]-\infty, x_h[\,) \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_h) \in \mathbb{R}^h \ . \tag{7.2.7}$$

La funzione F è una funzione di distribuzione della misura μ e gode, per di più, delle seguenti proprietà:

1) *F è continua dalla sinistra rispetto a tutte le variabili $x = (x_1, \dots, x_h)$, nel loro complesso;*

2) *risulta*

$$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots \\ x_h \to +\infty}} F(x_1, \dots, x_h) \ = \ \mu(\mathbb{R}^h) \quad (^6) \ ; \tag{7.2.8}$$

3) *per ogni $c = (c_1, \dots, c_h) \in \mathbb{R}^h$ ed ogni $i = 1, \dots, h$ si ha*

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_h) \ = \ 0 \ ;$$

4) *se $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ sono alcune delle variabili $(x_1, \dots, x_h)$ e $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{h-k}})$ sono le rimanenti variabili, allora, comunque si fissino i valori $(\overline{x}_{j_1}, \dots, \overline{x}_{j_{h-k}})$ di $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{h-k}})$, la funzione "parziale"*

$$(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \ \to \ F(\dots, x_{i_r}, \dots, \overline{x}_{j_s}, \dots) \ ,$$

da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}$, è la funzione di distribuzione di una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^k$.

Inoltre, la funzione (7.2.7) *è l'unica funzione di distribuzione associata a μ che gode della proprietà* 3).

([5]) Cioè:

$$\forall c \in \mathbb{R}^h \, , \, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ : \ \ d(x, c) < \delta \, , \, x \leq c \quad \Longrightarrow \quad |F(x) - F(c)| < \varepsilon \ .$$

([6]) Il significato della relazione di limite (7.2.8) è il seguente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \overline{x} \in \mathbb{R}^h \ : \ x \in \mathbb{R}^h \ , \ x \geq \overline{x} \implies \Big| F(x) - \mu(\mathbb{R}^h) \Big| < \varepsilon \ .$$

La dimostrazione del Teorema 7.2.3 è riportata nell'appendice al paragrafo.

Sulla scorta del precedente teorema, data una misura di Borel finita μ su $\mathbb{R}^h$, si suole denotare con il simbolo F_μ quella funzione di distribuzione associata a μ che verifica la condizione 3) e si suole dire che F_μ è <u>la</u> funzione di distribuzione di μ.

Indicando, come nel caso $h = 1$, con $\mathbb{F}_h^*$ il sottoinsieme di $\mathbb{F}_h$ costituito da quelle funzioni di distribuzione F che verificano la condizione 3) e l'altra:

$$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots \\ x_h \to +\infty}} F(x_1, \ldots, x_h) \;=\; \ell \in \mathbb{R} \ ,$$

e con $\mathbb{M}_h^*$ l'insieme delle misure di Borel finite su $\mathbb{R}^h$, si può dimostrare che la restrizione dell'applicazione (7.2.6) a $\mathbb{F}_h^*$ è una bigezione tra $\mathbb{F}_h^*$ e $\mathbb{M}_h^*$ e la funzione inversa di tale bigezione è l'applicazione

$$\mu \;\to\; F_\mu \ .$$

Ovviamente, quanto detto in generale per le misure di Borel finite vale in particolare per le misure di probabilità P su $\mathcal{B}_h$. In questo caso le relative funzioni di distribuzione F_P sono caratterizzate dal verificare la condizione 3) e dall'essere tali che

$$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots \\ x_h \to +\infty}} F_P(x_1, \ldots, x_h) \;=\; 1 \ .$$

Occupiamoci adesso delle funzioni di distribuzione continue.

Teorema 7.2.4. *Sia F una funzione di distribuzione su $\mathbb{R}^h$, continua in $\mathbb{R}^h$, e sia μ una misura su $\mathcal{B}_h$.*

Le seguenti affermazioni (a) - (d) *sono equivalenti:*

(a) $\quad \mu(\,[a,b[\,) \;=\; F[a;b] \qquad \forall\, [a,b[\in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$;

(b) $\quad \mu(\,[a,b]\,) \;=\; F[a;b] \qquad \forall\, [a,b] \in \mathcal{I}_h$;

(c) $\quad \mu(\,]a,b]\,) \;=\; F[a;b] \qquad \forall\,]a,b] \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{s}}$;

(d) $\quad \mu(\,]a,b[\,) \;=\; F[a;b] \qquad \forall\,]a,b[\in \mathcal{I}_h^{\mathrm{o}}$.

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) . Qualunque sia $[a,b] \in \mathcal{I}_h$, indicato con e l'elemento di $\mathbb{R}^h$ di componenti $(1, \ldots, 1)$, si ha

$$[a, b + \tfrac{1}{n} e[\; \downarrow \; [a,b]$$

e quindi, per la proprietà di continuità verso il basso di μ e l'ipotesi (a),

$$\mu([a,b]) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu([a, b + \tfrac{1}{n} e[) \;=\; \lim_{n\to\infty} F[a; b + \tfrac{1}{n} e] \quad ;$$

d'altra parte, utilizzando la continuità di F, si può dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} F[a; b + \tfrac{1}{n} e] \;=\; F[a;b] \qquad (^7) \ ;$$

ne segue la tesi.

(b) $\Longrightarrow$ (c) . Qualunque sia $]a,b] \in \mathcal{I}_h^s$, $]a,b] \neq \emptyset$, fissato

$$0 < h \leq \min_{1 \leq i \leq h} b_i - a_i \ ,$$

si ha

$$[a + \tfrac{h}{n}e, b] \ \uparrow \ ]a,b]$$

e quindi, per la proprietà di continuità verso l'alto di μ, l'ipotesi (b) e la continuità di F,

$$\mu(]a,b]) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mu([a + \tfrac{h}{n}e, b]) \ = \ \lim_{n\to\infty} F[a + \tfrac{h}{n}e; b] \ = \ F[a;b] \ \ .$$

Ovviamente, se $]a,b] = \emptyset$, si ha $\mu(\,]a,b]) = 0 = F[a;b]$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) . Sia $]a,b[\in \mathcal{I}_h^\circ$. Se $]a,b[= \emptyset$ l'uguaglianza $\mu(\,]a,b[\,) = F[a;b]$ è ovviamente verificata. Supponiamo quindi che sia $]a,b[\neq \emptyset$. Fissato

$$0 < h \leq \min_{1 \leq i \leq h} b_i - a_i \ ,$$

si ha

$$]a, b - \tfrac{h}{n}e] \ \uparrow \ ]a,b[$$

e quindi, per la proprietà di continuità verso l'alto di μ, l'ipotesi (c) e la continuità di F,

$$\mu(]a,b[) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mu(]a, b - \tfrac{h}{n}e]) \ = \ \lim_{n\to\infty} F[a; b - \tfrac{h}{n}e] \ = \ F[a;b] \ \ .$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) . Si ha

$$]a - \tfrac{1}{n}e, b[\ \downarrow \ [a,b[$$

e quindi (continuità verso il basso di μ, ipotesi (d) e continuità di F)

$$\mu([a,b[) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mu(]a - \tfrac{1}{n}e, b[) \ = \ \lim_{n\to\infty} F[a - \tfrac{1}{n}e; b] \ = \ F[a;b] \ \ .$$

I Teoremi 7.2.1 e 7.2.4 implicano, in particolare, il seguente corollario.

(^{7}) Ad esempio, nel caso $h = 2$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F[a; b + \tfrac{1}{n}e] \ &= \ \lim_{n\to\infty} \Big[F(b_1 + \tfrac{1}{n}, b_2 + \tfrac{1}{n}) - F(b_1 + \tfrac{1}{n}, a_2) - F(a_1, b_2 + \tfrac{1}{n}) + F(a_1, a_2)\Big] \ = \\ &= \ F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)\end{aligned}$$

e l'ultima quantità è uguale (sia nel caso $a < b$ che in quello $a \not< b$) a $F[a;b]$.

Corollario 7.2.1. *Sia $F : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$ una funzione continua verificante la condizione*

j) $F[a;b] \ \geq \ 0 \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}^h,\ a \leq b$.

Esiste un'unica misura μ su $\mathcal{B}_h$ tale che

(7.2.9)
$$\mu(\,[a,b]\,) \ = \ F[a;b] \qquad\qquad \forall\,[a,b] \in \mathcal{I}_h \ .$$

Esaminiamo il caso particolare della funzione $\Lambda_h : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$ data da

$$\Lambda_h(x) \ = \ x_1 \cdot \ldots \cdot x_h \qquad\qquad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h \ .$$

Tale funzione è, ovviamente, continua e si ha inoltre

(7.2.10)
$$\Lambda_h[a;b] \ = \ \mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([a,b]) \qquad\qquad \forall\,[a,b] \in \mathcal{I}_h \ .$$

Infatti la (7.2.10) è ovviamente verificata se l'intervallo $[a,b]$ è degenere. Se, invece, è $a < b$, basta osservare che, indicate con

$$a \ = \ (a_1, \ldots, a_h) \quad \text{e} \quad b \ = \ (b_1, \ldots, b_h)$$

le componenti di a e b, lo sviluppo del prodotto

$$(b_1 - a_1) \cdot \ \ldots \ \cdot (b_h - a_h) \ \ = \ \ \mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([a,b])$$

è uguale alla somma di tutti i 2^h prodotti del tipo $c_1 \cdot \ldots \cdot c_h$, dove, per ogni $i = 1, \ldots, h$, è $c_i = a_i$ oppure $c_i = b_i$, ognuno di tali prodotti essendo preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$ secondo che il numero dei fattori c_i che sono uguali a a_i è pari o dispari; dunque si ha

$$\mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([a,b]) \ = \ \sum_{c \in V_{a,b}} (-1)^{i_{a,b}(c)} \Lambda_h(c) \ = \ \Lambda_h[a;b] \ .$$

Dalla (7.2.10) segue che la funzione Λ_h verifica la condizione j). Conseguentemente, per il Corollario 7.2.1, si ha la

Proposizione 7.2.2. *Esiste una ed una sola misura λ_h su $\mathcal{B}_h$ tale che*

(7.2.11)
$$\lambda_h([a,b]) \ = \ \mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([a,b]) \qquad\qquad \forall\,[a,b] \in \mathcal{I}_h \ .$$

Poiché la restrizione della misura di Lebesgue m_h alla σ-algebra $\mathcal{B}_h$ è una misura μ su $\mathcal{B}_h$ avente la proprietà che

$$\mu([a,b]) \ = \ \mathrm{mis}_{\mathrm{e},h}([a,b]) \qquad\qquad \forall\,[a,b] \in \mathcal{I}_h \ ,$$

ne deduciamo che vale il seguente teorema.

Teorema 7.2.5. (Unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{B}_h$). *La restrizione della misura di Lebesgue* m_h *alla σ-algebra* $\mathcal{B}_h$ *è l'unica misura* λ_h *su* $\mathcal{B}_h$ *che prolunga la misura elementare* (cioè verifica la (7.2.11)).

Osservazione 7.2.3. Per ricavare il Teorema 7.2.5 oltre alla conoscenza della misura di Lebesgue abbiamo utilizzato, per l'unicità, la Proposizione 7.2.2 e quindi la teoria svolta in questo capitolo. Tuttavia, il Teorema 7.2.5 può essere dimostrato senza fare uso di tale teoria; infatti l'unicità di λ_h può ottenersi mediante il teorema di coincidenza di due misure (Teorema 5.4.3), prendendo come σ-algebra $\mathcal{A}$ la σ-algebra $\mathcal{B}_h$ e come suo generatore $\mathcal{E}$ la famiglia $\mathcal{I}_h$ degli intervalli chiusi. Di conseguenza, poiché il Teorema 7.2.5, a sua volta, implica ovviamente la Proposizione 7.2.2, anche quest'ultima sussiste a prescindere dai risultati riguardanti le funzioni di distribuzione.

Il fatto che la Proposizione 7.2.2 si possa dedurre usando esclusivamente la teoria generale sulle funzioni di distribuzione e le misure di Borel su $\mathbb{R}^h$ presentata in questo capitolo, senza presupporre la conoscenza della misura di Lebesgue, è però importante perché, come vedremo più avanti (cfr. il n. 8.4), ciò rende possibile un altro modo di definire la misura di Lebesgue (di tipo "assiomatico"), alternativo rispetto al procedimento "costruttivo" seguito nel Capitolo 4.

Appendice al n. 7.2.

Iniziamo con i lemmi di supporto alla dimostrazione del Teorema 7.2.1. Supporremo sempre, in tali lemmi, che sia $h \geq 2$.

Lemma 7.2.1. *L'applicazione* $\delta_F : \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$, *che ad ogni intervallo* $I = [a, b[\in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ *fa corrispondere la quantità*

$$\delta_F(I) \;=\; F[a; b] \;,$$

è finitamente additiva, cioè: se gli intervalli $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ *sono a due a due disgiunti e tali che* $I_1 \cup \ldots \cup I_k = I \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$, *allora*

$$\delta_F(I) \;=\; \delta_F(I_1) + \ldots + \delta_F(I_k) \;. \tag{7.2.12}$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che l'applicazione δ_F è ben definita, poiché se l'intervallo $I = [a, b[\in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ non è vuoto i suoi estremi a e b sono univocamente determinati, mentre se $I = \emptyset$ allora $\delta_F(I) = 0$ indipendentemente dalla rappresentazione $I = [a, b[$ che si adopera.

Per dimostare il lemma procediamo per induzione sul numero k degli intervalli $I_1, \ldots, I_k$.

Per $k = 1$ la (7.2.12) è ovviamente verificata.

Per $k = 2$ la (7.2.12) è ancora ovviamente verificata se $I_1 = \emptyset$ oppure $I_2 = \emptyset$.

Esaminiamo il caso $k = 2$, $I_1 \neq \emptyset$, $I_2 \neq \emptyset$.

Posto $I = [a, b[\,,\ a = (a_1, \ldots, a_h)\,,\ b = (b_1, \ldots, b_h)$, le ipotesi sugli intervalli I_1 e I_2 implicano che il punto a appartiene ad uno solo di tali intervalli; supponiamo, per fissare le idee, che sia $a \in I_1$. Si ha allora $I_1 = [a, \beta[$, essendo $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_h)$ un elemento di $\mathbb{R}^h$ tale che $a < \beta$ (dato che $I_1 \neq \emptyset$); risulta inoltre $\beta \leq b$ (dato che $I_1 = [a, \beta[\subseteq [a, b[$) e $\beta \neq b$ (altrimenti sarebbe $I_1 = I$ e quindi $I_2 = \emptyset$); in altre parole si ha che è $\beta_r \leq b_r$ per ogni $r = 1, \ldots, h$ ed esiste inoltre almeno un indice $s \in \{1, \ldots, h\}$ tale che $\beta_s < b_s$.

Verifichiamo che tale indice s è unico. Infatti, ragionando per assurdo e supponendo, ad esempio, che valgano entrambe le disuguaglianze $\beta_1 < b_1$ e $\beta_2 < b_2$, si ottiene che i punti

$$u = (\beta_1, a_2, a_3, \ldots, a_h) \quad , \quad v = (a_1, \beta_2, a_3, \ldots, a_h)$$

appartengono entrambi a $I \setminus I_1 = I_2$ e, di conseguenza ([8]), anche il punto $a = u \wedge v$ è un elemento di I_2, ma tale conclusione è assurda. Ciò prova l'unicità dell'indice s

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $s = 1$ e quindi

$$\beta = (\beta_1, b_2, \ldots, b_h) \quad , \quad I_1 \;=\; [a_1, \beta_1[\, \times [a_2, b_2[\, \times \ldots \times [a_h, b_h[\quad ,$$

da cui

$$I_2 \;=\; I \setminus I_1 \;=\; [\beta_1, b_1[\, \times [a_2, b_2[\, \times \ldots \times [a_h, b_h[\quad ,$$

cioè $I_2 = [\alpha, b[$, essendo $\alpha = (\beta_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Verifichiamo che vale la (7.2.12), cioè risulta

$$F[a; b] \;=\; F[a; \beta] + F[\alpha; b] \; .$$

Per comprendere meglio il ragionamento esaminiamo dapprima il caso particolare della dimensione $h = 2$. Si ha

$$F[a; \beta] \;=\; F(\beta_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(\beta_1, a_2) + F(a_1, a_2) \quad ,$$

$$F[\alpha; b] \;=\; F(b_1, b_2) - F(\beta_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(\beta_1, a_2) \quad ,$$

pertanto

$$F[a; \beta] + F[\alpha; b] \;=\; -F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) + F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) \;=\; F[a; b] \quad .$$

In generale si ragiona nel modo seguente. Posto

$$W_1 \;=\; \{a_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \ldots \times \{a_h, b_h\} \quad ,$$

$$W \;=\; \{\beta_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \ldots \times \{a_h, b_h\} \quad ,$$

$$W_2 \;=\; \{b_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \ldots \times \{a_h, b_h\} \quad ,$$

gli insiemi W, W_1 e W_2 sono a due a due disgiunti e si ha

$$V_{a,\beta} \;=\; W_1 \cup W \quad , \quad V_{\alpha,b} \;=\; W_2 \cup W \quad ,$$

$$V_{a,b} \;=\; W_1 \cup W_2 \quad ;$$

([8]) È ovvio che, se i punti $x = (x_1, \ldots, x_h)$ e $y = (y_1, \ldots, y_h)$ appartengono entrambi all'intervallo $J \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$, allora anche

$$x \wedge y = (\min\{x_1, y_1\}, \ldots, \min\{x_h, y_h\})$$

è un elemento di J.

inoltre è facile convincersi che

$$i_{a,\beta}(c) \;=\; i_{a,b}(c) \qquad\qquad \forall c \in W_1 \;,$$

$$i_{\alpha,b}(c) \;=\; i_{a,b}(c) \qquad\qquad \forall c \in W_2 \;,$$

$$i_{\alpha,b}(c) \;=\; i_{a,\beta}(c) \,+\, 1 \qquad\qquad \forall c \in W \;;$$

di conseguenza si ha

$$F[a;\beta] + F[\alpha;b] \;\;=$$

$$= \sum_{c\in W_1} (-1)^{i_{a,\beta}(c)} F(c) + \sum_{c\in W} (-1)^{i_{a,\beta}(c)} F(c) + \sum_{c\in W_2} (-1)^{i_{\alpha,b}(c)} F(c) + \sum_{c\in W} (-1)^{i_{\alpha,b}(c)} F(c) \;=$$

$$= \sum_{c\in W_1} (-1)^{i_{a,b}(c)} F(c) \;+\; \sum_{c\in W_2} (-1)^{i_{a,b}(c)} F(c) \;=$$

$$= \sum_{c\in V_{a,b}} (-1)^{i_{a,b}(c)} F(c) \;=\; F[a;b] \;\;.$$

Abbiamo così provato che la tesi è vera per $k = 2$.

Per completare il ragionamento per induzione supponiamo che l'asserto sia vero per l'indice k e dimostriamo che esso è vero pure per l'indice $k + 1$.

Siano $I_1, \ldots, I_k, I_{k+1} \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ intervalli a due a due disgiunti e tali che anche la loro unione $I = I_1 \cup \ldots \cup I_k \cup I_{k+1}$ sia un intervallo appartenente a $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$. Proviamo che risulta

$$(7.2.12)' \qquad \delta_F(I) \;=\; \delta_F(I_1) \,+\, \ldots \,+\, \delta_F(I_k) \,+\, \delta_F(I_{k+1}) \;.$$

Dall'ipotesi induttiva segue che la $(7.2.12)'$ è certamente verificata se qualcuno degli intervalli $I_1, \ldots, I_k, I_{k+1}$ è vuoto; supponiamo pertanto che nessuno di essi sia vuoto. Come nel caso $k = 2$ si ha che uno solo degli intervalli $I_1, \ldots, I_k, I_{k+1}$ contiene il punto a e, supponendo, per fissare le idee, che sia $a \in I_1$, possiamo scrivere $I_1 = [a, \beta[$, essendo $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_h)$ un elemento di $\mathbb{R}^h$ tale che $a < \beta \leq b$ e inoltre $\beta \neq b$. Si ha allora $\beta_r \leq b_r$ per ogni $r = 1, \ldots, h$ ed esiste almeno un indice $s \in \{1, \ldots, h\}$ tale che $\beta_s < b_s$. Supponiamo, ad esempio, che sia $\beta_1 < b_1$ e consideriamo gli intervalli $J, K \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ così definiti:

$$J \;=\; [a_1, \beta_1[\, \times [a_2, b_2[\, \times \ldots \times [a_h, b_h[\quad , \quad K \;=\; [\beta_1, b_1[\, \times [a_2, b_2[\, \times \ldots \times [a_h, b_h[\;\;,$$

di modo che risulta $J \cup K = I$, $J \cap K = \emptyset$ e, inoltre, $J \supseteq I_1$. Consideriamo poi il punto $\alpha = (\beta_1, a_2, \ldots, a_n)$ e osserviamo che esso appartiene ad uno solo degli intervalli $I_2, \ldots, I_{k+1}$. Supponiamo che sia $\alpha \in I_{k+1}$. Risulta allora $K \supseteq I_{k+1}$ (infatti, in caso contrario, l'intervallo I_{k+1} conterrebbe almeno un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_1 < \beta_1$ e quindi anche il punto $x' = (x_1, a_2, \ldots, a_n) = \alpha \wedge x$, che invece appartiene a I_1). Ne segue che è

$$J \;=\; I \cap J \;=\; I_1 \cup (I_2 \cap J) \cup \ldots \cup (I_k \cap J) \quad , \quad K \;=\; I \cap K \;=\; (I_2 \cap K) \cup \ldots \cup (I_k \cap K) \cup I_{k+1} \;\;;$$

pertanto, grazie all'ipotesi induttiva ed al caso $k = 2$, tenuto conto anche del successivo Lemma 7.2.3, a), concludiamo che è

$$\delta_F(I) \;=\; \delta_F(J) + \delta_F(K) \;=$$

$$= \Big[\delta_F(I_1) + \delta_F(I_2 \cap J) + \ldots + \delta_F(I_k \cap J)\Big] + \Big[\delta_F(I_2 \cap K) + \ldots + \delta_F(I_k \cap K) + \delta_F(I_{k+1})\Big] \;=$$

$$= \;\delta_F(I_1) + \Big[\delta_F(I_2 \cap J) + \delta_F(I_2 \cap K)\Big] + \ldots + \Big[\delta_F(I_k \cap J) + \delta_F(I_k \cap K)\Big] + \delta_F(I_{k+1}) \;=$$

$$= \;\delta_F(I_1) + \delta_F(I_2) + \ldots + \delta_F(I_k) + \delta_F(I_{k+1}) \;\; .$$

Osservazione 7.2.4. È chiaro dalla precedente dimostrazione che il Lemma 7.2.1 vale per una qualsiasi funzione $F : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$; non è necessario che F una funzione di distribuzione su $\mathbb{R}^h$.

Questa osservazione sarà utile nella dimostrazione del Teorema 7.2.2.

Lemma 7.2.2. *Per ogni* $I \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ *ed ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $J \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ *tale che*

$$\overline{J} \subseteq I \quad , \quad \Big|\delta_F(J) - \delta_F(I)\Big| < \varepsilon \;\; .$$

Dimostrazione. Se $I = \emptyset$ la tesi si ottiene prendendo $J = \emptyset$. Se $I = [a, b[\, \neq \emptyset$ l'intervallo J si trova tra gli intervalli del tipo $[a, c[$ con $a < c < b$; infatti, dato che la funzione

$$(x_1, \ldots, x_k) \;\to\; F(x_1, \ldots, x_k)$$

è continua dalla sinistra rispetto alla variabile x_1, esiste $c_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 < c_1 < b_1$, tale che

$$\Big|\,\delta_F([a, (c_1, b_2, \ldots, b_h)[\,) \;-\; \delta_F([a, b[\,)\,\Big| \;<\; \frac{\varepsilon}{h} \;;$$

analogamente, per la continuità dalla sinistra rispetto alla variabile x_2, esiste $c_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 < c_2 < b_2$, tale che

$$\Big|\,\delta_F([a, (c_1, c_2, b_3, \ldots, b_h)[\,) \;-\; \delta_F([a, (c_1, b_2, b_3, \ldots, b_h)[\,)\,\Big| \;<\; \frac{\varepsilon}{h} \;;$$

proseguendo in questo modo (cioè diminuendo opportunamente, una alla volta, le componenti del punto b) alla fine si trova un punto $c = (c_1, \ldots, c_h) \in \mathbb{R}^h$, $a < c < b$, tale che

$$\Big|\,\delta_F([a, c[\,) \;-\; \delta_F([a, b[\,)\,\Big| \;\leq$$

$$\leq \;\Big|\,\delta_F([a, c[\,) \;-\; \delta_F([a, (c_1, \ldots, c_{h-1}, b_h[\,)\,\Big| \;+\; \ldots \;+\; \Big|\,\delta_F([a, (c_1, b_2, \ldots, b_h)[\,) \;-\; \delta_F([a, b[\,)\,\Big| \;<$$

$$< \;\frac{\varepsilon}{h} \;+\; \ldots \;+\; \frac{\varepsilon}{h} \;=\; \varepsilon \;\; .$$

Lemma 7.2.3. *Le famiglie di insiemi* $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ *e* $\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ *hanno le seguenti proprietà:*

a) $I, J \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}} \implies I \cap J \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ *;*

b) $I, J \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}} \implies I \backslash J$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti;*

c) $I \in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, $A \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{d}} \implies I \setminus A$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti;*

d) *ogni insieme* $A \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ *è unione finita di intervalli appartenenti a* $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$*, a due a due disgiunti.*

Dimostrazione. La dimostrazione di a), c) e d) è identica a quella del caso unidimensionale. Proviamo la b). Supposto, come nella dimostrazione del Lemma 7.1.3, che sia $J \subseteq I$, $J \neq \emptyset$ e posto

$$I \ = \ [a, b[\quad , \quad J \ \ [c, d[\quad ,$$

$$a = (a_1, \ldots, a_h) \ \ , \ \ b = (b_1, \ldots, b_h) \ \ , \ \ c = (c_1, \ldots, c_h) \ \ , \ \ d = (d_1, \ldots, d_h) \ ,$$

consideriamo, per ogni $i = 1, \ldots, h$, i seguenti intervalli di $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$:

$$K_i^1 = [a_i, c_i[\quad , \quad K_i^2 = [c_i, d_i[\quad , \quad K_i^3 = [d_i, b_i[\ \ ;$$

osserviamo che i 3^h intervalli di $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ che si ottengono considerando tutti i possibili prodotti

$$K_1^{r_1} \times K_2^{r_2} \times \ldots \times K_h^{r_h} \quad ,$$

con $(r_1, r_2, \ldots, r_h) \in \{1, 2, 3\}^h$, sono a due a due disgiunti e hanno per unione l'intervallo I; si ha inoltre, in particolare,

$$J \ = \ K_1^2 \times K_2^2 \times \ldots \times K_h^2 \ ;$$

di conseguenza l'insieme $I \backslash J$ è l'unione di $3^h - 1$ intervalli di $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ a due a due disgiunti, precisamente

$$I \setminus J \ = \bigcup_{\substack{(r_1, r_2, \ldots, r_h) \in \{1,2,3\}^h \\ (r_1, r_2, \ldots, r_h) \neq (2,2,\ldots,2)}} K_1^{r_1} \times K_2^{r_2} \times \ldots \times K_h^{r_h} \quad .$$

Le dimostrazioni dei successivi Lemmi 7.2.4 - 7.2.6 sono identiche a quelle del caso $h = 1$.

Lemma 7.2.4. *La famiglia di insiemi* $\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ *è un anello in* $\mathbb{R}^h$*.*

Lemma 7.2.5. *Esiste ed è unico* ν_F*, contenuto sull'anello* $\mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$*, tale che*

$$\nu_F(I) \ = \ F[a; b] \qquad\qquad \forall I = [a, b[\in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}} \ .$$

Lemma 7.2.6. *Per ogni* $A \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ *ed ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $B \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{d}}$ *tale che*

$$\overline{B} \subseteq A \quad , \quad \left| \nu_F(B) - \nu_F(A) \right| < \varepsilon \ \ .$$

Passiamo ora ad occuparci del Teorema 7.2.2 e della Proposizione 7.2.1. Per semplicità consideriamo soltanto il caso $h = 2$.

Dimostrazione del Teorema 7.2.2 nel caso $h = 2$. Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}^2$.

È chiaro che, per dimostrare il teorema, sarà sufficiente provare che esiste una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni seguenti:

k) $\quad \delta_F(I) \ = \ \mu(I) \qquad \forall I \in \mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$

(il significato di δ_F è quello precisato nel Lemma 7.2.1);

kk) *la funzione* $F = F(x_1, x_2)$ *è continua dalla sinistra rispetto alle variabili* $x = (x_1, x_2)$*, nel loro complesso.*

Consideriamo, a tale scopo, la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$F(x_1, x_2) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 x_2 = 0\,, \\ \mu\big([0, x_1[\times[0, x_2[\big) & \text{se } x_1 > 0\,,\ x_2 > 0\,, \\ -\mu\big([x_1, 0[\times[0, x_2[\big) & \text{se } x_1 < 0\,,\ x_2 > 0\,, \\ \mu\big([x_1, 0[\times[x_2, 0[\big) & \text{se } x_1 < 0\,,\ x_2 < 0\,, \\ -\mu\big([0, x_1[\times[x_2, 0[\big) & \text{se } x_1 > 0\,,\ x_2 < 0\,. \end{cases}$$

Notiamo che, una volta che si è posto $F(x_1, x_2) = 0$ se $x_1 x_2 = 0$, la legge di F nei punti $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x_1 x_2 \neq 0$ rimane determinata dalla richiesta che valga la k); infatti, se $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ è tale che $x_1 x_2 \neq 0$, considerato l'unico intervallo non vuoto $J \in \mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$ avente la proprietà che i punti (x_1, x_2) e $(0, 0)$ appartengano entrambi all'insieme dei vertici di J, cioè l'intervallo

$$J \ = \ [x_1 \wedge 0\,,\ x_1 \vee 0[\times[x_2 \wedge 0\,,\ x_2 \vee 0[\quad ,$$

il valore $F(x_1, x_2)$ si ricava imponendo la condizione che sia soddisfatta l'uguaglianza $\delta_F(J) = \mu(J)$; in questo modo si ottiene $F(x_1, x_2) = \mu(J)$ oppure $F(x_1, x_2) = -\mu(J)$ a seconda che sia $x_1 x_2 > 0$ oppure $x_1 x_2 < 0$.

Verifichiamo che la funzione F soddisfa le condizioni k) e kk).

Iniziamo dalla kk). Occorre provare che, fissati ad arbitrio un punto $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ ed una successione $\{c_n\} = \{(c_{n1}, c_{n2})\}$ di punti di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$c_n \ \leq \ c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n \ = \ c \quad ,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \ = \ F(c) \quad .$$

Distinguiamo i due casi $c_1 c_2 \neq 0$ e $c_1 c_2 = 0$.

Se $c_1 c_2 \neq 0$ possiamo supporre, ovviamente, che i termini di ognuna delle successioni $\{c_{ni}\}$, $i = 1, 2$, siano numeri aventi tutti lo stesso segno del limite c_i.

Consideriamo l'unico intervallo non vuoto di $\mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$ avente la proprietà che i punti c e $(0, 0)$ appartengano entrambi all'insieme dei suoi vertici, cioè l'intervallo

$$[c_1 \wedge 0\,,\ c_1 \vee 0[\times[c_2 \wedge 0\,,\ c_2 \vee 0[\quad ,$$

e denotiamo tale intervallo con

$$\Delta \ = \ [a, b[\qquad (\, a = (a_1, a_2)\ ,\ b = (b_1, b_2)\,) \quad .$$

Analogamente, per ogni $\mathbb{N}$, consideriamo l'unico intervallo non vuoto di $\mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$ avente la proprietà che i punti c_n e $(0,0)$ appartengano entrambi all'insieme dei suoi vertici, cioè l'intervallo

$$[c_{n1} \wedge 0\,,\, c_{n1} \vee 0[\times [c_{n2} \wedge 0\,,\, c_{n2} \vee 0[\quad ,$$

e denotiamo tale intervallo con

$$\Delta_n \;=\; [a_n, b_n[\qquad \bigl(a_n = (a_{n1}, a_{n2}) \;,\; b_n = (b_{n1}, b_{n2}) \bigr) \quad .$$

Per quanto osservato inizialmente a proposito della legge di definizione di F nei punti $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x_1 x_2 \neq 0$, risulta

$$F(c) \;=\; \mu(\Delta) \qquad \text{e} \qquad F(c_n) \;=\; \mu(\Delta_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

oppure

$$F(c) \;=\; -\mu(\Delta) \qquad \text{e} \qquad F(c_n) \;=\; -\mu(\Delta_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

secondo che sia $c_1 c_2 > 0$ oppure $c_1 c_2 < 0$; pertanto, in qualunque caso, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$|F(c_n) - F(c)| \;=\; |\mu(\Delta_n) - \mu(\Delta)| \;=\; |\mu(\Delta_n \setminus \Delta) + \mu(\Delta_n \cap \Delta) - \mu(\Delta)| \quad .$$

Per conseguire la tesi basta provare che valgono le seguenti due relazioni di limite:

(7.2.13) $$\lim_{n\to\infty} \mu(\Delta_n \setminus \Delta) \;=\; 0 \quad ,$$

(7.2.14) $$\lim_{n\to\infty} \mu(\Delta_n \cap \Delta) \;=\; \mu(\Delta) \quad .$$

Dall'ipotesi

$$\lim_{n\to\infty} c_n \;=\; c$$

segue che, per ogni $i = 1, 2$, si ha

(7.2.15) $$\lim_{n\to\infty} a_{ni} \;=\; \lim_{n\to\infty} (c_{ni} \wedge 0) \;=\; c_i \wedge 0 \;=\; a_i \quad ,$$

(7.2.15)$'$ $$\lim_{n\to\infty} b_{ni} \;=\; \lim_{n\to\infty} (c_{ni} \vee 0) \;=\; c_i \vee 0 \;=\; b_i$$

e quindi, dato che $a_i < b_i$, risulta, per n sufficientemente grande,

$$a_i \;<\; b_{ni} \quad .$$

A sua volta, l'ipotesi $c_n \leq c \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ implica che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $i = 1, 2$, risulta

(7.2.16) $$a_{ni} \;=\; c_{ni} \wedge 0 \;\leq\; c_i \wedge 0 \;=\; a_i \quad ,$$

(7.2.16)$'$ $$b_{ni} \;=\; c_{ni} \vee 0 \;\leq\; c_i \vee 0 \;=\; b_i \quad .$$

Pertanto si ha, per n sufficientemente grande,

$$\Delta_n \cap \Delta \ = \ \big([a_{n1}, b_{n1}[\times[a_{n2}, b_{n2}[\big) \ \cap \big([a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\big) \ = \tag{7.2.17}$$

$$= \ [a_{n1} \vee a_1, b_{n1} \wedge b_1[\times[a_{n2} \vee a_2, b_{n2} \wedge b_2[\ = \ [a_1, b_{n1}[\times[a_2, b_{n2}[\ .$$

Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, determiniamo in corrispondenza, come è certamente possibile, un numero δ, $0 < \delta < \min\{b_1 - a_1, b_2 - a_2\}$, tale che, posto

$$R \ = \ [a_1, b_1 - \delta[\times[a_2, b_2 - \delta[\ ,$$

risulti

$$\mu(R) \ > \ \mu(\Delta) - \varepsilon \ . \qquad (^9)$$

Dalle $(7.2.15)'$ e (7.2.17) segue che, per n sufficientemente grande, si ha

$$R \ \subseteq \ \Delta_n \cap \Delta$$

e quindi

$$|\mu(\Delta_n \cap \Delta) - \mu(\Delta)| \ =$$

$$= \ \mu(\Delta) - \mu(\Delta_n \cap \Delta) \ \leq \ \mu(\Delta) - \mu(R) \ < \ \varepsilon \ .$$

Ciò prova la (7.2.14).

Per provare la (7.2.13) osserviamo che, essendo le successioni $\{a_{ni}\}$, $\{b_{ni}\}$, $i = 1, 2$, convergenti, possiamo trovare due intervalli $[\alpha_i, \beta_i[$, $i = 1, 2$, elementi di $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, tali che

$$[a_{ni}, b_{ni}[\ \subseteq \ [\alpha_i, \beta_i[\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall i = 1, 2 \ .$$

Si ha allora, ricordando la (7.2.17) e la (7.2.16), per n sufficientemente grande,

$$\Delta_n \setminus \Delta \ = \ \Delta_n \setminus (\Delta_n \cap \Delta) \ = \tag{7.2.18}$$

$$= \ \big([a_{n1}, a_1[\times \, [a_{n2}, b_{n2}[\big) \ \cup \big([a_{n1}, b_{n1}[\times[a_{n2}, a_2[\big) \ \subseteq$$

$$\subseteq \big([a_{n1}, a_1[\times[\alpha_2, \beta_2[\big) \ \cup \big([\alpha_1, \beta_1[\times[a_{n2}, a_2[\big) \ .$$

Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, scegliamo in corrispondenza, come è certamente possibile, un $\sigma > 0$ tale che, posto

$$S \ = \ \big([a_1 - \sigma, a_1[\times[\alpha_2, \beta_2[\big) \ \cup \ \big([\alpha_1, \beta_1[\times[a_2 - \sigma, a_2[\big) \ ,$$

---

(9) Per convincersi dell'esistenza di δ basta applicare la proprietà di continuità verso l'alto della misura μ alla successione di insiemi $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, essendo

$$R_k \ = \ \Big[a_1, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{k}\Big[\ \times \ \Big[a_2, b_2 - \frac{b_2 - a_2}{k}\Big[\qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

risulti

$$\mu(S) \ < \ \varepsilon \ . \qquad (^{10})$$

Per la (7.2.18) e la (7.2.15) si ha, per n sufficientemente grande,

$$\Delta_n \setminus \Delta \ \subseteq \ S$$

e quindi

$$\mu(\Delta_n \setminus \Delta) \ < \ \varepsilon \ .$$

Ciò prova la (7.2.13).

Esaminiamo adesso il caso $c_1 c_2 = 0$. Dato che $F(x_1, x_2) = 0$ se $x_1 x_2 = 0$, si ha $F(c) = 0$ ed inoltre, per dimostrare che è vera la tesi, cioè che risulta

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \ = \ F(c) \ \ ,$$

è lecito supporre che tutti i termini della successione $\{c_n\}$ siano tali che $c_{n1}c_{n2} \neq 0$. In questo modo, mantenendo le notazioni

$$\Delta_n \ = \ [a_{n1}, b_{n1}[\times [a_{n2}, b_{n2}[\ = \ [c_{n1} \wedge 0\,,\, c_{n1} \vee 0[\times [c_{n2} \wedge 0\,,\, c_{n2} \vee 0[\qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,$$

precedentemente introdotte, per quanto osservato inizialmente a proposito della legge di definizione di F si ha

$$|F(c_n) - F(c)| \ = \ \mu(\Delta_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

Proviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Delta_n) \ = \ 0 \ \ . \tag{7.2.19}$$

Osserviamo che anche in questo caso risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_{ni} \ = \ c_i \wedge 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_{ni} \ = \ c_i \vee 0 \quad , \qquad i = 1, 2\ .$$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $c_1 = 0$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n1} \ = \ \lim_{n\to\infty} b_{n1} \ = \ 0 \ \ . \tag{7.2.20}$$

Poiché le successioni $\{a_{n2}\}$, $\{b_{n2}\}$ sono convergenti, esiste un intervallo $[\alpha_2, \beta_2[\in \mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$ tale che

$$[a_{n2}, b_{n2}[\ \subseteq \ [\alpha_2, \beta_2[\qquad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

(10) L'esistenza di σ si prova applicando la proprietà di $\emptyset$-continuità di μ alla successione di insiemi $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definita ponendo

$$S_k \ = \ \left(\left[a_1 - \frac{1}{k}, a_1\right[\ \times \ \left[\alpha_2, \beta_2\right[\right) \ \cup \ \left(\left[\alpha_1, \beta_1\right[\ \times \ \left[a_2 - \frac{1}{k}, a_2\right[\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, determiniamo un $\rho > 0$ tale che, posto

$$T \;=\; [-\rho, \rho[\times [\alpha_2, \beta_2[\quad ,$$

risulti

$$\mu(T) \;<\; \varepsilon \quad . \qquad (^{11})$$

Si ha allora, grazie alla (7.2.20), per n sufficientemente grande,

$$\Delta_n \;\subseteq\; T$$

e quindi

$$\mu(\Delta_n) \;\leq\; \mu(T) \;<\; \varepsilon \quad .$$

Ciò prova la (7.2.19).

Occupiamoci adesso della proprietà k).
Sia $I \;=\; [a, b[\;=\; [(a_1, b_1), (a_2, b_2)[\;\in\; \mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$.
L'uguaglianza

$$\delta_F(I) \;=\; \mu(I) \tag{7.2.21}$$

è ovviamente verificata se $I = \emptyset$; è inoltre immediato constatare, tenendo presente la definizione della funzione F, che tale uguaglianza sussiste se $I \neq \emptyset$ e $(0,0) \in V_{a,b}$.

Per acquisire la validità della (7.2.21) in generale consideriamo gli insiemi

$$Q_{11} \;=\,]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[\qquad , \qquad Q_{12} \;=\,]-\infty, 0[\times [0, +\infty[\quad ,$$

$$Q_{21} \;=\; [0, +\infty[\times]-\infty, 0[\qquad , \qquad Q_{22} \;=\; [0, +\infty[\times [0, +\infty[$$

ed osserviamo che tali insiemi costituiscono una partizione di $\mathbb{R}^2$ e si ha

$$I \cap Q_{ij} \;\in\; \mathcal{I}_2^{\mathrm{d}} \quad , \qquad\qquad i = 1, 2\, ;\; j = 1, 2\ . \tag{7.2.22}$$

Proviamo che la (7.2.21) vale se l'intervallo I è contenuto in qualcuno degli insiemi Q_{ij}. Consideriamo, ad esempio, il caso dell'insieme Q_{12}. Escluse le eventualità già considerate (cioè che sia $I = \emptyset$ oppure $I \neq \emptyset$ e $(0,0) \in V_{a,b}$), si hanno le seguenti possibilità:

1) $b_1 < 0$, $a_2 = 0$;

2) $b_1 = 0$, $a_2 > 0$;

3) $b_1 < 0$, $a_2 > 0$.

(^{11}) Anche in questo caso, per provare l'esistenza di ρ, si tratta di applicare la proprietà di $\emptyset$-continuità di μ ad un'opportuna successione di insiemi, precisamente alla successione di insiemi $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, essendo

$$T_k \;=\; \Big[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \Big[\;\times\; \Big[\alpha_2, \beta_2 \Big[\qquad\qquad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Nel caso 1) possiamo esprimere l'intervallo $[a,b[$ come differenza di due intervalli di $\mathcal{I}_2^{\mathrm{d}} \setminus \{\emptyset\}$ aventi entrambi il punto $(0,0)$ tra i loro vertici; si ha infatti

$$[a,b[\,=\, [(a_1,0),(b_1,b_2)[\,=\, [(a_1,0),(0,b_2)[\,\setminus\, [(b_1,0),(0,b_2)[\ \ ;$$

pertanto, dato che la funzione di insieme δ_F è finitamente additiva ([12]) e che la (7.2.21) vale per gli intervalli che hanno tra i loro vertici il punto $(0,0)$, si ha

$$\begin{aligned}\delta_F\big([a,b[\big) \;&=\; \delta_F\big([(a_1,0),(0,b_2)[\big) \;-\; \delta_F\big([(b_1,0),(0,b_2)[\big) \;=\\ &=\; \mu\big([(a_1,0),(0,b_2)[\big) \;-\; \mu\big([(b_1,0),(0,b_2)[\big) \;=\; \mu\big([a,b[\big) \ \ .\end{aligned}$$

Analogamente, nel caso 2), basta scrivere

$$[a,b[\,=\, [(a_1,a_2),(0,b_2)[\,=\, [(a_1,0),(0,b_2)[\,\setminus\, [(a_1,0),(0,a_2)[\ \ .$$

Infine, nel caso 3), basta osservare che è

$$\begin{aligned}[a,b[\,=\, [(a_1,a_2),(b_1,b_2)[\,=\\ = [(a_1,0),(0,b_2)[\,\setminus\, \big([(a_1,0),(b_1,a_2)[\,\cup\, [(b_1,0),(0,b_2)[\big)\end{aligned}$$

e utilizzare, come in precedenza, i casi di validità della (7.2.21) già acquisiti e la finita additività della δ_F.

Per completare la dimostrazione del teorema, proviamo che la (7.2.21) vale qualunque sia l'intervallo $I \in \mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$. Basta scrivere

$$I \;=\; (I \cap Q_{11}) \,\cup\, (I \cap Q_{12}) \,\cup\, (I \cap Q_{21}) \,\cup\, (I \cap Q_{22}) \ \ ,$$

tenere presente la (7.2.22) e fare uso, ancora una volta, dei casi di validità della (7.2.21) già acquisiti e della finita additività di δ_F.

Dimostrazione della Proposizione 7.2.1 nel caso $h = 2$. Siano F, F_1 due funzioni di distribuzione su $\mathbb{R}^2$.

Se F, F_1 sono tali che

$$F(x_1,x_2) \;-\; F_1(x_1,x_2) \;=\; \widetilde{H}_1(x_1) \;+\; \widetilde{H}_2(x_2) \qquad\qquad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

essendo $\widetilde{H}_1,\ \widetilde{H}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni di una sola variabile, allora, per ogni intervallo $I = [a,b[\,= [(a_1,a_2),(b_1,b_2)[\,\in \mathcal{I}_2^{\mathrm{d}}$, $I \neq \emptyset$, si ha

$$F[a;b] \;=\; F(b_1,b_2) \,-\, F(a_1,b_2) \,-\, F(b_1,a_2) \,+\, F(a_1,a_2) \;=$$

$$F_1(b_1,b_2) \,+\, \widetilde{H}_1(b_1) \,+\, \widetilde{H}_2(b_2) \;-\; \Big[F_1(a_1,b_2) \,+\, \widetilde{H}_1(a_1) \,+\, \widetilde{H}_2(b_2)\Big] \;-$$

$$-\; \Big[F_1(b_1,a_2) \,+\, \widetilde{H}_1(b_1) \,+\, \widetilde{H}_2(a_2)\Big] \;+\; F_1(a_1,a_2) \,+\, \widetilde{H}_1(a_1) \,+\, \widetilde{H}_2(a_2) \;=$$

$$=\; F_1(b_1,b_2) \,-\, F_1(a_1,b_2) \,-\, F_1(b_1,a_2) \,+\, F_1(a_1,a_2) \;=\; F_1[a;b] \ \ ,$$

pertanto $\mu_F = \mu_{F_1}$.

([12]) Si tenga presente l'Osservazione 7.2.5.

Viceversa, se $\mu_F = \mu_{F_1}$, considerata la differenza

$$F(x_1,0) + F(0,x_2) - F(0,0) \; - \; \big[F_1(x_1,0) + F_1(0,x_2) - F_1(0,0)\big] \quad , \qquad\qquad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

che, ovviamente, può essere scritta come somma

$$\widetilde{H}_1(x_1) \; + \; \widetilde{H}_2(x_2)$$

di due funzioni di una sola variabile, risulta

$$F(x_1,x_2) \; - \; F_1(x_1,x_2) \; = \; \widetilde{H}_1(x_1) \; + \; \widetilde{H}_2(x_2) \tag{7.2.23}$$

per ogni $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ciò è ovvio se $x_1 = 0$ oppure $x_2 = 0$.

Se $x_1x_2 \neq 0$, per pervenire alla (7.2.3), basta considerare l'intervallo

$$J \; = \; [x_1 \wedge 0 \, , \, x_1 \vee 0[\; \times \; [x_2 \wedge 0 \, , \, x_2 \vee 0[$$

e tenere presente che, per ipotesi, è

$$\delta_F(J) \; = \; \delta_{F_1}(J) \quad ;$$

infatti, supponendo, per fissare le idee, che sia $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, si ha

$$J \; = \; [(x_1,0),(0,x_2)[\ ,$$

quindi

$$\delta_F(J) \; = \; F(0,x_2) - F(x_1,x_2) - F(0,0) + F(x_1,0) \quad ,$$

$$\delta_{F_1}(J) \; = \; F_1(0,x_2) - F_1(x_1,x_2) - F_1(0,0) + F_1(x_1,0) \quad ,$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene la tesi.

Occupiamoci infine del Teorema 7.2.3. Premettiamo un lemma.

Lemma 7.2.7. *Sia μ una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^h$ e sia $F : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$ la funzione definita tramite la* (7.2.7).

Risulta

$$\mu([a,b[\,) \; = \; F[a;b] \qquad\qquad \forall [a,b[\, \in \mathcal{I}_h^{\mathrm{d}} \ .$$

Dimostrazione. L'uguaglianza $\mu([a,b[\,) = F[a;b]$ è banalmente vera se $[a,b[= \emptyset$, pertanto d'ora in avanti, nel corso della dimostrazione, ci riferiremo al caso $[a,b[\neq \emptyset$.

Notiamo subito che la tesi è di immediata verifica per $h = 1$ (si ha infatti, per la proprietà di sottrattività,

$$\mu([a,b[\,) \; = \mu(\,]-\infty,b[\,) - \mu(\,]-\infty,a[\,) \; = \; F(b) - F(a) \; = F[a;b] \ )$$

ed è già stata dimostrata, nel corso delle considerazioni svolte all'inizio del paragrafo, nel caso $h = 2$.

Procediamo per induzione su h.

Supponiamo che μ sia una misura finita su $\mathcal{B}_{h+1}$ e che $F : \mathbb{R}^{h+1} \to \mathbb{R}$ sia la corrispondente funzione definita tramite la (7.2.7), cioè:

$$F(x_1, \dots, x_h, x_{h+1}) \;=\; \mu(\,]-\infty, x_1[\,\times\,\dots\,\times\,]-\infty, x_h[\,\times\,]-\infty, x_{h+1}[\,)$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_h, x_{h+1}) \in \mathbb{R}^{h+1} \;.$$

Sia, inoltre,

$$[a, b[\;=\;[a, b[\,\times\,\dots\,\times\,[a_h, b_h[\,\times\,[a_{h+1}, b_{h+1}[$$

un qualunque intervallo non vuoto appartenente alla famiglia $\mathcal{I}^{\mathrm{d}}_{h+1}$.

Identifichiamo $\mathbb{R}^{h+1}$ con $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}$ mediante la bigezione

$$\big(x_1, \dots, x_h, x_{h+1}\big) \;\to\; \big((x_1, \dots, x_h), x_{h+1}\big) \;. \tag{7.2.24}$$

Possiamo allora scrivere

$$[a, b[\;=\;[a', b'[\,\times\,[a_{h+1}, b_{h+1}[\;,$$

essendo a', b' gli elementi di $\mathbb{R}^h$ di componenti

$$a' \;=\; (a_1, \dots, a_h) \quad , \quad b' \;=\; (b_1, \dots, b_h) \;.$$

Inoltre, fissato un qualunque $\gamma \in \mathbb{R}$, sono vere le seguenti due affermazioni:

i) *per ogni $E \in \mathcal{B}_h$ il prodotto $E \times\,]-\infty, \gamma[$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{B}_{h+1}$;*

ii) *la funzione $\mu_\gamma : \mathcal{B}_h \to \mathbb{R}$, definita ponendo*

$$\mu_\gamma(E) \;=\; \mu\big(E \times\,]-\infty, \gamma\,[\big) \qquad \forall E \in \mathcal{B}_h \;,$$

è una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^h$

(per provare la i) basta considerare la famiglia $\mathcal{E}$ costituita dagli insiemi $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^h)$ aventi la proprietà che il prodotto $E \times\,]-\infty, \gamma[$ appartenga a $\mathcal{B}_{h+1}$ e verificare che $\mathcal{E}$ è una σ-algebra in $\mathbb{R}^h$ che contiene la famiglia degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^h$; la dimostrazione della ii) si riduce ad una facile verifica).

Consideriamo adesso le due misure di Borel finite $\mu_{a_{h+1}}$, $\mu_{b_{h+1}}$, cioè

$$\mu_{a_{h+1}}(E) \;=\; \mu\big(E \times\,]-\infty, a_{h+1}[\,\big) \quad , \quad \mu_{b_{h+1}}(E) \;=\; \mu\big(E \times\,]-\infty, b_{h+1}[\,\big) \qquad \forall E \in \mathcal{B}_h \;,$$

e le relative funzioni $F_{a_{h+1}}, F_{b_{h+1}} : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$, definite ponendo

$$F_{a_{h+1}}(x_1, \dots, x_h) \;=\; \mu_{a_{h+1}}(\,]-\infty, x_1[\,\times\,\dots\,\times\,]-\infty, x_h[\,) \;,$$

$$F_{b_{h+1}}(x_1, \dots, x_h) \;=\; \mu_{b_{h+1}}(\,]-\infty, x_1[\,\times\,\dots\,\times\,]-\infty, x_h[\,)$$

$$\forall (x_1, \dots, x_h) \in \mathbb{R}^h \;,$$

cioè

$$F_{a_{h+1}}(x_1,\dots,x_h) \;=\; F(x_1,\dots,x_h,a_{h+1}) \quad , \quad F_{b_{h+1}}(x_1,\dots,x_h) \;=\; F(x_1,\dots,x_h,b_{h+1}) \qquad \forall (x_1,\dots,x_h)\in\mathbb{R}^h \;.$$

Per l'ipotesi induttiva si ha

$$(7.2.25)_a \qquad \mu([a',b'[\times]-\infty,a_{h+1}[) \;=\; \mu_{a_{h+1}}([a',b'[) \;=\; F_{a_{h+1}}[a';b'] \;=\; \sum_{c'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(c')} F_{a_{h+1}}(c') \;,$$

$$(7.2.25)_b \qquad \mu([a',b'[\times]-\infty,b_{h+1}[) \;=\; \mu_{b_{h+1}}([a',b'[) \;=\; F_{b_{h+1}}[a';b'] \;=\; \sum_{c'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(c')} F_{b_{h+1}}(c') \;.$$

Grazie all'identificazione di $\mathbb{R}^{h+1}$ con $\mathbb{R}^h\times\mathbb{R}$ ottenuta tramite la (7.2.24), l'insieme $V_{a,b}$ dei vertici di $[a,b]$ si può esprimere nel seguente modo:

$$V_{a,b} \;=\; V_{a',b'}\times\left\{a_{h+1},b_{h+1}\right\} \;=\; \left\{c=(c',c_{h+1})\in\mathbb{R}^{h+1}\;:\; c'\in V_{a',b'}\;,\; c_{h+1}\in\left\{a_{h+1},b_{h+1}\right\}\right\} \;;$$

una breve riflessione mostra inoltre che, per ogni $c=(c',c_{h+1})\in V_{a,b}$, risulta

$$i_{a,b}(c) \;=\; \begin{cases} i_{a',b'}(c') & \text{se } c_{h+1}=b_{h+1}\,, \\ i_{a',b'}(c')+1 & \text{se } c_{h+1}=a_{h+1}\,. \end{cases}$$

Ne segue, ricordando le (7.2.25), che

$$\mu(\,[a,b[\,) \;=\; \mu(\,[a',b'[\times[a_{h+1},b_{h+1}[\,) \;=$$

$$=\; \mu(\,[a',b'[\times]-\infty,b_{h+1}[\,) \;-\; \mu(\,[a',b'[\times]-\infty,a_{h+1}[\,) \;=$$

$$=\; \sum_{c'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(c')} F_{b_{h+1}}(c') \;-\; \sum_{c'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(c')} F_{a_{h+1}}(c') \;=$$

$$=\; \sum_{c'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(c')} F(c',b_{h+1}) \;-\; \sum_{c'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(c')} F(c',a_{h+1}) \;=$$

$$=\; \sum_{c\in V_{a,b}} (-1)^{i_{a,b}(c)} F(c) \;=\; F[a;b] \;.$$

Ciò completa la dimostrazione del lemma.

Dimostrazione del Teorema 7.2.3. Per dimostrare la proprietà 1) osserviamo che essa è equivalente a

(7.2.26) *per ogni* $c = (c_1, c_2, \dots, c_h) \in \mathbb{R}^h$ *ed ogni successione* $\{c_n\} = \{(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nh})\}$ *di elementi di* $\mathbb{R}^h$ *tale che*

$$c_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \; = \; F(c)$$

e che, a sua volta, la (7.2.26) equivale (grazie al successivo Lemma 7.2.8) a

(7.2.27) *per ogni* $c = (c_1, c_2, \dots, c_h) \in \mathbb{R}^h$ *ed ogni successione* $\{c_n\} = \{(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nh})\}$ *di elementi di* $\mathbb{R}^h$ *tale che*

$$(**) \qquad c_n \leq c_{n+1} \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \; = \; F(c) \quad .$$

La validità della (7.2.27) per la funzione F definita tramite la (7.2.7) segue poi dalla proprietà di continuità verso l'alto della misura μ; infatti, se $\{c_n\}$ e c verificano le (**), si ha

$$]-\infty, c_{n1}[\times]-\infty, c_{n2}[\times \dots \times]-\infty, c_{nh}[\;\uparrow\;]-\infty, c_1[\times]-\infty, c_2[\times \dots \times]-\infty, c_h[\quad .$$

Una volta acquisita la proprietà 1), il fatto che F sia una funzione di distribuzione della misura μ segue immediatamente dal Lemma 7.2.7.

Per quanto concerne le proprietà 2) e 3), anche queste sono conseguenze delle proprietà di continuità della misura μ, precisamente della proprietà di continuità verso l'alto la 2) e della proprietà di $\emptyset$-continuità la 3). Ad esempio, nel caso della proprietà 2), il ragionamento è il seguente: si osserva che il sussistere della (7.2.8) equivale al verificarsi della seguente circostanza:

(7.2.28) *per ogni ogni successione* $\{c_n\} = \{(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nh})\}$ *di elementi di* $\mathbb{R}^h$ *tale che*

$$c_n \leq c_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_{ni} = +\infty \quad \forall i = 1, 2, \dots, h$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} F(c_n) \; = \; \mu(\mathbb{R}^h)$$

e che la validità della (7.2.28) è assicurata dalla proprietà di continuità verso l'alto della misura μ dal momento che

$$]-\infty, c_{n1}[\times]-\infty, c_{n2}[\times \dots \times]-\infty, c_{nh}[\;\uparrow\;\mathbb{R}^h \quad .$$

Proviamo adesso che F gode della proprietà 4). Fissato il gruppo di variabili $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, identifichiamo lo spazio $\mathbb{R}^h$ con il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{h-k}$ mediante la bigezione

$$(x_1, x_2, \dots, x_h) \;\to\; \big((x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), (x_{j_1}, \dots, x_{j_{h-k}})\big) \quad .$$

Ragionando come nel Lemma 7.2.7 si ha che, fissati comunque i valori $(\overline{x}_{j_1}, \ldots, \overline{x}_{j_{h-k}})$ delle variabili $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{h-k}})$, sono vere le seguenti due affermazioni:

i) *per ogni* $E \in \mathcal{B}_k$ *il prodotto* $E \times \big( ]-\infty, \overline{x}_{j_1}[\times \ldots \times]-\infty, \overline{x}_{j_{h-k}}[\big)$ *appartiene alla* σ*-algebra* $\mathcal{B}_h$;

ii) *la funzione* $\nu : \mathcal{B}_k \to \mathbb{R}$, *definita ponendo*

$$\nu(E) \; = \; \mu\Big(E \times \big( ]-\infty, \overline{x}_{j_1}[\times \ldots \times]-\infty, \overline{x}_{j_{h-k}}[\big)\Big) \qquad \forall E \in \mathcal{B}_k \ ,$$

è una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^k$.

Di conseguenza, in base a ciò che abbiamo provato sinora, possiamo affermare che la funzione $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \; = \; \nu\big( ]-\infty, x_{i_1}[\times \ldots \times]-\infty, x_{i_k}[\big) \qquad \forall (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k \ ,$$

è una funzione di distribuzione di ν. Ciò completa la dimostrazione di 4) dal momento che, ovviamente, si ha

$$F(\ldots, x_{i_r}, \ldots, \overline{x}_{j_s}, \ldots) \; = \; G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \qquad \forall (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k \ .$$

Proviamo infine che la funzione F, data dalla (7.2.7), è l'unica funzione di distribuzione associata a μ che gode della proprietà 3).

Procediamo per induzione sulla dimensione h.

Sappiamo di già che la tesi è vera per $h = 1$ (cfr. l'Osservazione 7.1.3). Supponiamo che la tesi sia vera per la dimensione h e dimostriamo che essa è vera anche per la dimensione $h + 1$.

Sia μ una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^{h+1}$ e sia L una funzione di distribuzione di μ verificante la proprietà 3), cioè

$$\lim_{x_i \to -\infty} L(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_{h+1}) \; = \; 0$$

per ogni $c = (c_1, \ldots, c_h, c_{h+1}) \in \mathbb{R}^{h+1}$ ed ogni $i = 1, \ldots, h, h+1$. Dimostriamo che risulta

$$L(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}) \; = \; \mu( ]-\infty, x_1[\times \ldots \times]-\infty, x_h[\times]-\infty, x_{h+1}[ ) \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}) \in \mathbb{R}^{h+1} \ .$$

Fissato un qualsiasi numero $c_{h+1} \in \mathbb{R}$, sappiamo che (cfr. la dimostrazione del Lemma 7.2.7), identificando $\mathbb{R}^{h+1}$ con $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}$ mediante la (7.2.24), la posizione

$$\mu_{c_{h+1}}(E) \; = \; \mu\big(E \times]-\infty, c_{h+1}[\big) \qquad \forall E \in \mathcal{B}_h$$

definisce una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^h$, pertanto, per l'ipotesi induttiva, l'unica funzione di distribuzione G di $\mu_{c_{h+1}}$ avente la proprietà che

$$\lim_{x_1 \to -\infty} G(x_1, c_2, \ldots, c_h) \; = \; \ldots \; = \; \lim_{x_h \to -\infty} G(c_1, \ldots, c_{h-1}, x_h) \; = \; 0 \qquad \forall (c_1, c_2, \ldots, c_h) \in \mathbb{R}^h$$

è la funzione $F_{c_{h+1}}$ definita ponendo

$$F_{c_{h+1}}(x_1,\ldots,x_h) \;=\; \mu_{c_{h+1}}(\,]-\infty,x_1[\,\times\,\ldots\,\times\,]-\infty,x_h[\,) \qquad \forall(x_1,\ldots,x_h)\in\mathbb{R}^h \;,$$

cioè

$$F_{c_{h+1}}(x_1,\ldots,x_h) \;=\; \mu(\,]-\infty,x_1[\,\times\,\ldots\,\times\,]-\infty,x_h[\,\times\,]-\infty,c_{h+1}[\,) \qquad \forall(x_1,\ldots,x_h)\in\mathbb{R}^h \;.$$

Per completare la dimostrazione basta allora provare che la funzione

$$(x_1,\ldots,x_h) \;\to\; L(x_1,\ldots,x_h,c_{h+1}) \tag{7.2.29}$$

è una funzione di distribuzione di $\mu_{c_{h+1}}$. Infatti, una volta provato ciò, essendo

$$\lim_{x_1\to-\infty} L(x_1,c_2,\ldots,c_h,c_{h+1}) \;=\; \ldots \;=\; \lim_{x_h\to-\infty} L(c_1,\ldots,c_{h-1},x_h,c_{h+1}) \;=\; 0 \qquad \forall(c_1,c_2,\ldots,c_h)\in\mathbb{R}^h \;,$$

si ha

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_h,c_{h+1}) \;=\; F_{c_{h+1}}(x_1,\ldots,x_h) \;=$$

$$=\; \mu(\,]-\infty,x_1[\,\times\,\ldots\,\times\,]-\infty,x_h[\,\times\,]-\infty,c_{h+1}[\,) \qquad \forall(x_1,x_2,\ldots,x_h)\in\mathbb{R}^h \;,$$

cioè la tesi, data l'arbitrarietà di $c_{h+1}\in\mathbb{R}$.

Proviamo dunque che la (7.2.29) è una funzione di distribuzione di $\mu_{c_{h+1}}$.

La funzione (7.2.29) è continua dalla sinistra rispetto ad ognuna delle variabili, separatamente, poiché di tale proprietà gode la L, pertanto l'unica cosa che rimane da provare è l'uguaglianza

$$\mu_{c_{h+1}}(\,[a',b'[\,) \;=\; \sum_{c'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(c')} L(c',c_{h+1}) \qquad \forall [a',b'[\,\in\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}\,,\ [a',b'[\,\neq\emptyset \;.$$

Infatti, posto

$$a_n \;=\; (a',c_{h+1}-n) \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad b \;=\; (b',c_{h+1}) \;\;,$$

si ha, per ogni $n\in\mathbb{N}$,

$$V_{a_n,b} \;=\; V_{a',b'} \times \left\{c_{h+1}-n,c_{h+1}\right\} \;=$$

$$=\; \left\{d=(c',d_{h+1})\in\mathbb{R}^{h+1} \;:\; d'\in V_{a',b'}\;,\; d_{h+1}\in\left\{c_{h+1}-n,c_{h+1}\right\}\right\}\;;$$

risulta inoltre, per ogni $d = (d', d_{h+1}) \in V_{a_n, b}$,

$$i_{a_n,b}(d) = \begin{cases} i_{a',b'}(d') & \text{se } d_{h+1} = c_{h+1}\,, \\ i_{a',b'}(d') + 1 & \text{se } d_{h+1} = c_{h+1} - n\,. \end{cases}$$

Di conseguenza, grazie alla proprietà di continuità verso l'alto della misura μ ed al fatto che la funzione L ha la proprietà 3), si ha

$$\mu_{c_{h+1}}\big([a', b'[\big) = \mu\big([a', b'[\times]-\infty, c_{h+1}[\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\big([a', b'[\times [c_{h+1} - n, c_{h+1}[\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{d\in V_{a_n,b}} (-1)^{i_{a_n,b}(d)} L(d) =$$

$$= \sum_{d'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(d')} L(d', c_{h+1}) - \lim_{n\to\infty} \sum_{d'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(d')} L(d', c_{h+1} - n) =$$

$$= \sum_{d'\in V_{a',b'}} (-1)^{i_{a',b'}(d')} L(d', c_{h+1}) \quad .$$

Ciò completa la dimostrazione.

Lemma 7.2.8. *Siano $\{c_n\}$ una successione di elementi di $\mathbb{R}^h$ e c un elemento di $\mathbb{R}^h$ tali che*

$$(*) \qquad c_n \le c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c \quad .$$

Esiste una successione $\{c_{n_r}\}$, estratta da $\{c_n\}$, verificante la condizione

$$c_{n_r} \le c_{n_{r+1}} \qquad \forall r \in \mathbb{N}\,. \tag{7.2.30}$$

Dimostrazione. Si prova facilmente che l'asserto è vero per $h = 1$. Procediamo per induzione su h. Supponiamo che la tesi sia vera per la dimensione h e dimostriamo che essa è vera pure per la dimensione $h + 1$.

Siano

$$\{c_n\} = \{(c_{n\,1}, \ldots, c_{n\,h}, c_{n\,h+1})\}$$

una successione di elementi di $\mathbb{R}^{h+1}$ e $c = (c_1, \ldots, c_h, c_{h+1})$ un elemento di $\mathbb{R}^{h+1}$ verificanti le ipotesi (*). Poiché la tesi è vera nel caso unidimensionale, possiamo supporre (rimpiazzando, se necessario, la successione $\{c_n\}$ con un'opportuna sua estratta) che la successione $\{c_{n\,h+1}\}$ delle componenti di posto $h + 1$ sia non decrescente. Posto

$$c'_n = (c_{n\,1}, \ldots, c_{n\,h}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad c' = (c_1, \ldots, c_h) \quad ,$$

si ha

$$c'_n \leq c' \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c'_n = c' \quad ,$$

quindi, per l'ipotesi induttiva, esiste una successione $\{c'_{n_r}\}$, estratta da $\{c'_n\}$, tale che

$$c'_{n_r} \;\leq\; c'_{n_{r+1}} \qquad\qquad \forall r \in \mathbb{N} \; .$$

Considerata la corrispondente successione $\{c_{n_r}\}$, estratta da $\{c_n\}$, è evidente che la $\{c_{n_r}\}$ verifica la proprietà di monotonia (7.2.30). Ciò completa la dimostrazione del lemma.