5. La teoria astratta della misura.

5.1. σ-algebre.

5.1.1. σ-algebre e loro proprietà.

Sia Ω un insieme non vuoto. Indichiamo con $\mathcal{P}(\Omega)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω. Inoltre, per ogni insieme $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, quando non vi è possibilità di equivoco, indichiamo con A^c il complementare di A rispetto a Ω, cioè poniamo

$$A^c = \Omega \setminus A \quad .$$

Definizione 5.1.1. (σ-*algebra*). Sia Ω un insieme non vuoto. Si chiama σ-*algebra in* Ω ogni famiglia di insiemi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tale che:

σ_1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

σ_2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$;

σ_3) se $\{A_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, allora anche l'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene a $\mathcal{A}$.

Esempi 5.1.1.

a) Qualunque sia l'insieme non vuoto Ω, le due famiglie di insiemi $\{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{P}(\Omega)$ sono entrambe σ-algebre in Ω. Esse sono, rispettivamente, la minima e la massima σ-algebra in Ω (rispetto all'inclusione insiemistica).

b) $\mathcal{L}_h$ è una σ-algebra in $\mathbb{R}^h$.

c) Qualunque sia l'insieme $\Omega \neq \emptyset$, la famiglia di insiemi

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \,:\, A \text{ è numerabile oppure } A^c \text{ è numerabile}\}$$

è una σ-algebra in Ω (1).

La verifica dei postulati σ_1) e σ_2) è immediata. Per provare σ_3) distinguiamo due casi. Se l'insieme A_n è numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora anche $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ è un insieme numerabile, dunque $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Se, invece, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A_{\overline{n}}$ non è numerabile, allora è numerabile l'insieme $A^c_{\overline{n}}$ e quindi anche il suo sottoinsieme $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$, pertanto, anche in questo caso, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(1) Qui e nel seguito di questi appunti l'affermazione che un insieme è numerabile, senza ulteriori precisazioni, sta ad indicare il fatto che l'insieme in questione è vuoto o finito o equipotente a $\mathbb{N}$. Analogamente, l'affermazione che un insieme è finito comprende la possibilità che l'insieme in questione sia vuoto.

Notiamo che se l'insieme Ω è numerabile, allora la σ-algebra $\mathcal{A}$ coincide con $\mathcal{P}(\Omega)$. Invece, se Ω non è numerabile, si può dimostrare che $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.

Proposizione 5.1.1. (Proprietà delle σ-algebre). *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in un insieme Ω. Valgono le seguenti proprietà:*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$*;*

2) *se $\{A_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, allora anche l'intersezione $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene a $\mathcal{A}$;*

3) *se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, allora anche gli insiemi $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ e $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ appartengono a $\mathcal{A}$;*

4) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$;

5) *se $\{A_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, allora anche gli insiemi $\lim'_n A_n$ e $\lim''_n A_n$ appartengono a $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. 1) Segue, ovviamente, da σ_1) e σ_2).

2) Per la σ_2) si ha $A_n^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi, per la σ_3), $\cup_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$; di conseguenza, ancora per la σ_2), anche l'insieme

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}}$$

appartiene a $\mathcal{A}$.

3) Segue da σ_3) e 2) osservando che l'unione e l'intersezione di un numero finito di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$ possono sempre considerarsi come unione ed intersezione di una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$; infatti:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k = A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_1 \cup A_1 \cup A_1 \cup \ldots \quad ,$$
$$A_1 \cap \ldots \cap A_k = A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_1 \cap A_1 \cap A_1 \cap \ldots \quad .$$

4) Segue da 3) e σ_2) osservando che $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}}$.

5) Per la 2) e per la σ_3) gli insiemi

$$B_n = A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \ldots \quad \text{e} \quad C_n = A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots$$

appartengono a $\mathcal{A}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; di conseguenza, sempre per per la σ_3) e la 2), anche gli insiemi

$$\lim{}'_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \lim{}''_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

appartengono a $\mathcal{A}$.

Esempio 5.1.2. (σ*-algebra traccia*). Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in un insieme Ω e sia Ω_1 un sottoinsieme non vuoto di Ω. Allora la famiglia (di sottoinsiemi di Ω_1)

$$\mathcal{A}_1 \;=\; \{\Omega_1 \cap A \,:\, A \in \mathcal{A}\}$$

è una σ-algebra in Ω_1.

Verifichiamo la precedente affermazione. Si ha:

— $\Omega_1 \in \mathcal{A}_1$ poiché $\Omega_1 = \Omega_1 \cap \Omega$;

— $B \in \mathcal{A}_1 \Longrightarrow \Omega_1 \setminus B \in \mathcal{A}_1$; infatti dall'ipotesi $B \in \mathcal{A}_1$ segue l'esistenza di un insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $B = \Omega_1 \cap A$; pertanto anche l'insieme

$$\Omega_1 \setminus B = \Omega_1 \setminus (\Omega_1 \cap A) = \Omega_1 \setminus A = \Omega_1 \cap A^{\mathrm{c}}$$

è un elemento di $\mathcal{A}_1$;

— se $\{B_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}_1$, allora anche $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ appartiene a $\mathcal{A}_1$; infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $A_n \in \mathcal{A}$ tale che $B_n = \Omega_1 \cap A_n$; pertanto anche l'insieme

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_1 \cap A_n) = \Omega_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

è un elemento di $\mathcal{A}_1$.

Definizione 5.1.2. (σ*-algebra traccia*). Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra in un insieme Ω e Ω_1 è un sottoinsieme non vuoto di Ω, la σ-algebra in Ω_1

$$\mathcal{A}_1 \;=\; \{\Omega_1 \cap A \,:\, A \in \mathcal{A}\}$$

si chiama σ*-algebra traccia di* $\mathcal{A}$ *su* Ω_1 e si indica con il simbolo $\Omega_1 \cap \mathcal{A}$.

Osservazione 5.1.1. Osserviamo che, nel caso in cui l'insieme Ω_1 è un elemento di $\mathcal{A}$, la traccia $\Omega_1 \cap \mathcal{A}$ è costituita da tutti i sottoinsiemi di Ω_1 che appartengono alla σ-algebra $\mathcal{A}$, cioè:

$$\Omega_1 \cap \mathcal{A} = \{\, B \in \mathcal{P}(\Omega_1) \;:\; B \in \mathcal{A} \,\} \quad .$$

Infatti, l'inclusione $\Omega_1 \cap \mathcal{A} \supseteq \{\, B \in \mathcal{P}(\Omega_1) \;:\; B \in \mathcal{A} \,\}$ è sempre vera, indipendentemente dal fatto che Ω_1 appartenga o meno a $\mathcal{A}$, poiché, se $B \in \mathcal{P}(\Omega_1)$, possiamo scrivere $B = \Omega_1 \cap B$ e quindi, se B appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$, allora B è anche elemento della traccia $\Omega_1 \cap \mathcal{A}$. Viceversa, se $\Omega_1 \in \mathcal{A}$, allora tutti gli insiemi del tipo $\Omega_1 \cap A$, con $A \in \mathcal{A}$, appartengono a $\mathcal{A}$ (Proposizione 5.1.1, 3)), quindi vale anche l'inclusione contraria.

Esempio 5.1.3. (σ*-algebra controimmagine*). Dati due insiemi non vuoti Ω, Ω' e una funzione $T : \Omega \to \Omega'$, supponiamo che $\mathcal{A}'$ sia una σ-algebra in Ω'. Allora la famiglia di sottoinsiemi di Ω

$$T^{-1}(\mathcal{A}') \;\overset{\text{def.}}{=}\; \{T^{-1}(A') \,:\, A' \in \mathcal{A}'\}$$

è una σ-algebra in Ω. Ciò segue subito dalle successive uguaglianze insiemistiche (la cui verifica è lasciata per esercizio allo studente), dove $A', A'_1, A'_2, \ldots$ sono arbitrari sottoinsiemi di Ω:

$$\Omega \;=\; T^{-1}(\Omega') \quad ,$$

$$\Omega \setminus T^{-1}(A') \;=\; T^{-1}(\Omega' \setminus A') \quad ,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A'_n) \;=\; T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) \quad .$$

5.2. Generatori di una σ-algebra.

Proposizione 5.1.2. (Intersezione di σ-algebre). *Sia $\{\mathcal{A}_i \,:\, i \in I\}$ una qualunque famiglia di σ-algebre nell'insieme Ω. Allora anche l'intersezione $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ è una σ-algebra in Ω.*

Dimostrazione. Occorre provare che la famiglia $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ verifica i postulati σ_1) - σ_3). Si ha infatti, tenendo presente che, per ogni $i \in I$, la famiglia $\mathcal{A}_i$ verifica tali postulati:

— $\Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ dato che $\Omega \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I$;

— $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \iff A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \implies A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \iff A^{\mathrm{c}} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$;

— $A_1, A_2, \ldots \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \iff A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \implies$
$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \iff \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

Corollario 5.1.1. *Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una qualunque famiglia di sottoinsiemi di Ω. Esiste la minima σ-algebra in Ω contenente $\mathcal{E}$.*

Dimostrazione. Sia Σ la famiglia di tutte le σ-algebre in Ω contenenti $\mathcal{E}$ (osserviamo che la famiglia Σ non è vuota poichè $\mathcal{P}(\Omega)$ è un elemento di Σ). Per la Proposizione 5.1.2 l'intersezione

$$\mathcal{A}^* = \bigcap_{\mathcal{A}\in\Sigma} \mathcal{A}$$

è ancora una σ-algebra in Ω e inoltre, ovviamente, $\mathcal{A}^* \supseteq \mathcal{E}$; pertanto $\mathcal{A}^*$ è la minima σ-algebra in Ω contenente $\mathcal{E}$ (infatti, se $\mathcal{A}'$ è una qualunque σ-algebra in Ω contenente $\mathcal{E}$, allora $\mathcal{A}' \in \Sigma$ e quindi $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}^*$).

Definizione 5.1.3. (*σ-algebra generata da una famiglia di insiemi*). Se $\mathcal{E}$ è una qualunque famiglia di sottoinsiemi dell'insieme non vuoto Ω, si chiama *σ-algebra (in Ω) generata da* $\mathcal{E}$, e si indica con il simbolo $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ (in alcuni testi si adopera la notazione $\sigma(\mathcal{E})$), la minima σ-algebra in Ω contenente $\mathcal{E}$.

Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E})$ si dice anche che $\mathcal{E}$ è un *generatore* della σ-algebra $\mathcal{A}$.

Esempi 5.1.4. Sia Ω un insieme non vuoto.

a) Se $\mathcal{E} = \{\Omega\}$ oppure $\mathcal{E} = \{\emptyset\}$, è chiaro che $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \Omega\}$.

b) Se $\mathcal{E} = \{E\}$, essendo $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $E \neq \Omega, \emptyset$, allora $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$. Infatti, si verifica facilmente che la famiglia di insiemi $\{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$ è una σ-algebra in Ω (che, ovviamente, contiene $\mathcal{E}$). D'altra parte, se $\mathcal{A}$ è una qualunque σ-algebra in Ω che contiene $\mathcal{E}$, allora ad $\mathcal{A}$ appartengono necessariamente, oltre che l'insieme E, anche gli insiemi E^c, $\emptyset$ e Ω, dunque $\mathcal{A} \supseteq \{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$.

Esempio 5.1.5. (*σ-algebra generata da una partizione finita dell'insieme* Ω).

Se $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_p\}$ è una qualunque famiglia finita e non vuota di sottoinsiemi di Ω, costituente una partizione di Ω (quindi gli insiemi $E_1, \ldots, E_p$ sono non vuoti, a due a due disgiunti e la loro unione $E_1 \cup \ldots \cup E_p$ è uguale a Ω), la σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ coincide con la famiglia $\mathcal{A}$ avente come elementi l'insieme vuoto e tutte le possibili unioni di insiemi appartenenti a $\mathcal{E}$, cioè tutti gli insiemi del tipo

$$E_{i_1} \cup \ldots \cup E_{1_k} , \tag{5.1.1}$$

con $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq p$.

Infatti, si verifica facilmente che la famiglia $\mathcal{A}$ è una σ-algebra in Ω e contiene $\mathcal{E}$, quindi $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Viceversa, per la Proposizione 5.1.1, proprietà 1) e 3), la σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ contiene l'insieme vuoto e tutte le unioni del tipo (5.1.1), quindi $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{A}$.

Esempio 5.1.6. (*σ-algebra generata da una sottofamiglia finita di* $\mathcal{P}(\Omega)$).

Se $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_h\}$ è una qualunque sottofamiglia finita e non vuota di $\mathcal{P}(\Omega)$, allora $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ coincide con la famiglia $\mathcal{A}$ costituita dall'insieme vuoto e da tutte le possibili unioni di intersezioni del tipo

$$F_1' \cap F_2' \cap \ldots \cap F_h' , \tag{5.1.2}$$

dove, per ogni $i = 1, \ldots, h$, il fattore F_i' è uguale a F_i oppure a F_i^c.

Per dimostrare ciò osserviamo che le intersezioni del tipo (5.1.2) sono a due a due disgiunte (due intersezioni distinte del tipo (5.1.2) differiscono per almeno un fattore; pertanto, supponendo che tale fattore sia quello di posto r, le due intersezioni in questione sono una contenuta in F_r e l'altra nel complementare F_r^c). Si ha inoltre che ogni elemento $\omega \in \Omega$ appartiene ad una sola delle intersezioni (5.1.2). Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, h$, è vera esattamente una delle due affermazioni: "$\omega \in F_i$" oppure "$\omega \in F_i^c$"; di conseguenza, posto, per ogni $i = 1, \ldots, h$,

$$F_i^* = \begin{cases} F_i & \text{se } \omega \in F_i, \\ F_i^c & \text{se } \omega \in F_i^c, \end{cases}$$

si ha che l'insieme $F_1^* \cap F_2^* \cap \ldots \cap F_h^*$ è l'unica intersezione del tipo (5.1.2) a cui ω appartiene.

Le considerazioni precedenti implicano che la famiglia $\mathcal{E}$ avente come elementi tutte le intersezioni non vuote del tipo (5.1.2) è una partizione finita ([2]) di Ω e quindi (esempio precedente) $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$.

A questo punto basta provare che $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{E})$. E infatti, per il postulato σ_2) e per la Proposizione 5.1.1, proprietà 3), tutte le intersezioni del tipo (5.1.2) appartengono a $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, cioè abbiamo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$, da cui $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Viceversa, si ha che ogni insieme F_r, $r = 1, \dots, h$, risulta uguale all'unione (finita) di tutte le intersezioni del tipo (5.1.2) nelle quali è $F'_r = F_r$ ([3]), quindi F_r appartiene a $\mathcal{A}(\mathcal{E})$; abbiamo pertanto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{E})$ e, conseguentemente, $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

5.1.3. Anelli, algebre.

Definizione 5.1.4. (*Anello*). Sia Ω un insieme non vuoto. Si chiama *anello in* Ω ogni famiglia di insiemi $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tale che:

r$_1$) $\emptyset \in \mathcal{R}$;

r$_2$) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$;

r$_3$) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$.

Proposizione 5.1.3. *Sia* $\mathcal{R}$ *un anello in* Ω. *Vale la proprietà:*

$$A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R} .$$

Dimostrazione. Si ha

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

e quindi, applicando due volte la r$_2$), $A \cap B \in \mathcal{R}$.

Definizione 5.1.5. (*Algebra*). Sia Ω un insieme non vuoto. Si chiama *algebra in* Ω ogni anello $\mathcal{R}$ in Ω avente l'ulteriore proprietà che $\Omega \in \mathcal{R}$.

Proposizione 5.1.4. (Caratterizzazione delle algebre). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una famiglia di insiemi* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *sia un'algebra in* Ω *è che valgano le proprietà:*

a$_1$) $\Omega \in \mathcal{A}$;

a$_2$) $A \in \mathcal{A} \implies A^{c} \in \mathcal{A}$;

a$_3$) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$.

([2]) Le intersezioni distinte del tipo (5.1.2) sono in numero di 2^h.

([3]) Per verificare questa affermazione si tenga presente il ragionamento svolto in precedenza per provare che ogni $\omega \in \Omega$ appartiene ad una sola delle intersezioni (5.1.2).

Dimostrazione. Se $\mathcal{A}$ è un'algebra, allora valgono la a_1) (per definizione di algebra) e la a_3) (è la stessa cosa di r_3)). Inoltre, da a_1) e r_2) segue subito che vale pure a_2).

Viceversa, una famiglia di insiemi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ avente le proprietà a_1) - a_3) è un'algebra in Ω. Infatti, $\Omega \in \mathcal{A}$ per ipotesi e valgono r_1) (segue da a_1) e a_2)) e r_3) (è la stessa cosa di a_3)). Verifichiamo che vale pure la r_2); si ha:

$$A \setminus B \;=\; A \cap B^c \;=\; ((A \cap B^c)^c)^c \;=\; (A^c \cup B)^c$$

e quindi, usando a_2) e a_3), si ottiene che $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Evidentemente, ogni σ-algebra in un insieme Ω è anche un'algebra (infatti le proprietà a_1) e a_2) coincidono con i postulati σ_1) e σ_2), mentre la a_3) segue dalla Proposizione 5.1.1, proprietà 3)); inoltre, per definizione, ogni algebra è anche un anello. Gli esempi che seguono mostrano che non valgono le implicazioni contrarie.

Esempi 5.1.7. Sia Ω un insieme non vuoto.

a) La famiglia $\{\emptyset\}$ è un anello in Ω, ma non è un'algebra.

b) La famiglia $\mathcal{F}$ di tutti i sottoinsiemi finiti di Ω è un anello in Ω. Se l'insieme Ω è infinito la famiglia $\mathcal{F}$ non è un'algebra.

c) la famiglia di insiemi

$$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \,:\, A \text{ è finito oppure } A^c \text{ è finito}\}$$

è un'algebra in Ω. Le proprietà a_1) e a_2) sono, ovviamente, verificate; per quanto riguarda la a_3) si ragiona nel modo seguente: se gli insiemi A e B sono entrambi finiti, allora anche $A \cup B$ è un insieme finito e quindi appartiene a $\mathcal{A}_0$; se, invece, almeno uno dei due insiemi, ad esempio A, è infinito, allora A^c è un insieme finito e, a maggior ragione, è finito l'insieme $(A \cup B)^c \subseteq A^c$, dunque $A \cup B \in \mathcal{A}_0$.

Se l'insieme Ω è infinito l'algebra $\mathcal{A}_0$ non è una σ-algebra. Infatti, fissata comunque una successione $\{\omega_n\}$ di elementi di Ω a due a due distinti e denotato, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con A_n l'insieme avente come unico elemento il punto ω_n, si ha che gli insiemi $A_2, A_4, A_6, \ldots$ appartengono tutti a $\mathcal{A}_0$, mentre la loro unione

$$A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \ldots \;=\; \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\}$$

è un insieme che non appartiene a $\mathcal{A}_0$ (nè l'insieme nè il suo complementare sono insiemi finiti).

5.2. Sistemi di Dynkin.

Definizione 5.2.1. (*Sistema di Dynkin*). Sia Ω un insieme non vuoto. Si chiama *sistema di Dynkin in* Ω ogni famiglia di insiemi $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tale che:

d_1) $\Omega \in \mathcal{D}$;

d_2) $D \in \mathcal{D} \implies D^c \in \mathcal{D}$;

d_3) se $\{D_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{D}$, a due a due disgiunti, allora anche l'unione $\cup_{n=1}^{\infty} D_n$ appartiene a $\mathcal{D}$.

È evidente che una σ-algebra è anche un sistema di Dynkin. Il viceversa non è vero, come mostra il seguente esempio.

Esempio 5.2.1. (*Un sistema di Dynkin che non è una σ-algebra*). Sia Ω un insieme finito, con un numero pari di elementi. Sia $\mathcal{D}$ la sottofamiglia di $\mathcal{P}(\Omega)$ costituita dall'insieme vuoto e da tutti i sottoinsiemi non vuoti di Ω aventi un numero pari di elementi. È immediato verificare che $\mathcal{D}$ è un sistema di Dynkin in Ω (in particolare, per provare la d_3), si tenga presente che se gli insiemi della successione $\{D_n\}$ sono a due a due disgiunti, allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $D_n = \emptyset\ \forall n > \overline{n}$). Invece, se Ω ha almeno quattro elementi, la famiglia $\mathcal{D}$ non è una σ-algebra dato che non è chiusa rispetto all'unione finita; infatti, denotati con x, y e z tre elementi distinti di Ω e posto $D = \{x, y\}$, $E = \{x, z\}$, si ha $D, E \in \mathcal{D}$, ma $D \cup E = \{x, y, z\} \notin \mathcal{D}$.

Proposizione 5.2.1. (Proprietà dei sistemi di Dynkin). *Sia $\mathcal{D}$ un sistema di Dynkin in un insieme Ω. Valgono le seguenti proprietà:*

1) $\emptyset \in \mathcal{D}$ *;*

2) *se gli insiemi $D_1, \ldots, D_k$ appartengono a $\mathcal{D}$ e sono a due a due disgiunti, allora anche $D_1 \cup \ldots \cup D_k$ appartiene a $\mathcal{D}$;*

3) $D, E \in \mathcal{D}$*;* $D \supseteq E \Longrightarrow D \setminus E \in \mathcal{D}$.

Dimostrazione. La 1) segue, ovviamente, da d_1) e d_2). La 2) segue da d_3) e 1) scrivendo

$$D_1 \cup \ldots \cup D_k = D_1 \cup \ldots \cup D_k \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \quad .$$

Infine, la 3) segue da d_2) e 2) osservando che

$$D \setminus E = D \cap E^{\mathrm{c}} = ((D \cap E^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = (D^{\mathrm{c}} \cup E)^{\mathrm{c}}$$

e tenendo presente che gli insiemi D^{c} e E sono disgiunti.

Teorema 5.2.1. *Sia $\mathcal{D}$ un sistema di Dynkin in un insieme Ω. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathcal{D}$ sia una σ-algebra è che $\mathcal{D}$ sia $\cap$-stabile* ([4]) (cioè chiuso rispetto all'intersezione finita).

Dimostrazione. La condizione è, ovviamente, necessaria, dato che ogni $\sigma-$algebra è $\cap$-stabile.

Dimostriamo che la condizione è sufficiente. I postulati σ_1) e σ_2) sono verificati in quanto sono la stessa cosa di d_1) e d_2). Per provare che vale σ_3), osserviamo come prima cosa che $\mathcal{D}$ è $\cup$-stabile ([5]), cioè chiuso rispetto all'unione finita; infatti, se $D_1, \ldots, D_k \in \mathcal{D}$, allora, usando la d_2) e l'ipotesi di $\cap$-stabilità, si ha che anche l'insieme

([4]) Si legge "inter-stabile".
([5]) Si legge "u-stabile".

$$D_1 \cup \ldots \cup D_k = ((D_1 \cup \ldots \cup D_k)^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = (D_1^{\mathrm{c}} \cap \ldots \cap D_k^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$$

appartiene a $\mathcal{D}$. Osserviamo ancora che $\mathcal{D}$ è chiuso anche rispetto all'operazione di differenza insiemistica; infatti, se $D, E \in \mathcal{D}$, allora, grazie alla Proposizione 5.2.1, 3) ed all'ipotesi di $\cap$-stabilità, si ha che pure l'insieme

$$D \setminus E = D \setminus (D \cap E)$$

appartiene a $\mathcal{D}$. Consideriamo adesso una qualunque successione $\{D_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{D}$. Possiamo scrivere l'unione $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \ldots \cup D_n \cup \ldots$ come unione di insiemi a due a due disgiunti nel modo seguente:

$$D_1 \cup [D_2 \setminus D_1] \cup [D_3 \setminus (D_1 \cup D_2)] \cup \ldots \cup [D_n \setminus (D_1 \cup \ldots D_{n-1})] \cup \ldots \;;$$

abbiamo inoltre, per quanto osservato in precedenza, che gli insiemi

$$D_1\,,\; D_2 \setminus D_1\,,\; D_3 \setminus (D_1 \cup D_2)\,,\; \ldots\,,\; D_n \setminus (D_1 \cup \ldots D_{n-1})\,,\; \ldots$$

appartengono tutti a $\mathcal{D}$; possiamo quindi concludere, applicando d_3), che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D} \quad ,$$

dunque è verificato il postulato σ_3).

In maniera perfettamente analoga a quanto si è già visto a proposito delle σ-algebre, anche per i sistemi di Dynkin valgono la proposizione ed il corollario seguenti.

Proposizione 5.2.2. (Intersezione di sistemi di Dynkin). *L'intersezione $\cap_{i\in I}\mathcal{D}_i$ di una qualunque famiglia $\{\mathcal{D}_i \,:\, i \in I\}$ di sistemi di Dynkin in un insieme Ω è ancora un sistema di Dynkin in Ω.*

Corollario 5.2.1. *Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una qualunque famiglia di sottoinsiemi di Ω. Esiste allora il minimo sistema di Dynkin in Ω contenente $\mathcal{E}$.*

Ha quindi senso porre la seguente definizione.

Definizione 5.2.2. (*Sistema di Dynkin generato da una famiglia di insiemi*). Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. Si chiama *sistema di Dynkin* (*in* Ω) *generato da* $\mathcal{E}$, e si indica con il simbolo $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, il minimo sistema di Dynkin in Ω contenente $\mathcal{E}$.

Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$ si dice anche che $\mathcal{E}$ è un *generatore* di $\mathcal{D}$.

Il confronto tra $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ e $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ è immediato: si ha sempre $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{E})$ (infatti $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ è una σ-algebra – e quindi un sistema di Dynkin – contenente $\mathcal{E}$, mentre $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ è il minimo sistema di Dynkin contenente $\mathcal{E}$) e può essere $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \neq \mathcal{A}(\mathcal{E})$ (se si prende come $\mathcal{E}$ un sistema di Dynkin che non è una σ-algebra, allora $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \neq \mathcal{A}(\mathcal{E})$).

Il successivo teorema fornisce una condizione sufficiente affinché $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

Teorema 5.2.2. *Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Condizione sufficiente affinché $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}(\mathcal{E})$ è che $\mathcal{E}$ sia $\cap$-stabile.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ è una σ-algebra in Ω, vale a dire (Teorema 5.2.1) che $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ è $\cap$-stabile; infatti, una volta provato ciò, si ha che vale l'inclusione $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{E})$ e quindi $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

Per ogni $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ indichiamo con $\mathcal{D}_D$ la famiglia di insiemi

$$\mathcal{D}_D = \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) \,:\, Q \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\} \ .$$

Verifichiamo che $\mathcal{D}_D$ è un sistema di Dynkin in Ω. Si ha infatti:

— $\Omega \in \mathcal{D}_D$, poiché $\Omega \cap D = D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$;

— $Q \in \mathcal{D}_D \implies Q^c \in \mathcal{D}_D$; infatti $Q^c \cap D = D \setminus (Q \cap D)$ e, poiché D e $Q \cap D$ appartengono a $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, per la Proposizione 5.2.1, 3), anche la differenza $D \setminus (Q \cap D)$ appartiene a $\mathcal{D}(\mathcal{E})$;

— se $\{Q_n\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{D}_D$, a due a due disgiunti, allora anche $\cup_{n=1}^{\infty} Q_n$ appartiene a $\mathcal{D}_D$; infatti

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \cap D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n \cap D)$$

e, poiché gli insiemi $Q_1 \cap D, Q_2 \cap D, \ldots$ appartengono a $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ e sono a due a due disgiunti, anche l'unione $\cup_{n=1}^{\infty}(Q_n \cap D)$ appartiene a $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Osserviamo adesso che, nel caso in cui $D \in \mathcal{E}$, risulta $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$. Infatti, se E è un qualsiasi elemento di $\mathcal{E}$, per l'ipotesi su $\mathcal{E}$ si ha $E \cap D \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, quindi $E \in \mathcal{D}_D$. Abbiamo così verificato che $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D$, pertanto, per la definizione di $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, si ha pure $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$.

L'affermazione testé dimostrata, cioè

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D \quad \forall D \in \mathcal{E} \ ,$$

può anche scriversi

$$\forall D \in \mathcal{E} \, , \forall E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \implies E \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \ ;$$

da ciò segue che, per ogni $E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, risulta $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$ e quindi $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$. Abbiamo così ottenuto che

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E \quad \forall E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \ ,$$

vale a dire

$$\forall D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \, , \forall E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \implies D \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \ ,$$

dunque $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ è $\cap$-stabile. Ciò completa la dimostrazione.

5.3. Contenuti e premisure.

5.3.1. Definizioni ed esempi.

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{R}$ un anello in Ω.

Definizione 5.3.1. (*Contenuto*). Si chiama *contenuto* (o *funzione d'insieme finitamente additiva*) su $\mathcal{R}$ ogni funzione $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ verificante i seguenti postulati:

M_1) $\mu(\emptyset) = 0$;

M_2) $\mu \geq 0$ (cioè $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{R}$);

M_3) se $A, B \in \mathcal{R}$ sono insiemi disgiunti, allora

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{5.3.1}$$

(postulato di *finita additività*).

Notiamo che le espressioni che figurano al primo ed al secondo membro della (5.3.1) hanno perfettamente significato: la $\mu(A \cup B)$ poiché l'insieme $A \cup B$ appartiene a $\mathcal{R}$ e la somma $\mu(A) + \mu(B)$ poichè, grazie al postulato M_2), siamo sicuri che tale somma non si presenta nella "forma proibita" $+\infty - \infty$.

Osserviamo ancora che, nella precedente definizione, una formulazione equivalente del postulato M_3) è:

M_3') se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ sono insiemi a due a due disgiunti, allora

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) \quad . \tag{5.3.2}$$

Infatti, M_3) è un caso particolare di M_3') ($k = 2$). Viceversa, da M_3), procedendo per induzione sul numero k degli insiemi $A_1, \ldots, A_k$, si deduce M_3').

Definizione 5.3.2. (*Premisura*). Si chiama *premisura* su $\mathcal{R}$ ogni funzione $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ verificante i postulati M_1), M_2) e, inoltre, il seguente:

M_4) per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, a due a due disgiunti e tali che $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, risulta

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{5.3.3}$$

(postulato di $\sigma-$*additività*).

Anche in questo caso l'esistenza della somma della serie che figura nella (5.3.3) è assicurata dal postulato M_2).

Il confronto tra i due concetti di contenuto e premisura è pressoché immediato.

Proposizione 5.3.1. *Ogni premisura è anche un contenuto.*

Dimostrazione. Infatti, se μ è una premisura sull'anello $\mathcal{R}$ e $A, B \in \mathcal{R}$ sono insiemi disgiunti, si ha

$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) \;= \qquad \text{(postulato M}_4\text{))}$$

$$=\; \mu(A) + \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots \;= \qquad \text{(postulato M}_1\text{))}$$

$$=\; \mu(A) + \mu(B) + 0 + 0 + \ldots \;=\; \mu(A) + \mu(B) \;,$$

quindi μ soddisfa anche il postulato di finita additività.

Esempio 5.3.1. La misura secondo Lebesgue m_h è una premisura sulla σ-algebra $\mathcal{L}_h$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue.

Esempio 5.3.2. Anche la misura secondo Peano-Jordan mis_h è una premisura sull'algebra dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Per rendersi conto di ciò basta tenere presente che mis_h è la restrizione di m_h a tale algebra e che, ovviamente, sussiste la seguente proposizione.

Proposizione 5.3.2. *Se μ è una premisura [o un contenuto] su un anello $\mathcal{R}$, la restrizione di μ ad un qualunque anello $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}$ è ancora una premisura [o un contenuto].*

Esempio 5.3.3. (*La "delta" di Dirac*). Sia Ω un qualunque insieme non vuoto. Fissato un punto $\omega \in \Omega$, sia $\delta_\omega : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione definita nel seguente modo:

$$\delta_\omega(A) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \notin A \;, \\ 1 & \text{se } \omega \in A \;. \end{cases}$$

Verifichiamo che δ_ω è una premisura su $\mathcal{P}(\Omega)$. I postulati M$_1$) e M$_2$) sono ovviamente verificati. Dimostriamo che vale anche M$_4$). Infatti, se $\{A_n\}$ è una qualunque successione di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti, si hanno le seguenti due possibilità:

– il punto ω non appartiene all'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e quindi a nessuno degli insiemi A_n, $n \in \mathbb{N}$; in questo caso si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_\omega(A_n) \;=\; 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \;=\; 0 \;=\; \delta_\omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad ;$$

– il punto ω appartiene all'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, dunque, essendo gli insiemi A_n, $n \in \mathbb{N}$, a due a due disgiunti, ω appartiene ad uno ed uno solo di tali insiemi; di conseguenza si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_\omega(A_n) \;=\; 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + 0 + \ldots \;=\; 1 \;=\; \delta_\omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad .$$

La premisura δ_ω si chiama la *premisura che concentra la massa unitaria nel punto* ω o, più semplicemente, la *delta di Dirac concentrata in* ω.

Esempio 5.3.4. Sia Ω un insieme infinito, non numerabile. Considerata la famiglia di insiemi

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \,:\, A \text{ è numerabile oppure } A^c \text{ è numerabile}\} \ ,$$

che, come sappiamo (Esempio 5.1.1, c)), è una σ-algebra in Ω, sia $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$\mu(A) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è numerabile,} \\ 1 & \text{se } A^c \text{ è numerabile.} \end{cases}$$

Notiamo che la legge di definizione di μ non è ambigua; infatti, dato che l'insieme Ω è non numerabile, i due casi "A numerabile" e "A^c numerabile" sono incompatibili.

Verifichiamo che μ è una premisura su $\mathcal{A}$. I postulati M_1) e M_2) sono ovviamente soddisfatti. Verifichiamo che anche M_4) è soddisfatto. Infatti, se $\{A_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, si hanno le seguenti due possibilità:

— ciascuno degli insiemi A_n, $n \in \mathbb{N}$, è numerabile; allora anche l'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ è un insieme numerabile e pertanto si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ = \ 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \ = \ 0 \ = \ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ ;$$

— almeno uno degli insiemi A_n, supponiamo che sia $A_{\overline{n}}$, è non numerabile; di conseguenza l'insieme $A_{\overline{n}}^c$ è un insieme numerabile e, a maggior ragione, è numerabile l'insieme $\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \subseteq A_{\overline{n}}^c$; inoltre, tutti gli insiemi A_n, $n \neq \overline{n}$, essendo disgiunti da $A_{\overline{n}}$, e quindi contenuti in $A_{\overline{n}}^c$, sono numerabili; pertanto si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ = \ 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + 0 + \ldots \ = \ 1 \ = \ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ .$$

Esempio 5.3.5. (*Un contenuto che non è una premisura*). Sia Ω un insieme infinito e numerabile. Consideriamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \,:\, A \text{ è finito oppure } A^c \text{ è finito}\} \ ,$$

che, come sappiamo (Esempio 5.1.7, c)), è un'algebra in Ω, e la funzione $\mu : \mathcal{A}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ definita nel modo seguente:

$$\mu(A) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è finito,} \\ +\infty & \text{se } A^c \text{ è finito.} \end{cases}$$

Notiamo che, anche questa volta, la legge di definizione di μ non è ambigua; infatti, dato che l'insieme Ω è infinito, i due casi "A finito" e "A^c finito" sono incompatibili.

Verifichiamo che μ è un contenuto su $\mathcal{A}_0$. I postulati M_1) e M_2) sono ovviamente soddisfatti. Verifichiamo che anche M_3) è soddisfatto. Infatti, se $A, B \in \mathcal{A}_0$ sono due insiemi disgiunti, si hanno le seguenti due possibilità:

— entrambi gli insiemi A e B sono finiti; allora anche l'unione $A \cup B$ è un insieme finito e pertanto:

$$\mu(A) + \mu(B) \ = \ 0 + 0 \ = \ 0 \ = \ \mu(A \cup B) \ \ ;$$

— almeno uno dei due insiemi A e B, ad esempio A, è infinito; allora A^c è un insieme finito e, a maggior ragione, è finito l'insieme $(A \cup B)^c \subseteq A^c$; si ha pertanto:

$$\mu(A) + \mu(B) \ = \ +\infty \ = \ \mu(A \cup B) \ \ .$$

Verifichiamo che, invece, μ non è una premisura. Infatti, poichè Ω è un insieme infinito e numerabile, esiste una bigezione $n \to \omega_n$ tra $\mathbb{N}$ e Ω; indicato, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con A_n l'insieme avente come unico elemento ω_n, abbiamo allora che $\{A_n\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}_0$, a due a due disgiunti, la cui unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ appartiene a $\mathcal{A}_0$, ma per tale successione si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ = \ 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \ = \ 0 \ ,$$

mentre

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ = \ \mu(\Omega) \ = \ +\infty \ .$$

Osservazione 5.3.1. Notiamo che, in ognuna delle due precedenti definizioni, il postulato M_1) può essere rimpiazzato dalla richiesta che la funzione μ sia diversa dalla funzione costante $+\infty$ (la quale, ovviamente, verifica M_2), M_3) e M_4); in altre parole, è lecito sostituire a M_1) il seguente postulato:

M_1^*) $\exists A \in \mathcal{R} \ : \ \mu(A) \in \mathbb{R}$.

Infatti, M_1) implica, ovviamente, M_1^*). Viceversa, supposto vero M_1^*) e fissato $A \in \mathcal{R}$ tale che $\mu(A) \in \mathbb{R}$, si ha che, se valgono M_2) e M_3), risulta

$$0 + \mu(A) = \mu(A) = \mu(\emptyset \cup A) = \mu(\emptyset) + \mu(A)$$

da cui, per la legge di cancellazione dell'addizione in $\overline{\mathbb{R}}$, segue che $0 = \mu(\emptyset)$; invece, se valgono M_2) e M_4), si ragiona nel modo seguente: poiché $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ si ha

$$\mu(A) = \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots \ ,$$

da cui $\mu(\emptyset) = 0$ perché, altrimenti, la precedente serie avrebbe come somma $+\infty$.

5.3.2. Proprietà dei contenuti e delle premisure.

Il successivo teorema mette in luce le principali proprietà dei contenuti.

Teorema 5.3.1. (Proprietà dei contenuti). *Sia $\mathcal{R}$ un anello nell'insieme Ω e sia μ un contenuto su $\mathcal{R}$. Valgono le seguenti proprietà.*

a) (Modularità). *Siano $A, B \in \mathcal{R}$. Allora*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \ . \tag{5.3.4}$$

b) (Monotonia). *Se $A, B \in \mathcal{R}$ sono tali che $A \subseteq B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

c) (Sottrattività). *Se $A, B \in \mathcal{R}$ sono tali che $A \subseteq B$ e inoltre $\mu(A) < +\infty$, allora*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad .$$

d) (Finita sub-additività). *Siano $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$. Allora*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \ \leq \ \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) \quad . \tag{5.3.5}$$

e) *Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, a due a due disgiunti e tali che $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ \leq \ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad .$$

Dimostrazione. a) Esprimiamo gli insiemi $A \cup B$ e B ognuno come unione di due insiemi disgiunti, appartenenti all'anello $\mathcal{R}$, nel seguente modo:

$$A \cup B \ = \ A \cup (B \setminus A) \quad , \qquad B \ = \ (A \cap B) \cup (B \setminus A) \quad ;$$

abbiamo allora, per il postulato di finita additività,

$$\mu(A \cup B) \ = \ \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad , \tag{5.3.6}$$
$$\mu(B) \ = \ \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \quad . \tag{5.3.7}$$

Sommando membro a membro la (5.3.6) e l'uguaglianza che si ricava dalla (5.3.7) scambiando il primo con il secondo membro, otteniamo

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \ = \ \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \setminus A) \quad . \tag{5.3.8}$$

A questo punto, per conseguire la tesi, si ragiona nel modo seguente:

— se $\mu(B \setminus A) < +\infty$ la (5.3.4) segue subito dalla (5.3.8) per la legge di cancellazione dell'addizione in $\overline{\mathbb{R}}$;

— se $\mu(B \setminus A) = +\infty$, allora dalla (5.3.6) si ha $\mu(A \cup B) = +\infty$ e, analogamente, dalla (5.3.7) si ricava $\mu(B) = +\infty$; pertanto sia il primo che il secondo membro della (5.3.4) sono uguali a $+\infty$.

b) Poichè $A \subseteq B$, e quindi $A \cap B = A$, la (5.3.7) si scrive

$$\mu(B) \;=\; \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad ; \tag{5.3.9}$$

da questa, tenuto conto del postulato M_2), si ottiene subito che $\mu(B) \geq \mu(A)$.

c) Vale ancora la (5.3.9). Inoltre, dato che l'addendo $\mu(A)$ è un numero reale, è lecito trasportare tale addendo dal secondo al primo membro. Ne segue la tesi.

d) Procediamo per induzione sul numero k degli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_k$. La (5.3.5) è banalmente vera per $k = 1$; inoltre, nel caso $k = 2$, la sua validità segue subito dalla proprietà di modularità, tenuto conto del postulato M_2). Infine, supposta vera la (5.3.5) per l'indice k, si prova facilmente che essa continua a valere anche nel caso di $k+1$ insiemi; infatti:

$$\begin{aligned}
&\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}) \;\leq && \text{(per il caso } k = 2\text{)} \\
\leq\; &\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) + \mu(A_{k+1}) \;\leq && \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\
=\; &\mu(A_1) + \ldots \mu(A_k) + \mu(A_{k+1}) \;. &&
\end{aligned}$$

e) Per la finita additività di μ e per la proprietà di monotonia si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \;=\; \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \;\leq\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad ,$$

quindi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

è un maggiorante per l'insieme delle somme parziali della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;;$$

ne segue la tesi.

Osservazione 5.3.2. L'ipotesi $\mu(A) < +\infty$ nella proprietà di sottrattività è essenziale non solo per garantire che l'espressione $\mu(B) - \mu(A)$ abbia significato, ma soprattutto perchè in assenza di tale ipotesi, cioè nella seguente situazione:

$$A, B \in \mathcal{R} \;;\quad A \subseteq B \;;\quad \mu(A) = \mu(B) = +\infty \quad , \tag{5.3.10}$$

non è possibile fare alcuna previsione sul valore di $\mu(B \setminus A)$. Infatti, le ipotesi (5.3.10) sono compatibili con il fatto che il valore di $\mu(B \setminus A)$ sia un qualunque elemento dell'intervallo $[0, +\infty]$.

Per renderci conto di ciò possiamo considerare i seguenti facili esempi relativi alla misura di Lebesgue in dimensione uno.

Sia $B = \mathbb{R}$. Allora:

– se L è un qualunque numero non negativo e $A = \mathbb{R} \setminus [0, L]$ (quindi $\mathrm{m}_1(A) = +\infty$ grazie alla proprietà di sottrattività), risulta $\mathrm{m}_1(B \setminus A) = L$;

– se $A = [0, +\infty[$, si ha $\mathrm{m}_1(B \setminus A) = +\infty$.

Nel caso delle premisure si hanno ulteriori proprietà oltre a quelle evidenziate nel Teorema 5.3.1.

Teorema 5.3.2. (Proprietà delle premisure). *Sia $\mathcal{R}$ un anello nell'insieme Ω e sia μ una premisura su $\mathcal{R}$. Valgono le seguenti proprietà.*

f) *Se $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sono insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$ tali che*

$$A_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

allora

$$\mu(A_0) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

g) (σ-sub-additività). *Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, la cui unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene a $\mathcal{R}$. Allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Dimostrazione. f) Poichè $A_0 \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, si ha

$$A_0 = A_0 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_0 \cap A_n) ;$$

pertanto, posto

$$B_n = A_0 \cap A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \qquad C_n = \begin{cases} B_1 & \text{se } n = 1, \\ B_n \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) & \text{se } n \ge 2, \end{cases}$$

si ha pure

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

e quindi, per il postulato di σ-additività (dato che gli insiemi $C_1, C_2, \ldots$ sono a due a due disgiunti)

$$\mu(A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \ ;$$

d'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme C_n è un sottoinsieme di A_n, dunque, grazie alla proprietà di monotonia, possiamo concludere che

$$\mu(A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

g) Segue subito da f), prendendo $A_0 = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

5.3.3. Condizioni affinché un contenuto sia una premisura.

In questo paragrafo presentiamo alcune condizioni necessarie e sufficienti affinché un contenuto μ sia una premisura.

Introduciamo, preliminarmente, le seguenti definizioni.

Definizioni 5.3.3. (*Proprietà di continuità*). Sia μ un contenuto sull'anello $\mathcal{R}$.

A. (*Proprietà di continuità verso l'alto*). Si dice che μ ha la proprietà di *continuità verso l'alto* se è soddisfatta la seguente condizione:

α) per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$ tale che $A_n \uparrow A$, essendo A un insieme di $\mathcal{R}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \ .$$

B. (*Proprietà di continuità verso il basso*). Si dice che μ ha la proprietà di *continuità verso il basso* se è soddisfatta la seguente condizione:

β) per ogni successione $\{B_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, con $\mu(B_1) < +\infty$, tale che $B_n \downarrow B$, essendo B un insieme di $\mathcal{R}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) \ .$$

$\mathbf{B_0}$. (*Proprietà di $\emptyset$-continuità*). Si dice che μ ha la proprietà di $\emptyset$-*continuità* ([6]) se è soddisfatta la seguente condizione:

β_0) per ogni successione $\{C_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, con $\mu(C_1) < +\infty$, tale che $C_n \downarrow \emptyset$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0 \ .$$

Osserviamo che, nelle precedenti definizioni, l'esistenza dei limiti

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ , \quad \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \ , \quad \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$$

è garantita dal fatto che, per la proprietà di monotonia di μ, le successioni $\{\mu(A_n)\}$, $\{\mu(B_n)\}$ e $\{\mu(C_n)\}$ sono monotone in $\overline{\mathbb{R}}$.

Osserviamo ancora, a proposito delle proprietà di continuità verso il basso e di $\emptyset$-continuità, che, come è facile verificare ([7]), le condizioni β) e β_0) equivalgono, rispettivamente, alle condizioni β') e β'_0) di seguito specificate:

β') per ogni successione $\{B_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, con $\mu(B_{\overline{n}}) < +\infty$ per qualche $\overline{n} \in \mathbb{N}$, tale che $B_n \downarrow B$, essendo $B \in \mathcal{R}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) \ ;$$

β'_0) per ogni successione $\{C_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, con $\mu(C_{\overline{n}}) < +\infty$ per qualche $\overline{n} \in \mathbb{N}$, tale che $C_n \downarrow \emptyset$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0 \ .$$

Definizione 5.3.4. Sia μ un contenuto sull'anello $\mathcal{R}$. Si dice che il contenuto μ è *finito* se $\mu(A) < +\infty \ \forall A \in \mathcal{R}$.

Teorema 5.3.3. (Condizioni affinchè un contenuto sia una premisura). *Supponiamo che μ sia un contenuto sull'anello $\mathcal{R}$ e consideriamo le seguenti affermazioni:*

i) *μ è una premisura;*

ii) *μ ha la proprietà di σ-sub-additività;*

iii) *μ ha la proprietà di continuità verso l'alto;*

iv) *μ ha la proprietà di continuità verso il basso;*

v) *μ ha la proprietà di $\emptyset$-continuità.*

([6]) Si legge "zero-continuità".

([7]) È utile tenere presente a questo scopo che, se $\{x_n\}$ è una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e $\{y_n\}$ è una qualunque delle successioni che si ottengono da $\{x_n\}$ eliminando un numero finito di termini, allora le due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ hanno gli stessi maggioranti definitivi, gli stessi minoranti definitivi e, di conseguenza, lo stesso massimo limite e lo stesso minimo limite; pertanto la successione $\{x_n\}$ converge (in $\overline{\mathbb{R}}$) se e soltanto se converge la $\{y_n\}$ ed in questo caso si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Valgono le seguenti implicazioni:

$$\text{i)} \iff \text{ii)} \iff \text{iii)} \implies \text{iv)} \iff \text{v} .$$

Se il contenuto μ è finito i fatti i) – v) *sono equivalenti.*

Dimostrazione. i) $\iff$ ii). Abbiamo già provato che ogni premisura ha la proprietà di σ-sub-additività (Teorema 5.3.2). Viceversa, se il contenuto μ ha proprietà di σ-sub-additività, è immediato verificare che μ soddisfa il postulato di σ-additività; infatti, se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, a due a due disgiunti e tali che $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, allora, oltre alla disuguaglianza

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) ,$$

garantita dalla σ-sub-additività, si ha pure (Teorema 5.3.1, proprietà e))

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

i) $\implies$ iii). Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$ tale che $A_n \uparrow A$, con $A \in \mathcal{R}$. Dato che la successione $\{A_n\}$ è non decrescente, possiamo esprimere l'insieme $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ come unione di insiemi di $\mathcal{R}$ a due a due disgiunti nel modo seguente:

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \ldots ,$$

pertanto, dato che μ è una premisura, abbiamo:

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \ldots + \mu(A_n \setminus A_{n-1}) + \ldots . \tag{5.3.11}$$

A questo punto, per dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) , \tag{5.3.12}$$

distinguiamo due casi:

— se risulta $\mu(A_{\overline{n}}) = +\infty$ per qualche $\overline{n} \in \mathbb{N}$, allora, per la proprietà di monotonia, si ha $\mu(A_n) = +\infty \ \forall n \geq \overline{n}$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$; ma, ancora per la proprietà di monotonia, si ha pure $\mu(A) = +\infty$, dunque vale la (5.3.12);

— se $\mu(A_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$, allora, grazie alla proprietà di sottrattività, abbiamo:

$$\mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) \qquad \forall n \geq 2$$

e quindi la somma parziale n-ma della serie che figura nella (5.3.11) è uguale a

$$\mu(A_1) + [\mu(A_2) - \mu(A_1)] + [\mu(A_3) - \mu(A_2)] + \ldots + [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] \;=\; \mu(A_n) \;;$$

conseguentemente vale la (5.3.12).

iii) $\Longrightarrow$ i). Bisogna provare che è soddisfatto il postulato M$_4$). Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, a due a due disgiunti e tali che anche l'unione $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene a $\mathcal{R}$. Considerata la successione $\{A_1 \cup \ldots \cup A_n\}$, si ha, ovviamente, $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $A_1 \cup \ldots \cup A_n \uparrow A$, pertanto, per l'ipotesi iii), risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \;=\; \mu(A) \;.$$

Ma, per la finita additività di μ, si ha

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \;=\; \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$

di conseguenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;=\; \mu(A) \;,$$

come dovevamo dimostrare.

iii) $\Longrightarrow$ iv). Sia $\{B_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, con $\mu(B_1) < +\infty$, tale che $B_n \downarrow B$, essendo $B \in \mathcal{R}$. Considerata la successione $\{B_1 \setminus B_n\}$, si ha $B_1 \setminus B_n \in \mathcal{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, nonché $B_1 \setminus B_n \uparrow B_1 \setminus B \in \mathcal{R}$, quindi, per l'ipotesi iii),

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \;=\; \mu(B_1 \setminus B) \;.$$

Poiché $\mu(B_1) < +\infty$, per la proprietà di sottrattività di μ la precedente relazione di limite si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} [\mu(B_1) - \mu(B_n)] \;=\; \mu(B_1) - \mu(B)$$

e da questa si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \;&=\; \lim_{n\to\infty} \{-[-\mu(B_n)]\} \;=\; \lim_{n\to\infty} \{-[\mu(B_1) - \mu(B_n) - \mu(B_1)]\} \;= \\ &= \lim_{n\to\infty} \{-[\mu(B_1) - \mu(B_n)] + \mu(B_1)\} \;=\; -[\mu(B_1) - \mu(B)] + \mu(B_1) \;=\; \mu(B) \;. \end{aligned}$$

iv) $\Longrightarrow$ v). Ciò è ovvio, poiché la condizione β_0) è un caso particolare della β).

v) $\Longrightarrow$ iv). Sia $\{B_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, con $\mu(B_1) < +\infty$, tale che $B_n \downarrow B$, essendo $B \in \mathcal{R}$. Considerata la successione $\{B_n \setminus B\}$, si ha $B_n \setminus B \in \mathcal{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, nonché $B_n \setminus B \downarrow \emptyset$, quindi, per l'ipotesi v),

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n \setminus B) \;=\; 0 \;,$$

vale a dire, grazie alla proprietà di sottrattività,

$$\lim_{n\to\infty}[\mu(B_n) - \mu(B)] \ = \ 0 \ ,$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \ = \ \mu(B) \ .$$

Per completare la dimostrazione facciamo vedere che, se il contenuto μ è finito, vale anche l'implicazione v) $\implies$ iii).

Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$ tale che $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$. Si ha allora $A \setminus A_n \in \mathcal{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $A \setminus A_n \downarrow \emptyset$, quindi, per la $\emptyset$-continuità,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) \ = \ 0 \ ,$$

cioè, per la sottrattività,

$$\lim_{n\to\infty}[\mu(A) - \mu(A_n)] \ = \ 0 \ ,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ = \ \mu(A) \ .$$

Osservazione 5.3.3. Se il contenuto μ non è finito, il fatto che μ abbia la proprietà di continuità verso il basso (o, equivalentemente, la proprietà di $\emptyset$-continuità) non implica, in generale, che μ sia una premisura. Un controesempio in tal senso ci è fornito dal contenuto μ dell'esempio 5.3.5, il quale, come abbiamo già visto, non è una premisura, mentre, invece, come verifichiamo subito, ha la proprietà di $\emptyset$-continuità. Infatti, se $\{C_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti all'algebra

$$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \ : \ A \text{ è finito oppure } A^c \text{ è finito}\} \quad ,$$

con $\mu(C_1) < +\infty$, tale che $C_n \downarrow \emptyset$, allora la definizione di μ implica che $\mu(C_1) = 0$, quindi, per la monotonia, $\mu(C_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0 \ .$$

Osservazione 5.3.4. Osserviamo, a proposito della proprietà di continuità verso il basso, che, nella formulazione della condizione β) (o della equivalente β')), che definisce tale proprietà, il fatto che per qualcuno degli insiemi B_n risulti $\mu(B_n) < +\infty$ è essenziale. Infatti, se $\{B_n\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$ tale che $B_n \downarrow B \in \mathcal{R}$ e inoltre $\mu(B_n) = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (quindi $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = +\infty$), allora non è detto che risulti $\mu(B) = +\infty$, anzi, in generale, non è possibile fare alcuna previsione sul valore di $\mu(B)$, e ciò anche nel caso in cui μ è una premisura.

Per renderci conto della precedente affermazione possiamo considerare il seguente facile esempio con la misura di Lebesgue in dimensione uno.

Sia B un qualunque insieme della σ-algebra $\mathcal{L}_1$ e consideriamo come successione $\{B_n\}$ la successione $\{B \cup [n, +\infty[\}$. Si ha allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{L}_1$ e $\mathrm{m}_1(B_n) = +\infty$. Si ha inoltre $B_n \downarrow B$. Poiché l'insieme $B \in \mathcal{L}_1$ è arbitrario, anche la sua misura $\mathrm{m}_1(B)$ è un arbitrario elemento dell'intervallo $[0, +\infty]$.

5.3.4. Misure.

Definizione 5.3.5. (*Misura*). Si chiama *misura* ogni premisura avente come insieme di definizione una σ-algebra.

Esempi 5.3.6. In base alla precedente definizione abbiamo che:

a) la misura di Lebesgue m_h è una misura;

b) la misura secondo Peano-Jordan mis_h è una premisura ma non una misura;

c) la delta di Dirac δ_ω è una misura;

d) la premisura dell'Esempio 5.3.4 è una misura.

Un altro esempio di misura, che avremo modo di utilizzare in seguito, è dato dalla "misura che conta i punti".

Esempio 5.3.7. (*La misura che conta i punti*). Sia Ω un qualunque insieme non vuoto e sia $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione che associa ad ogni $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ il numero degli elementi dell'insieme A (si intende che $\nu(\emptyset) = 0$ e $\nu(A) = +\infty$ se l'insieme A è infinito).

È immediato verificare che ν è un contenuto. Proviamo che ν è una [premisura e quindi una] misura.

Per il Teorema 5.3.3 è sufficiente dimostrare che ν ha la proprietà di continuità verso l'alto. Sia $\{A_n\}$ una successione di sottoinsiemi di Ω tale che $A_n \uparrow A$. Osserviamo che, dato che ogni elemento di A appartiene definitivamente ad A_n, è vero pure che ogni sottoinsieme finito di A è definitivamente contenuto in A_n. Se ne deduce facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu(A) . \tag{5.3.13}$$

Infatti:

— se A è un insieme finito, allora, per la precedente osservazione, l'insieme A_n coincide definitivamente con A, quindi la (5.3.13) è banalmente verificata;

— se l'insieme A è infinito, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, considerato un qualunque sottoinsieme finito B di A, con $\nu(B) = k$, risulta, definitivamente, $B \subseteq A_n$ e quindi, per la monotonia del contenuto ν, $k \leq \nu(A_n)$; per l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{N}$ concludiamo che $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = +\infty$, quindi anche in questo caso vale la (5.3.13).

Dimostreremo più avanti che ogni premisura ammette un prolungamento che è una misura; ciò giustifica l'uso del termine "premisura".

5.4. Misure esterne.

Lo strumento che ci permetterà di provare che ogni premisura ammette un prolungamento che è misura sono le misure esterne e la relativa teoria.

5.4.1. Misure esterne. Il teorema di Carathéodory.

Definizione 5.4.1. (*Misura esterna*). Sia Ω un insieme non vuoto. Si chiama *misura esterna* su Ω ogni funzione $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ verificante i seguenti postulati:

ME$_1$) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

ME$_2$) $\mu^* \geq 0$;

ME$_3$) se gli insiemi $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ sono tali che $Q_1 \subseteq Q_2$, allora $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$;

ME$_4$) per ogni successione $\{Q_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{P}(\Omega)$ risulta

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) \quad . \tag{5.4.1}$$

Definizione 5.4.2. (*Insieme μ^*-misurabile*). Sia μ^* una misura esterna sull'insieme Ω. Un insieme $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ si dice *μ^*-misurabile* se accade che

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ . \tag{5.4.2}$$

Osserviamo che, se μ^* è una misura esterna sull'insieme Ω, allora, per ogni coppia di insiemi $A, Q \in \mathcal{P}(\Omega)$, essendo

$$Q = (Q \cap A) \cup (Q \cap A^c) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \quad ,$$

si ha, grazie ai postulati ME$_4$) e ME$_1$),

$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \quad ;$$

pertanto la condizione di μ^*-misurabilità (5.4.2) è perfettamente equivalente alla seguente:

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ . \tag{5.4.2$'$}$$

Teorema 5.4.1. (Il teorema di Carathéodory sulle misure esterne). *Sia μ^* una misura esterna sull'insieme Ω e sia $\mathcal{A}^*$ la famiglia di tutti gli insiemi $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ che sono μ^*-misurabili. Allora la famiglia $\mathcal{A}^*$ è una σ-algebra in Ω e la restrizione di μ^* alla σ-algebra $\mathcal{A}^*$ è una misura.*

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che $\mathcal{A}^*$ è un'algebra in Ω.

Si ha infatti:

a$_1$) $\Omega \in \mathcal{A}^*$;

per provare ciò basta osservare che, per ogni $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$, grazie al postulato ME$_1$) si ha

$$\mu^*(Q \cap \Omega) + \mu^*(Q \cap \Omega^c) \ = \ \mu^*(Q) + \mu^*(\emptyset) \ = \mu^*(Q) \quad ,$$

quindi l'insieme Ω verifica la condizione di μ^*-misurabilità (5.4.2)$'$.

Si ha inoltre:

a$_2$) $A \in \mathcal{A}^* \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{A}^*$;

ciò segue subito dal fatto che il ruolo dei due insiemi A e A^c nella condizione di μ^*-misurabilità (5.4.2) è perfettamente simmetrico.

Proviamo infine che:

a$_3$) $A, B \in \mathcal{A}^* \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}^*$.

Infatti, l'ipotesi $A \in \mathcal{A}^*$ implica che è verificata la (5.4.2)$'$; analogamente, dall'ipotesi $B \in \mathcal{A}^*$ segue che

$$\mu^*(Q) \ = \ \mu^*(Q \cap B) + \mu^*(Q \cap B^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ . \tag{5.4.3}$$

Poiché nella (5.4.3) l'insieme $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ è arbitrario, l'uguaglianza della (5.4.3) continua a valere, in particolare, se all'insieme Q si sostituisce un qualunque insieme del tipo $Q \cap A$, ovvero del tipo $Q \cap A^c$, con $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$; si ha pertanto:

$$\mu^*(Q \cap A) \ = \ \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \tag{5.4.4}$$

$$\mu^*(Q \cap A^c) \ = \ \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ . \tag{5.4.5}$$

Sostituendo le espressioni di $\mu^*(Q \cap A)$ e $\mu^*(Q \cap A^c)$ date dalla (5.4.4) e dalla (5.4.5) nella (5.4.2)$'$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) \ = \ & \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \\ & + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ . \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Per l'arbitrarietà di $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ nella (5.4.6) abbiamo che l'uguaglianza della (5.4.6) continua a valere se l'insieme Q viene rimpiazzato da $Q \cap (A \cup B)$; in questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} \mu^*(Q \cap (A \cup B)) \ = \ & \mu^*(Q \cap (A \cup B) \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap (A \cup B) \cap A \cap B^c) + \\ & + \mu^*(Q \cap (A \cup B) \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap (A \cup B) \cap A^c \cap B^c) \ = \\ = \ & \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \\ & + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap (A \cup B) \cap A^c \cap B^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \end{aligned}$$

da cui, essendo $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, per il postulato ME_1) si ricava:

$$
\begin{aligned}
(5.4.7) \qquad \mu^*(Q \cap (A \cup B)) \;&=\; \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \\
&\quad + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ .
\end{aligned}
$$

Tenuto conto della (5.4.7), la (5.4.6) si scrive:

$$\mu^*(Q) \;=\; \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B)^c) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ ,$$

pertanto anche l'insieme $A \cup B$ soddisfa la condizione di μ^*-misurabilità $(5.4.2)'$.

Dimostriamo adesso che $\mathcal{A}^*$, oltre che un'algebra, è anche un sistema di Dynkin in Ω. Una volta stabilito ciò, resterà provato che $\mathcal{A}^*$ è una σ-algebra in Ω. Infatti sappiamo che ogni algebra è $\cap$-stabile (Proposizione 5.1.3) e che ogni sistema di Dynkin $\cap$-stabile è una σ-algebra (Teorema 5.2.1).

Per provare che $\mathcal{A}^*$ è un sistema di Dynkin bisogna verificare soltanto il postulato:

d_3) se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}^*$, a due a due disgiunti, allora anche l'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene a $\mathcal{A}^*$.

A tale scopo, cominciamo con l'osservare che dalla (5.4.7), grazie al postulato ME_1), segue, in particolare, che:

— se $A, B \in \mathcal{A}^*$ sono insiemi disgiunti, allora

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) \;=\; \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap B) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega)$$

(si tenga presente che $A \cap B = \emptyset$ implica $A \subseteq B^c$ e $B \subseteq A^c$). Procedendo per induzione se ne deduce che:

— se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}^*$ sono insiemi a due a due disgiunti, allora

$$(5.4.8) \qquad \mu^*\left(Q \cap \left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right)\right) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \mu^*(Q \cap A_i) \qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ .$$

Proviamo d_3). Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}^*$, a due a due disgiunti. Si ha allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed ogni $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$, dato che $\cup_{i=1}^{k} A_i$ appartiene a $\mathcal{A}^*$,

$$\mu^*(Q) \;=\; \mu^*\left(Q \cap \left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right)\right) + \mu^*\left(Q \cap \left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right)^c\right) \;\geq$$

(per il postulato ME_3), dato che $\left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right)^c \supseteq \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$)

$$\geq\; \mu^*\left(Q \cap \left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right)\right) + \mu^*\left(Q \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) \;=$$

(per la (5.4.8))

$$=\; \sum_{i=1}^{k} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*\left(Q \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) .$$

Abbiamo così ottenuto la disuguaglianza

$$\mu^*(Q) \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*\left(Q \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{c}}\right) \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{N}\ , \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega)\ ;$$

da questa, passando al limite per $k \to \infty$, si ricava

$$\mu^*(Q) \;\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*\left(Q \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{c}}\right) \qquad\qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega)$$

e quindi, per il postulato ME_4),

$$\mu^*(Q) \;\geq\; \mu^*\left(Q \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)\right) + \mu^*\left(Q \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{c}}\right) \qquad\qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega)\ ,$$

dunque $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene a $\mathcal{A}^*$.

Proviamo infine che la restrizione di μ^* alla σ-algebra $\mathcal{A}^*$ è una misura. Bisogna verificare soltanto che:

M_4) per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}^*$, a due a due disgiunti, risulta

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

(infatti i postulati M_1) e M_2) sono ovviamente soddisfatti). Abbiamo già provato che, per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}^*$, a due a due disgiunti, vale la catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) \;&\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_n) + \mu^*\left(Q \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{c}}\right) \;\geq \\ &\geq\; \mu^*\left(Q \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)\right) + \mu^*\left(Q \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{c}}\right) \qquad\qquad \forall Q \in \mathcal{P}(\Omega)\ ; \end{aligned}$$

da questa, prendendo $Q = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, si ottiene subito la tesi.

5.4.2. Prolungamento di premisure.

Grazie al teorema di Carathéodory siamo ora in grado di provare che ogni premisura è la restrizione di una misura.

Teorema 5.4.2. (Prolungamento di una premisura). *Sia μ una premisura sull'anello $\mathcal{R}$. Esiste una misura $\tilde{\mu}$, definita sulla σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, la cui restrizione a $\mathcal{R}$ coincide con μ.*

Dimostrazione. Facciamo vedere che, a partire dalla premisura μ, è possibile costruire una misura esterna μ^* sull'insieme Ω, ambiente dell'anello $\mathcal{R}$, in modo che la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili contenga $\mathcal{R}$ (e quindi $\mathcal{A}(\mathcal{R})$) e la restrizione di μ^* a $\mathcal{R}$ coincida con μ. Una volta mostrato ciò, grazie al Teorema 5.4.1, è chiaro che per ottenere la tesi basta prendere come $\tilde{\mu}$ la restrizione di μ^* alla σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Indichiamo, per ogni $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$, con $\mathcal{V}(Q)$ l'insieme di tutte le successioni $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$ che "ricoprono" Q, cioè sono tali che $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq Q$. Definiamo quindi la funzione $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ nel modo seguente:

$$\mu^*(Q) \ = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ \mathcal{V}(Q) = \emptyset \ , \\ \inf\limits_{\{A_n\} \in \mathcal{V}(Q)} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) & \text{se } \ \mathcal{V}(Q) \neq \emptyset \ . \end{cases} \tag{5.4.9}$$

Verifichiamo che μ^* è una misura esterna su Ω.

Dalla definizione di μ^* è evidente che il postulato ME_2) è soddisfatto. Anche ME_1) è di immediata verifica; infatti la successione

$$\emptyset, \ \emptyset, \ \ldots, \ \emptyset, \ \ldots$$

appartiene a $\mathcal{V}(\emptyset)$ e il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ relativo a tale successione è zero, dunque $\mu^*(\emptyset) = 0$. Per quanto riguarda ME_3) il ragionamento da fare è semplice: dati $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, con $Q_1 \subseteq Q_2$, se $\mathcal{V}(Q_2) = \emptyset$ la disuguaglianza $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$ è certamente vera; se, invece, $\mathcal{V}(Q_2) \neq \emptyset$, allora, essendo, ovviamente, $\mathcal{V}(Q_2) \subseteq \mathcal{V}(Q_1)$, si ha che anche $\mathcal{V}(Q_1)$ è non vuoto e inoltre

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ : \ \{A_n\} \in \mathcal{V}(Q_2) \right\} \ \subseteq \ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ : \ \{A_n\} \in \mathcal{V}(Q_1) \right\} \quad ,$$

da cui, prendendo gli estremi inferiori, si ottiene $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$.

Verifichiamo la validità del postulato ME_4). Denotata con $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una qualunque successione di sottoinsiemi di Ω, distinguiamo i seguenti due casi. Se $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q_k) = +\infty$ la disuguaglianza $\mu^*(\cup_{k=1}^{\infty} Q_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q_k)$ è senz'altro vera. Se $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q_k) < +\infty$, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta $\mathcal{V}(Q_k) \neq \emptyset$; di conseguenza, per le proprietà dell'estremo inferiore, abbiamo che, assegnato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ vi è una successione $\{A_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}(Q_k)$ tale che

$$\mu(A_{k1}) + \mu(A_{k2}) + \ldots + \mu(A_{kn}) + \ldots < \mu^*(Q_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad . \tag{5.4.10}$$

Fissata una bigezione $r \to \varphi(r)$ tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e posto $A_{(k,n)} = A_{kn} \ \forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, consideriamo la successione $\left\{A_{\varphi(r)}\right\}_{r \in \mathbb{N}}$ ed osserviamo che tale successione appartiene a $\mathcal{V}(\cup_{k=1}^{\infty} Q_k)$; infatti gli insiemi $A_{\varphi(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, appartengono a $\mathcal{R}$ e inoltre, dato che ciascuna delle successioni $\{A_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, ricopre il corrispondente insieme Q_k, si ha

$$\bigcup_{r \in \mathbb{N}} A_{\varphi(r)} \ = \bigcup_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} A_{kn} \ = \ \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{kn} \right) \ \supseteq \ \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad .$$

Di conseguenza si ha

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) \;\leq\; \sum_{r=1}^{\infty} \mu\left(A_{\varphi(r)}\right) \quad . \tag{5.4.11}$$

Cerchiamo di maggiorare la somma della serie al secondo membro della (5.4.11). Osserviamo che, posto

$$\varphi(r) \;=\; (k_r, n_r) \quad , \qquad K_r \;=\; \max\{k_1, \ldots, k_r\} \qquad\qquad \forall r \in \mathbb{N}$$

e tenuto conto della (5.4.10), la somma parziale r-ma di tale serie si maggiora nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mu(A_{\varphi(1)}) + \mu(A_{\varphi(2)}) + \ldots + \mu(A_{\varphi(r)}) \;&=\; \mu(A_{k_1 n_1}) + \mu(A_{k_2 n_2}) + \ldots + \mu(A_{k_r n_r}) \;\leq \\
&\leq\; \sum_{k=1}^{K_r}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{kn}) \;<\; \sum_{k=1}^{K_r}\left[\mu^*(Q_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right] \;< \\
&<\; \sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu^*(Q_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(Q_k) + \varepsilon
\end{aligned}$$

e quindi, passando al limite per $\varepsilon \to 0$,

$$\mu(A_{\varphi(1)}) + \mu(A_{\varphi(2)}) + \ldots + \mu(A_{\varphi(r)}) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(Q_k) \qquad\qquad \forall r \in \mathbb{N} \; .$$

Di conseguenza si ha

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu\left(A_{\varphi(r)}\right) \;\leq \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(Q_k)$$

e quindi, per la (5.4.11),

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(Q_k)$$

Dimostriamo adesso che l'anello $\mathcal{R}$ è contenuto nella σ-algebra $\mathcal{A}^*$ degli insiemi μ^*-misurabili.

Sia $A \in \mathcal{R}$ e sia Q un qualunque insieme di $\mathcal{P}(\Omega)$. Verifichiamo che

$$\mu^*(Q) \;\geq\; \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^{\mathrm{c}}) \quad . \tag{5.4.12}$$

Ovviamente, possiamo limitarci a considerare il caso $\mu^*(Q) < +\infty$. Si ha allora $\mathcal{V}(Q) \neq \emptyset$ e, per le proprietà dell'estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $\{A_n\} \in \mathcal{V}(Q)$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(Q) + \varepsilon$. Notiamo che

$$A_n \cap A \in \mathcal{R} \qquad , \qquad A_n \setminus A \in \mathcal{R} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e inoltre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A \supseteq Q \cap A \quad ,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap A^{\mathrm{c}}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A^{\mathrm{c}} \supseteq Q \cap A^{\mathrm{c}} \quad ,$$

pertanto le successioni $\{A_n \cap A\}$ e $\{A_n \setminus A\}$ appartengono, rispettivamente, a $\mathcal{V}(Q \cap A)$ ed a $\mathcal{V}(Q \cap A^{\mathrm{c}})$, dunque si ha

$$\mu^*(Q \cap A) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) \qquad , \qquad \mu^*(Q \cap A^{\mathrm{c}}) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A) \quad .$$

D'altra parte, per la finita additività di μ, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{gathered} \mu(A_n) = \mu((A_n \cap A) \cup (A_n \cap A^{\mathrm{c}})) \ = \\ = \ \mu((A_n \cap A) \cup (A_n \setminus A)) \ = \ \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A) \quad , \end{gathered}$$

pertanto vale la catena di disuguaglianze

$$\begin{gathered} \mu^*(Q) + \varepsilon \ > \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A) \ \geq \\ \geq \ \mu^*(Q \cap A) \ + \ \mu^*(Q \cap A^{\mathrm{c}}) \quad ; \end{gathered}$$

da questa, passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ottiene la (5.4.12). Ciò completa la dimostrazione.

Una questione che è naturale porsi, a margine del precedente teorema, è quella dell'unicità della "misura prolungamento" $\tilde{\mu}$.

È subito visto però che tale questione ha, in generale, risposta negativa. Infatti, se consideriamo, in un qualunque insieme non vuoto Ω, l'anello minimo $\mathcal{R}_0 = \{\emptyset\}$ e, su $\mathcal{R}_0$, la premisura identicamente nulla μ_0 (l'unica possibile), allora ciascuna delle infinite misure che è possibile considerare su $\mathcal{A}(\mathcal{R}_0) = \{\emptyset, \Omega\}$ è un prolungamento di μ_0. Occorre quindi formulare altre ipotesi sulla premisura μ al fine di garantire l'unicità del prolungamento $\tilde{\mu}$, la cui esistenza è assicurata dal Teorema 5.4.2.

5.4.3. Un teorema di coincidenza di misure.

Il teorema che segue consente di dedurre la coincidenza di due misure μ_1 e μ_2, definite sulla stessa σ-algebra $\mathcal{A}$, dall'uguaglianza delle loro restrizioni ad un opportuno generatore di $\mathcal{A}$.

Teorema 5.4.3. (Coincidenza di misure). *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra sull'insieme $\Omega \neq \emptyset$ e siano μ_1, μ_2 due misure definite su $\mathcal{A}$.*

Supponiamo che esista un generatore $\cap$-stabile $\mathcal{E}$ di $\mathcal{A}$ tale che

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \qquad \forall E \in \mathcal{E} \; . \tag{5.4.13}$$

Supponiamo, ancora, che tale generatore $\mathcal{E}$ contenga tutti i termini di una successione di insiemi $\{E_n\}$ tale che $E_n \uparrow \Omega$ e inoltre $\mu_1(E_n)$ $[= \mu_2(E_n)] < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si ha, allora, $\mu_1 = \mu_2$.

Dimostrazione. Faremo vedere che, per ogni insieme $E \in \mathcal{E}$ verificante la condizione $\mu_1(E) < +\infty$, risulta

$$\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \qquad \forall A \in \mathcal{A} \; . \tag{5.4.14}$$

Una volta acquisito ciò avremo che

$$\mu_1(A \cap E_n) = \mu_2(A \cap E_n) \qquad \forall A \in \mathcal{A} \; , \; \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi, dato che $A \cap E_n \uparrow A$, per la proprietà di continuità verso l'alto delle misure μ_1 e μ_2,

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A} \; ,$$

cioè la tesi.

Fissato $E \in \mathcal{E}$, con $\mu_1(E) < +\infty$, consideriamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{D}_E \; = \; \{A \in \mathcal{A} \, : \, \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\}$$

e verifichiamo che $\mathcal{D}_E$ è un sistema di Dynkin in Ω. Si ha infatti, grazie all'ipotesi (5.4.13) ed alla definizione di $\mathcal{D}_E$:

d$_1$) $\Omega \in \mathcal{D}_E$

in quanto $\Omega \in \mathcal{A}$ e $\mu_1(\Omega \cap E) = \mu_1(E) = \mu_2(E) = \mu_2(\Omega \cap E)$;

d$_2$) $D \in \mathcal{D}_E \implies D^{\mathrm{c}} \in \mathcal{D}_E$,

in quanto $D^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$ e, per la proprietà di sottrattività di μ_1 e μ_2,

$$\begin{aligned} \mu_1(D^{\mathrm{c}} \cap E) \; &= \; \mu_1(E \setminus (D \cap E)) \; = \; \mu_1(E) - \mu_1(D \cap E)) \; = \\ = \; \mu_2(E) - \mu_2(D \cap E)) \; &= \; \mu_2(E \setminus (D \cap E)) \; = \; \mu_2(D^{\mathrm{c}} \cap E) \; ; \end{aligned}$$

d_3) se $\{D_n\}$ è una qualunque successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{D}_E$, a due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}_E$,

in quanto $\cup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{A}$ e, per la σ-additività di μ_1 e μ_2,

$$\mu_1((\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \cap E) \; = \; \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cap E)) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(D_n \cap E) \; =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(D_n \cap E) \; = \; \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cap E)) \; = \; \mu_2((\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \cap E) \quad .$$

Osserviamo adesso che, essendo $\mathcal{E}$ $\cap$-stabile, si ha $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$ e quindi, sempre grazie al fatto che $\mathcal{E}$ è $\cap$-stabile,

$$\mathcal{A} \; = \; \mathcal{A}(\mathcal{E}) \; = \; \mathcal{D}(\mathcal{E}) \; \subseteq \; \mathcal{D}_E \; ,$$

dunque $\mathcal{A} = \mathcal{D}_E$, cioè vale la (5.4.14). Il teorema è così dimostrato.

5.4.4. Premisure σ-finite. Unicità della misura prolungamento.

Definizione 5.4.3. (*Contenuto σ-finito*). Sia $\mathcal{R}$ un anello nell'insieme $\Omega \neq \emptyset$ e sia μ un contenuto su $\mathcal{R}$. Si dice che il contenuto μ è *σ-finito* se esiste una successione $\{A_n\}$ di insiemi di $\mathcal{R}$ tale che $A_n \uparrow \Omega$ e $\mu(A_n) < +\infty \; \forall n \in \mathbb{N}$.

La successiva Proposizione 5.4.1 indica altri modi equivalenti di definire i contenuti σ-finiti.

Proposizione 5.4.1. *Sia $\mathcal{R}$ un anello nell'insieme $\Omega \neq \emptyset$ e sia μ un contenuto su $\mathcal{R}$. Sono fatti equivalenti:*

i) *il contenuto μ è σ-finito;*

ii) *esiste una successione $\{B_n\}$, di insiemi appartenenti a $\mathcal{R}$, tale che $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ e $\mu(B_n) < +\infty \; \forall n \in \mathbb{N}$;*

iii) *esiste una successione $\{C_n\}$ di insiemi di $\mathcal{R}$, a due a due disgiunti, tale che $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \Omega$ e $\mu(C_n) < +\infty \; \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. i) $\Longrightarrow$ ii). Basta prendere come successione $\{B_n\}$ la stessa successione $\{A_n\}$ dell'ipotesi i).

ii) $\Longrightarrow$ iii). Basta prendere come successione $\{C_n\}$ la successione definita nel modo seguente:

$$C_n \; = \; \begin{cases} B_1 & \text{se } n = 1 \; , \\ B_n \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

(la monotonia di μ implica che $\mu(C_n) \leq \mu(B_n) < +\infty \; \forall n \in \mathbb{N}$).

iii) $\Longrightarrow$ i). Basta prendere come successione $\{A_n\}$ la successione $\{C_1 \cup \ldots \cup C_n\}$ (il fatto che sia $\mu(A_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ si ottiene grazie alla proprietà di finita subadditività di μ).

Esempi 5.4.1.

1) La misura di Lebesgue m_h è σ-finita. Per verificare ciò basta considerare la successione $\{A_n\} = \{[-n,n]^h\}$.

2) Anche la misura secondo Peano-Jordan mis_h è σ-finita. Ciò si ottiene considerando la stessa successione $\{A_n\} = \{[-n,n]^h\}$ utilizzata in 1).

3) Sia Ω un insieme non vuoto e consideriamo, sulla σ-algebra $\mathcal{P}(\Omega)$, la misura ν "che conta i punti" (Esempio 2.3.7).

Proviamo che ν è σ-finita se e soltanto se l'insieme Ω è finito oppure numerabile.

Infatti, se Ω è finito, per verificare che ν ha i requisiti previsti dalla Definizione 5.4.3 basta considerare come successione $\{A_n\}$ la successione $\Omega\,,\,\Omega\,,\ldots\,,\,\Omega\,,\ldots$. Se, invece, Ω è numerabile, allora, considerata una qualunque bigezione $n \to \omega_n$ tra $\mathbb{N}$ e Ω, basta prendere come successione $\{A_n\}$ quella definita nel seguente modo: $A_n = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Viceversa, se ν è σ-finita, cioè esiste una successione $\{A_n\}$ avente le caratteristiche indicate nella Definizione 5.4.3, allora ogni insieme A_n, $n \in \mathbb{N}$, è finito, dunque l'insieme $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ è finito oppure numerabile.

Oservazione 5.4.1. Il fatto che un contenuto μ (su un anello $\mathcal{R}$) sia finito, cioè tale che $\mu(A) < +\infty \ \forall A \in \mathcal{R}$, non implica che μ sia σ-finito. Ad esempio, la premisura identicamente nulla μ_0 sull'anello minimo $\mathcal{R}_0 = \{\emptyset\}$ è, ovviamente, finita ma non σ-finita. Un'altro esempio di premisura finita ma non σ-finita si ottiene considerando, per un insieme Ω non numerabile, la restrizione della misura che conta i punti all'anello dei sottoinsiemi finiti di Ω.

Se però, oltre all'ipotesi che il contenuto μ sia finito, si ha anche il fatto che l'insieme Ω appartenga a $\mathcal{R}$, allora si può concludere che μ è σ-finito. Basta, in tal caso, considerare come successione $\{A_n\}$ la successione $\Omega\,,\,\Omega\,,\ldots\,,\,\Omega\,,\ldots$.

In particolare si ha la seguente

Proposizione 5.4.2. *Una misura finita è σ-finita.*

Concludiamo con il teorema di esistenza ed unicità della misura prolungamento di una premisura σ-finita.

Teorema 5.4.4. (Prolungamento di una premisura σ-finita). *Se μ è una premisura σ-finita su un anello $\mathcal{R}$, allora esiste una ed una sola misura $\tilde{\mu}$, definita sulla σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, la cui restrizione a $\mathcal{R}$ coincide con μ.*

Dimostrazione. L'esistenza di $\tilde{\mu}$ segue dal Teorema 5.4.2. Proviamo l'unicità. Infatti, se $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ sono due misure definite sulla σ-algebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$ tali che

$$\tilde{\mu}_1(A) = \tilde{\mu}_2(A) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{R}\ ,$$

allora è possibile applicare alle misure $\tilde{\mu}_1$ e $\tilde{\mu}_2$ il Teorema 5.4.3 prendendo come generatore $\mathcal{E}$ di $\mathcal{A}$ l'anello $\mathcal{R}$ (notiamo che l'esistenza della successione $\{E_n\}$ è garantita dal fatto che μ è σ-finita); conseguentemente si ha $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$.