6. Boreliani di uno spazio topologico.

6.1. La σ-algebra degli insiemi di Borel di uno spazio topologico.

Definizione 6.1.1. (*σ-algebra di Borel di uno spazio topologico*). Sia S uno spazio topologico. Si chiama *σ-algebra degli insiemi di Borel* di S (o, più brevemente, *σ-algebra di Borel* di S) la σ-algebra in S generata dalla famiglia degli insiemi aperti di S. La σ-algebra di Borel di S si indica con il simbolo $\mathcal{B}(S)$. Gli elementi di $\mathcal{B}(S)$ prendono il nome di *insiemi di Borel* (o *boreliani*) di S.

Poiché un sottoinsieme di S è aperto se e soltanto se il suo complementare è chiuso, abbiamo che una σ-algebra $\mathcal{A}$ in S contiene la famiglia degli insiemi aperti di S se e soltanto se essa contiene la famiglia degli insiemi chiusi di S. Di conseguenza si ha la

Proposizione 6.1.1. *La σ-algebra di Borel di uno spazio topologico S coincide con la σ-algebra in S generata dalla famiglia degli insiemi chiusi di S.*

La proposizione seguente mostra la relazione esistente tra la σ-algebra di Borel di uno spazio topologico S e la σ-algebra di Borel di un suo sottospazio topologico S_1.

Proposizione 6.1.2. (Boreliani di un sottospazio). *Sia S uno spazio topologico e sia $S_1 \subseteq S$, $S_1 \neq \emptyset$, munito della topologia indotta da quella di S. La σ-algebra $\mathcal{B}(S_1)$ degli insiemi di Borel di S_1 coincide con la σ-algebra $S_1 \cap \mathcal{B}(S)$, traccia di $\mathcal{B}(S)$ su S_1.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $S_1 \cap \mathcal{B}(S)$ è la σ-algebra in S_1 costituita da tutti gli insiemi del tipo $S_1 \cap B$, con $B \in \mathcal{B}(S)$. In particolare appartengono a $S_1 \cap \mathcal{B}(S)$ tutti gli insiemi della forma $S_1 \cap O$, con O insieme aperto di S, cioè tutti gli insiemi aperti di S_1; di conseguenza si ha l'inclusione $S_1 \cap \mathcal{B}(S) \supseteq \mathcal{B}(S_1)$. Per provare l'inclusione contraria denotiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia costituita da tutti gli insiemi $F \subseteq S$ aventi la proprietà che $S_1 \cap F \in \mathcal{B}(S_1)$. La famiglia $\mathcal{F}$ è una σ-algebra in S; infatti:

— $S \in \mathcal{F}$ poiché $S_1 \cap S = S_1 \in \mathcal{B}(S_1)$;

— $F \in \mathcal{F} \implies S \setminus F \in \mathcal{F}$ poiché $S_1 \cap (S \setminus F) = S_1 \setminus F = S_1 \setminus (S_1 \cap F) \in \mathcal{B}(S_1)$, dato che, per ipotesi, si ha $S_1 \cap F \in \mathcal{B}(S_1)$;

— $F_n \in \mathcal{F}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \cup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$ poiché $S_1 \cap (\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = \cup_{n=1}^{\infty} (S_1 \cap F_n) \in \mathcal{B}(S_1)$, dato che, per ipotesi, si ha $S_1 \cap F_n \in \mathcal{B}(S_1)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$;

inoltre $\mathcal{F}$ contiene tutti gli insiemi aperti di S (se O è un aperto di S, l'intersezione $S_1 \cap O$ è un aperto di S_1 e quindi appartiene a $\mathcal{B}(S_1)$, pertanto $O \in \mathcal{F}$); di conseguenza si ha $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}(S)$. La precedente inclusione dice che per ogni insieme $B \in \mathcal{B}(S)$ si ha $S_1 \cap B \in \mathcal{B}(S_1)$, dunque abbiamo provato che $S_1 \cap \mathcal{B}(S) \subseteq \mathcal{B}(S_1)$.

6.2. Boreliani di $\mathbb{R}^h$.

Nel caso dello spazio $\mathbb{R}^h$ adopereremo, per brevità, la notazione $\mathcal{B}_h$ in luogo di $\mathcal{B}(\mathbb{R}^h)$.

Osserviamo che la famiglia $\mathcal{L}_h$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra in $\mathbb{R}^h$ che contiene tutti gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^h$; pertanto, dato che $\mathcal{B}_h$ è la minima σ-algebra in $\mathbb{R}^h$ che contiene tutti gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^h$, si ha la seguente proposizione.

Proposizione 6.2.1. *La σ-algebra di Borel $\mathcal{B}_h$ è contenuta nella σ-algebra $\mathcal{L}_h$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue.*

Mostreremo in seguito che $\mathcal{B}_h \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_h$.

Completiamo questo paragrafo evidenziando alcune notevoli famiglie di insiemi che sono generatori della σ-algebra $\mathcal{B}_h$.

Definizione 6.2.1. (*Intervalli aperti e semiaperti di $\mathbb{R}^h$*). Siano $a, b \in \mathbb{R}^h$ tali che $a \leq b$. Si chiama *intervallo aperto di $\mathbb{R}^h$, di estremi a e b*, e si indica con $]a, b[$, l'insieme

$$]a, b[\, = \; \{x \in \mathbb{R}^h \,:\, a < x < b\} \; .$$

Si chiama *intervallo semiaperto a destra* [risp. *a sinistra*] *di $\mathbb{R}^h$, di estremi a e b*, e si indica con $[a, b[$ [risp. $]a, b]$], l'insieme

$$[a, b[\, = \; \{x \in \mathbb{R}^h \,:\, a \leq x < b\} \qquad [\text{risp. } \;]a, b] \; = \; \{x \in \mathbb{R}^h \,:\, a < x \leq b\} \,] \; .$$

Indichiamo con $\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}}$ la famiglia degli intervalli aperti di $\mathbb{R}^h$ e con $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ [risp. $\mathcal{I}_h^{\mathrm{s}}$] quella degli intervalli semiaperti a destra [risp. a sinistra].

Ovviamente, l'intervallo aperto $]a, b[$ ed i corrispondenti intervalli semiaperti $[a, b[$ e $]a, b]$ sono non vuoti se e solo se $a < b$.

Proposizione 6.2.2. (Generatori di $\mathcal{B}_h$). *Ognuna delle seguenti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ è un generatore di $\mathcal{B}_h$:*

1) *la famiglia $\mathcal{I}_h$ degli intervalli chiusi di $\mathbb{R}^h$;*
2) *la famiglia $\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}}$ degli intervalli aperti di $\mathbb{R}^h$;*
3) *la famiglia $\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}$ degli intervalli semiaperti a destra di $\mathbb{R}^h$;*
4) *la famiglia $\mathcal{I}_h^{\mathrm{s}}$ degli intervalli semiaperti a sinistra di $\mathbb{R}^h$.*

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi facciamo vedere che valgono le seguenti inclusioni:

$$(1) \quad \mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h) \; ,$$

$$(2) \quad \mathcal{A}(\mathcal{I}_h) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}) \; , \qquad\qquad (2') \quad \mathcal{A}(\mathcal{I}_h) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{s}}) \; ,$$

$$(3) \quad \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}}) \; , \qquad\qquad (3') \quad \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{s}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}}) \; ,$$

$$(4) \quad \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}}) \subseteq \mathcal{B}_h \; .$$

(1) Infatti ogni insieme aperto di $\mathbb{R}^h$, essendo unione numerabile di plurintervalli di $\mathbb{R}^h$, e quindi unione numerabile di intervalli chiusi, appartiene a $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h)$; di conseguenza la σ-algebra in $\mathbb{R}^h$ generata dalla famiglia degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^h$, cioè $\mathcal{B}_h$, è contenuta in $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h)$.

(2) [risp. (2')] Infatti ogni intervallo chiuso $[a,b]$ di $\mathbb{R}^h$ può essere espresso come intersezione numerabile di intervalli semiaperti a destra [risp. a sinistra] (ad esempio nel seguente modo:

$$[a,b] \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b+\frac{1}{n}e[\ , \qquad [\,\text{risp. } [a,b] \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}e, b]\,]\ ,$$

dove e è il punto di $\mathbb{R}^h$ di componenti $(1,\ldots,1)$), quindi $[a,b]$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}})$ [risp. $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{s}})$]; di conseguenza si ha che $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}})$ [risp. $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{s}})$].

(3) [risp. (3')] Infatti ogni intervallo semiaperto a destra [risp. a sinistra] $[a,b[$ [risp. $]a,b]$] di $\mathbb{R}^h$ può essere espresso come intersezione numerabile di intervalli aperti (ad esempio si ha:

$$[a,b[\; = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}e, b[\ , \qquad [\,\text{risp. }]a,b] \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b+\frac{1}{n}e[\,]\ )\ ,$$

pertanto $[a,b[$ [risp. $]a,b]$] appartiene a $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}})$; ne segue che la σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{d}})$ [risp. $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{s}})$] è contenuta in $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}})$.

(4) Infatti ogni intervallo aperto di $\mathbb{R}^h$, essendo un insieme aperto, appartiene a $\mathcal{B}_h$; pertanto $\mathcal{A}(\mathcal{I}_h^{\mathrm{o}}) \subseteq \mathcal{B}_h$.

6.3. Boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$.

Anche nel caso dello spazio topologico $\overline{\mathbb{R}}$ adopereremo una notazione abbreviata per la σ-algebra di Borel; precisamente, in analogia con il caso dello spazio $\mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^1)$, scriveremo $\overline{\mathcal{B}}_1$ invece di $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Poiché la topologia indotta su $\mathbb{R}$ da quella di $\overline{\mathbb{R}}$ coincide con la topologia usuale di $\mathbb{R}$ (cfr. la Proposizione W.R.3), per la Proposizione 6.1.2 si ha che le due σ-algebre $\mathcal{B}_1$ e $\overline{\mathcal{B}}_1$ sono legate dalla relazione

$$\mathcal{B}_1 \;=\; \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}_1\ . \tag{6.3.1}$$

Pertanto, dato che l'insieme $\mathbb{R}$ è un insieme aperto di $\overline{\mathbb{R}}$ ([1]) e quindi appartiene a $\overline{\mathcal{B}}_1$, si ha anche che (cfr. l'Osservazione 5.1.1)

$$\mathcal{B}_1 \;=\; \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,:\, B \in \overline{\mathcal{B}}_1\}\ . \tag{6.3.2}$$

È allora facile dimostrare la seguente caratterizzazione degli insiemi di Borel di $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 6.3.1. (Boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$). *Gli insiemi di Borel di $\overline{\mathbb{R}}$ sono tutti e soli gli insiemi A del tipo*

$$A \;=\; B \cup L\;, \tag{6.3.3}$$

con $B \in \mathcal{B}_1$ e $L \subseteq \{-\infty, +\infty\}$.

Dimostrazione. Ogni insieme A del tipo (6.3.3), con $B \in \mathcal{B}_1$ e $L \subseteq \{-\infty, +\infty\}$, appartiene a $\overline{\mathcal{B}}_1$. Infatti, per la (6.3.2), si ha che B appartiene a $\overline{\mathcal{B}}_1$; d'altra parte l'insieme L, essendo finito, è un sottoinsieme chiuso di $\overline{\mathbb{R}}$, quindi anche L appartiene a $\overline{\mathcal{B}}_1$; in conclusione abbiamo che l'insieme $A = B \cup L$ appartiene a $\overline{\mathcal{B}}_1$.

Viceversa, se A è un qualunque insieme appartenente a $\overline{\mathcal{B}}_1$, scrivendo

$$A \;=\; (\mathbb{R} \cap A) \cup (\{-\infty, +\infty\} \cap A)$$

e ricordando la (6.3.1), abbiamo che l'insieme A è del tipo (6.3.3), con $B = \mathbb{R} \cap A \in \mathcal{B}_1$ e $L = \{-\infty, +\infty\} \cap A \subseteq \{-\infty, +\infty\}$.

Dimostriamo infine la

Proposizione 6.3.2. (Un generatore di $\overline{\mathcal{B}}_1$). *La famiglia $\mathcal{E}$ avente come elementi tutti gli intervalli $[a, +\infty]$, con $a \in \mathbb{R}$, è un generatore di $\overline{\mathcal{B}}_1$.*

Dimostrazione. Ogni intervallo $[a, +\infty]$, con $a \in \mathbb{R}$, è un sottoinsieme chiuso di $\overline{\mathbb{R}}$ (infatti, utilizzando la Proposizione W.R.1, si riconosce subito che il suo complementare $\overline{\mathbb{R}} \setminus [a, +\infty] = [-\infty, a[$ è aperto), pertanto $[a, +\infty] \in \overline{\mathcal{B}}_1$. Abbiamo così provato che $\mathcal{E} \subseteq \overline{\mathcal{B}}_1$, dunque si ha pure $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_1$.

Per dimostrare che vale l'inclusione contraria osserviamo che gli insiemi

$$\{+\infty\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty]\;,$$

$$\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, +\infty]$$

(intersezione numerabile e unione numerabile di insiemi di $\mathcal{A}(\mathcal{E})$) appartengono a $\mathcal{A}(\mathcal{E})$; quindi anche l'insieme $\{-\infty\}$ (complementare di $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$) appartiene a $\mathcal{A}(\mathcal{E})$. Ne segue facilmente che ogni insieme $L \subseteq \{-\infty, +\infty\}$ appartiene a $\mathcal{A}(\mathcal{E})$; la stessa cosa può allora dirsi di $\mathbb{R}$ (complementare di $\{-\infty, +\infty\}$) e pertanto (Osservazione 5.1.1)

$$\mathbb{R} \cap \mathcal{A}(\mathcal{E}) \;=\; \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,:\, B \in \mathcal{A}(\mathcal{E})\}\;. \tag{6.3.4}$$

---

[1] Ciò si può provare o facendo uso della Proposizione W.R.1 oppure osservando che l'insieme complementare $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R} = \{-\infty, +\infty\}$ è finito e tenendo presente che in uno spazio metrizzabile ogni insieme finito è chiuso.

Osserviamo ancora che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, essendo

$$[a, b[= \; [a, +\infty] \setminus [b, +\infty] \;,$$

si ha $[a, b[\in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ e quindi, per la (6.3.4), $[a, b[\in \mathbb{R} \cap \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Abbiamo allora che $\mathbb{R} \cap \mathcal{A}(\mathcal{E})$ è una σ-algebra in $\mathbb{R}$ che contiene $\mathcal{I}_1^{\mathrm{d}}$, dunque (Proposizione 6.2.2) $\mathbb{R} \cap \mathcal{A}(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{B}_1$. Di conseguenza, sempre per la (6.3.4), abbiamo che ogni insieme $B \in \mathcal{B}_1$ appartiene anche a $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

In conclusione, possiamo asserire che ogni insieme $A \in \overline{\mathcal{B}}_1$ appartiene a $\mathcal{A}(\mathcal{E})$, dato che, per la Proposizione 6.3.1 e per quanto precedentemente osservato, esso è unione di due insiemi appartenenti a $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.