4. La misura di Lebesgue.

Nel Capitolo 2, dedicato all'esposizione della teoria della misura secondo Peano-Jordan, abbiamo anche evidenziato (Esempio 2.3.1 e Osservazione 2.3.1) alcuni limiti della teoria stessa, precisamente:

a) non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ sono misurabili secondo Peano-Jordan;

b) la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan non è chiusa rispetto all'operazione di unione numerabile

(osserviamo che, naturalmente, il fatto a) è una conseguenza di b)).

In questo capitolo presentiamo un'altra teoria della misura per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ – quella secondo Lebesgue – la quale, come vedremo, costituisce un effettivo "prolungamento" della precedente teoria (ogni insieme misurabile secondo Peano-Jordan risulta misurabile anche secondo Lebesgue e conserva la stessa misura, mentre vi sono insiemi misurabili secondo Lebesgue che non lo sono secondo Peano-Jordan) e non presenta più l'inconveniente lamentato nel punto b). Infatti, nell'ambito della teoria della misura secondo Lebesgue è vero che, data una qualsiasi successione $\{E_n\}$ di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^h$, la loro unione $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ è ancora un insieme misurabile; inoltre, se gli insiemi E_n sono a due a due disgiunti, la misura dell'unione è uguale alla somma della serie delle misure dei singoli insiemi E_n (proprietà di "σ-additività" della misura).

Per quanto riguarda l'inconveniente a) vedremo invece più avanti (Capitolo 10) che neanche con la nuova teoria si riesce ad eliminarlo. Tuttavia, nella medesima occasione, avremo modo di renderci conto che il suddetto inconveniente è, in un certo senso, necessario. Infatti lo stesso ragionamento che garantisce l'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue mostra anche l'impossibilità di avere una misura definita per tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ la quale soddisfi, oltre ai due requisiti, abbastanza naturali, di prolungare la misura elementare (la misura di ogni plurintervallo coincide con la sua misura elementare) e di essere "invariante per traslazioni" (tutti gli insiemi che si ottengono da un insieme misurabile mediante una traslazione sono misurabili ed hanno la stessa misura dell'insieme di partenza), anche quello di essere σ-additiva. Si potrebbe poi discutere sul fatto che la proprietà di σ-additività (anziché la semplice finita additività) sia un requisito più o meno naturale, ma questa è una questione filosofica nella quale preferiamo non addentrarci. Ci limitiamo ad osservare soltanto che, con la proprietà di σ-additività, si ottiene una teoria più ricca di risultati e pertanto più potente.

Anche la teoria della misura secondo Lebesgue, così come quella secondo Peano-Jordan, si sviluppa per gradi. I "capisaldi" della teoria sono:

— la misura dei plurintervalli, che si assume per definizione uguale alla misura elementare;

— la misura degli insiemi aperti e limitati (un insieme aperto e limitato è misurabile per definizione e la sua misura è uguale all'estremo superiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli in esso contenuti);

— la misura degli insiemi chiusi e limitati (un insieme chiuso e limitato è misurabile per definizione e la sua misura è uguale all'estremo inferiore dell'insieme delle misure degli aperti e limitati che lo contengono);

— la [misurabilità e la] misura degli insiemi limitati (un insieme limitato $E \subseteq \mathbb{R}^h$ si dice misurabile se l'insieme numerico delle misure dei chiusi e limitati contenuti in E e quello delle misure degli aperti e limitati contenenti E sono contigui; in questo caso la misura di E è l'elemento di separazione dei suddetti insiemi numerici);

— la [misurabilità e la] misura dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ in generale (un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^h$ si dice misurabile se sono misurabili tutti gli insiemi limitati $E \cap I$, che si ottengono intersecando E con un intervallo chiuso I; in questo caso la misura di E è l'estremo superiore dell'insieme che ha come elementi tutte le misure degli insiemi $E \cap I$).

Naturalmente, tutte le volte che, passando da un caposaldo ad un altro, si prenderanno in esame nella nuova definizione insiemi che sono già stati considerati in precedenza, si dovrà verificare la coerenza tra la nuova definizione (di [misurabilità e di] misura) e la definizione precedente.

Notazione. La misura secondo Lebesgue di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^h$ verrà indicata con il simbolo $\mathrm{m}(E)$ oppure (soprattutto nei capitoli successivi) con $\mathrm{m}_h(E)$, quando si vorrà evidenziare la dimensione dello spazio "ambiente" $\mathbb{R}^h$.

4.1. La misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti e limitati.

Abbiamo già detto che il punto di partenza della teoria della misura secondo Lebesgue è la misura dei plurintervalli, uguale per definizione alla misura elementare.

Definizione 4.1.1. (*Misura secondo Lebesgue dei plurintervalli*). Ogni plurintervallo $\Pi \in \mathcal{P}_h$ è misurabile secondo Lebesgue e la misura secondo Lebesgue $\mathrm{m}(\Pi)$ di Π è uguale alla sua misura elementare $\mathrm{mis}_{\mathrm{e}}(\Pi)$.

Passiamo ora ad occuparci della misura degli insiemi aperti e limitati.
Denotiamo con $\mathcal{A}_h^*$ la famiglia dei sottoinsiemi aperti e limitati di $\mathbb{R}^h$.
Sia $A \in \mathcal{A}_h^*$. Osserviamo che:

— esistono certamente plurintervalli Π contenuti in A; infatti, in ogni caso, vi è $\Pi = \emptyset$; inoltre, se $A \neq \emptyset$, allora vi sono intervalli non degeneri contenuti in A ([1]);

— poiché A è limitato, esiste almeno un intervallo $J \in \mathcal{I}_h$ contenente A; pertanto l'insieme numerico

$$\{\mathrm{m}(\Pi) \, : \, \Pi \in \mathcal{P}_h \, , \, \Pi \subseteq A\}$$

è limitato superiormente (in $\mathbb{R}$); infatti, per il Teorema 2.2.2, b), il numero $\mathrm{m}(J)$ è un maggiorante di tale insieme.

([1]) infatti, dato che $A = \overset{\circ}{A}$, siamo sicuri che per ogni $x \in A$ esiste un intervallo non degenere $I \in \mathcal{I}_h$ tale che $x \in \overset{\circ}{I}$ e $I \subseteq A$.

Definizione 4.1.2. (*Misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti e limitatii*). Ogni insieme $A \in \mathcal{A}_h^*$ è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura secondo Lebesgue $\mathrm{m}(A)$ è uguale all'estremo superiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli Π contenuti in A:

$$\mathrm{m}(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup\{\mathrm{m}(\Pi) \, : \, \Pi \in \mathcal{P}_h \, , \, \Pi \subseteq A\} \, .$$

L'osservazione seguente può sembrare eccessivamente pignola, ma è necessaria per uno sviluppo rigoroso della teoria.

Osservazione 4.1.1. (*Coerenza*). Osserviamo che l'insieme vuoto è l'unico insieme che appartiene sia alla famiglia $\mathcal{P}_h$ che alla famiglia $\mathcal{A}_h^*$ e che la misura dell'insieme vuoto è zero sia secondo la Definizione 4.1.2 che secondo la Definizione 4.1.1.

Dalla Definizione 4.1.2 segue subito che, se $A \in \mathcal{A}_h^*$, allora $\mathrm{m}(A)$ è un numero reale non negativo e risulta $\mathrm{m}(A) = 0$ solo nel caso in cui $A = \emptyset$.

Si ha inoltre, ovviamente, la seguente proposizione

Proposizione 4.1.1. *Sia $A \in \mathcal{A}_h^*$. Se A è misurabile secondo Peano-Jordan, allora*

$$\mathrm{mis}(A) \;=\; \mathrm{m}(A) \, .$$

Mostreremo più avanti (Esempio 4.1.1) che esistono insiemi $A \in \mathcal{A}_h^*$ che non sono misurabili secondo Peano-Jordan.

Teorema 4.1.1. (Proprietà della misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti e limitati). *La misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti e limitati gode delle seguenti proprietà.*

a) (Monotonia). *Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h^*$ sono tali che $A_1 \subseteq A_2$, allora*

$$\mathrm{m}(A_1) \;\leq\; \mathrm{m}(A_2) \, .$$

b) (Continuità verso l'alto). *Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi di $\mathcal{A}_h^*$ tale che $A_n \uparrow A$. Supponiamo che l'insieme A, oltre che aperto, sia anche limitato, cioè $A \in \mathcal{A}_h^*$. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(A_n) \;=\; \mathrm{m}(A) \, .$$

c) *Sia $A \in \mathcal{A}_h^*$ e sia $\{\Pi_n\}$ una successione di plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ invadente A. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(\Pi_n) \;=\; \mathrm{m}(A) \, .$$

d) (Modularità). *Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h^*$. Allora*

$$\mathrm{m}(A_1 \cup A_2) + \mathrm{m}(A_1 \cap A_2) \;=\; \mathrm{m}(A_1) + \mathrm{m}(A_2)$$

(osserviamo che ha senso calcolare le misure $\mathrm{m}(A_1 \cup A_2)$ e $\mathrm{m}(A_1 \cap A_2)$ poiché gli insiemi $A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2$ appartengono a $\mathcal{A}_h^*$).

e) (Finita sub-additività). *Siano* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h^*$. *Allora*

$$\mathrm{m}(A_1 \cup A_2) \;\leq\; \mathrm{m}(A_1) + \mathrm{m}(A_2)\ .$$

f) (Finita additività). *Siano* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h^*$ *insiemi disgiunti. Allora*

$$\mathrm{m}(A_1 \cup A_2) \;=\; \mathrm{m}(A_1) + \mathrm{m}(A_2)\ .$$

g) (Numerabile sub-additività). *Sia* $\{A_n\}$ *una successione di insiemi appartenenti a* $\mathcal{A}_h^*$. *Supponiamo che l'unione* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ *sia un insieme limitato, dunque* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_h^*$. *Allora*

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n)\ .$$

Dimostrazione. a) Segue dal fatto che l'insieme numerico $\{\mathrm{m}(\Pi) \,:\, \Pi \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi \subseteq A_1\}$ è contenuto in $\{\mathrm{m}(\Pi) \,:\, \Pi \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi \subseteq A_2\}$.

b) Da a) segue che la successione $\{\mathrm{m}(A_n)\}$ è non decrescente e che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}(A_n) \;\leq\; \mathrm{m}(A)\ .$$

Basta allora provare che

$$\mathrm{m}(A) \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}(A_n)\ .$$

Sia $\varepsilon > 0$. Per la definizione di $\mathrm{m}(A)$ e per le proprietà dell'estremo superiore esiste $\Pi \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi \subseteq A\,,$ tale che $\mathrm{m}(A) - \varepsilon < \mathrm{m}(\Pi)\,.$ D'altra parte la successione $\{A_n\}$ invade A (Teorema 3.2.1), quindi esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\Pi \subseteq A_{\overline{n}}$. Si ha allora, per la definizione di $\mathrm{m}(A_{\overline{n}})$,

$$\mathrm{m}(A) - \varepsilon \;<\; \mathrm{m}(\Pi) \;\leq\; \mathrm{m}(A_{\overline{n}}) \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}(A_n)\ .$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ risulta $\mathrm{m}(A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}(A_n)\,.$

c) Per il Teorema 2.2.2, b) e per la definizione di $\mathrm{m}(A)$, si ha che $\{\mathrm{m}(\Pi_n)\}$ è una successione non decrescente e che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}(\Pi_n) \leq \mathrm{m}(A)\,.$ Basta allora provare che $\mathrm{m}(A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}(\Pi_n)\,.$ Ciò si ottiene ragionando esattamente come per b).

d) Siano (Teorema 3.4.1) $\{\Pi_n'\}\,,\ \{\Pi_n''\}$ due succesioni di plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ tali che

$$\Pi_n' \subseteq \Pi_{n+1}' \subseteq A_1 \quad , \quad \Pi_n'' \subseteq \Pi_{n+1}'' \subseteq A_2$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e inoltre

$$\mathring{\Pi}_n' \uparrow A_1 \quad , \quad \mathring{\Pi}_n'' \uparrow A_2\ ,$$

sicché (Osservazione 3.4.1) $\{\Pi_n'\}$ e $\{\Pi_n''\}$ invadono, rispettivamente, A_1 e A_2. Per il Teorema 2.2.2, c), per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathrm{m}(\Pi_n' \cup \Pi_n'') + \mathrm{m}(\Pi_n' \cap \Pi_n'') \;=\; \mathrm{m}(\Pi_n') + \mathrm{m}(\Pi_n'')\ .$$

Inoltre (cfr. l'Osservazione 3.2.1) le due successioni di plurintervalli $\{\Pi'_n \cup \Pi''_n\}$, $\{\Pi'_n \cap \Pi''_n\}$ invadono, rispettivamente, $A_1 \cup A_2$ ([2]) e $A_1 \cap A_2$. Allora, passando al limite per $n \to \infty$ nella precedente uguaglianza, si ottiene, per la proprietà c),

$$\mathrm{m}(A_1 \cup A_2) + \mathrm{m}(A_1 \cap A_2) \; = \; \mathrm{m}(A_1) + \mathrm{m}(A_2) \; .$$

e) e f) sono ovvie conseguenze di d).

g) Poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Si ha allora $B_n \in \mathcal{A}_h^*$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $B_n \uparrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, quindi, per la proprietà b), $\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(B_n) = \mathrm{m}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$. D'altra parte, per la proprietà e) (cfr. anche la successiva Osservazione 4.1.2), per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\mathrm{m}(B_n) \; \leq \; \mathrm{m}(A_1) + \ldots + \mathrm{m}(A_n) \; ,$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, l'asserto.

Osservazione 4.1.2. Le proprietà e) e f) si estendono subito, ragionando per induzione, al caso di un qualsiasi numero finito di insiemi aperti e limitati. Valgono quindi le seguenti proprietà.

e$'$) *Siano* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_h^*$. *Allora*

$$\mathrm{m}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \; \leq \; \mathrm{m}(A_1) \; + \; \ldots \; + \; \mathrm{m}(A_n) \; .$$

f$'$) *Siano* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_h^*$ *insiemi a due a due disgiunti. Allora*

$$\mathrm{m}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \; = \; \mathrm{m}(A_1) \; + \; \ldots \; + \; \mathrm{m}(A_n) \; .$$

Proposizione 4.1.2. *Sia* $\Pi \in \mathcal{P}_h$. *Allora* $\mathrm{m}(\overset{\circ}{\Pi}) = \mathrm{m}(\Pi)$.

Dimostrazione. Infatti, il Teorema 2.2.2, b) e la Proposizione 2.2.5 implicano che

$$\sup \Big\{ \mathrm{m}(S) \; : \; S \in \mathcal{P}_h \, , \, S \subseteq \overset{\circ}{\Pi} \Big\} = \mathrm{m}(\Pi) \; .$$

Esempio 4.1.1. (*Un insieme aperto e limitato non misurabile secondo Peano-Jordan*). Fissato un insieme $B \in \mathcal{A}_h^*$, $B \neq \emptyset$ (quindi $\mathrm{m}(B) > 0$), consideriamo l'insieme numerabile $M = B \cap \mathbb{Q}^h$ e supponiamo che $n \to x_n$ sia una bigezione tra $\mathbb{N}$ e M. Fissiamo poi un qualunque numero ε tale che $0 < \varepsilon < \mathrm{m}(B)$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, scegliamo, come è certamente possibile, un intervallo $\Delta_n \in \mathcal{I}_h$ tale che

$$x_n \in \overset{\circ}{\Delta}_n \quad , \quad \Delta_n \subseteq B \quad , \quad \mathrm{m}(\overset{\circ}{\Delta}_n) \; = \; \mathrm{m}(\Delta_n) \; \leq \; \varepsilon 2^{-n} \; .$$

([2]) La successione $\Big\{ \overset{\circ}{\Pi}{}'_n \cup \overset{\circ}{\Pi}{}''_n \Big\}$ invade $A_1 \cup A_2$; ne segue che anche $\big\{ \Pi'_n \cup \Pi''_n \big\}$ invade $A_1 \cup A_2$.

Consideriamo l'insieme A definito nel seguente modo:

$$A \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{\Delta}_n \;.$$

L'insieme A è aperto (è unione di aperti) e limitato (è contenuto in B). Per il Teorema 4.1.1, g) la sua misura $\mathrm{m}(A)$ verifica la disuguaglianza

$$\mathrm{m}(A) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(\overset{\circ}{\Delta}_n) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} \;=\; \varepsilon \;.$$

Proviamo che A non è misurabile secondo Peano-Jordan. Infatti, mentre, da una parte, si ha

$$\sup\{\mathrm{mis_e}(\Pi) \,:\, \Pi \in \mathcal{P}_h \,, \Pi \subseteq A\} \;=\; \mathrm{m}(A) \;\leq\; \varepsilon \;<\; \mathrm{m}(B) \;,$$

facciamo vedere subito che, d'altra parte, risulta

$$\inf\{\mathrm{mis_e}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h \,,\, \Pi' \supseteq A\} \;\geq\; \mathrm{m}(B) \;. \tag{4.1.1}$$

Osserviamo a tale scopo che, per la definizione di $\mathrm{m}(B)$, per ogni $\sigma > 0$ esiste un plurintervallo $S \subseteq B$ tale che $\mathrm{m}(S) > \mathrm{m}(B) - \sigma$. Allora, tenendo presente che, per la densità di $\mathbb{Q}^h$ in $\mathbb{R}^h$, è $\overline{M} \supseteq B$, per ogni plurintervallo $\Pi' \supseteq A$ risulta

$$\Pi' \;=\; \overline{\Pi'} \;\supseteq\; \overline{A} \;\supseteq\; \overline{M} \;\supseteq\; B \;\supseteq\; S$$

e quindi

$$\mathrm{m}(\Pi') \;\geq\; \mathrm{m}(S) \;>\; \mathrm{m}(B) - \sigma \;,$$

dunque

$$\inf\{\mathrm{mis_e}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h \,,\, \Pi' \supseteq A\} \;\geq\; \mathrm{m}(B) - \sigma \;,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\sigma > 0$, segue la (4.1.1).

La successiva Proposizione 4.1.3 sarà utile per una questione di coerenza che si porrà più avanti.

Proposizione 4.1.3. *Sia* $\Pi \in \mathcal{P}_h$. *Allora*

$$\mathrm{m}(\Pi) \;=\; \inf\{\mathrm{m}(A) \,:\, A \in \mathcal{A}_h^* \,,\, A \supseteq \Pi\} \;. \tag{4.1.2}$$

Dimostrazione. Per la Definizione 4.1.2 si ha che $\mathrm{m}(\Pi)$ è un minorante dell'insieme numerico $\{\mathrm{m}(A) \,:\, A \in \mathcal{A}_h^* \,,\, A \supseteq \Pi\}$. D'altra parte, per la Proposizione 2.2.5, per ogni

$\varepsilon > 0$ esiste $R \in \mathcal{P}_h$ tale che $\Pi \subseteq \overset{\circ}{R}$ e $\mathrm{m}(R) < \mathrm{m}(\Pi) + \varepsilon$. Per la Proposizione 4.1.2 si ha $\mathrm{m}(\overset{\circ}{R}) = \mathrm{m}(R)$, quindi abbiamo trovato un insieme $A \in \mathcal{A}_h^*$ ($A = \overset{\circ}{R}$) tale che

$$\mathrm{m}(A) \ < \ \mathrm{m}(\Pi) + \varepsilon \ ;$$

possiamo allora concludere che vale la (4.1.2).

4.2. La misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi e limitati.

Denotiamo con $\mathcal{C}_h^*$ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^h$.
È ovvio che, se $C \in \mathcal{C}_h^*$, esistono insiemi $A \in \mathcal{A}_h^*$ tali che $A \supseteq C$.

Definizione 4.2.1. (*Misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi e limitati*). Ogni insieme $C \in \mathcal{C}_h^*$ è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura secondo Lebesgue $\mathrm{m}(C)$ è il numero reale non negativo definito nel modo seguente:

$$\mathrm{m}(C) \overset{\text{def.}}{=} \inf\{\mathrm{m}(A) \, : \, A \in \mathcal{A}_h^* \, , \, A \supseteq C\} \ .$$

Osservazione 4.2.1. (*Coerenza*). La famiglia $\mathcal{P}_h$ dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ è contenuta nella famiglia $\mathcal{C}_h^*$. La Proposizione 4.1.3 assicura che la Definizione 4.2.1 è coerente con la precedente definizione di misura secondo Lebesgue dei plurintervalli (Definizione 4.1.1).

Teorema 4.2.1. (Proprietà della misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi e limitati). *La misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi e limitati gode delle seguenti proprietà.*

a) (Monotonia). *Siano $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_h^*$ tali che $C_1 \subseteq C_2$. Allora*

$$\mathrm{m}(C_1) \ \leq \ \mathrm{m}(C_2) \ .$$

b) *Sia $C \in \mathcal{C}_h^*$. Allora*

$$\mathrm{m}(C) \ = \ \inf\{\mathrm{m}(\Pi') \, : \, \Pi' \in \mathcal{P}_h \, , \, \Pi' \supseteq C\} \ . \tag{4.2.1}$$

c) *Sia $A \in \mathcal{A}_h^*$. Allora*

$$\mathrm{m}(A) \ = \ \sup\{\mathrm{m}(C) \, : \, C \in \mathcal{C}_h^* \, , \, C \subseteq A\} \ . \tag{4.2.2}$$

d) *Siano $A \in \mathcal{A}_h^*$, $\Pi \in \mathcal{P}_h$ tali che $A \supseteq \Pi$. Allora*

$$\mathrm{m}(A \setminus \Pi) \ = \ \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(\Pi) \ . \qquad (^3)$$

(3) Le misure $\mathrm{m}(A \setminus \Pi)$ e $\mathrm{m}(A \setminus C)$ che figurano nelle proprietà d) e e) hanno significato in quanto gli insiemi $A \setminus \Pi$ e $A \setminus C$ sono aperti e limitati.

e) *Siano* $A \in \mathcal{A}_h^*$, $C \in \mathcal{C}_h^*$ *tali che* $A \supseteq C$ *. Allora*

$$\mathrm{m}(A \setminus C) \;=\; \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(C) \; . \qquad (^3)$$

f) (Modularità). *Siano* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_h^*$*. Allora*

$$\mathrm{m}(C_1 \cup C_2) + \mathrm{m}(C_1 \cap C_2) \;= \mathrm{m}(C_1) + \mathrm{m}(C_2) \; .$$

g) (Finita sub-additività). *Siano* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_h^*$*. Allora*

$$\mathrm{m}(C_1 \cup C_2) \;\leq\; \mathrm{m}(C_1) + \mathrm{m}(C_2) \; .$$

h) (Finita additività). *Siano* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_h^*$ *tali che* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$*. Allora*

$$\mathrm{m}(C_1 \cup C_2) \;=\; \mathrm{m}(C_1) + \mathrm{m}(C_2) \; .$$

Dimostrazione. a) Segue dal fatto che l'insieme numerico $\{\mathrm{m}(A) \,:\, A \in \mathcal{C}_h^*\,,\, A \supseteq C_2\}$ è contenuto nell'insieme numerico $\{\mathrm{m}(A) \,:\, A \in \mathcal{C}_h^*\,,\, A \supseteq C_1\}$.

b) Dalla proprietà a) segue che il numero $\mathrm{m}(C)$ è un minorante dell'insieme numerico $\{\mathrm{m}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi' \supseteq C\}$, quindi

$$\mathrm{m}(C) \;\leq\; \inf\{\mathrm{m}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi' \supseteq C\} \; .$$

D'altra parte, per la definizione di $\mathrm{m}(C)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $A \in \mathcal{C}_h^*$ tale che $A \supseteq C$ e $\mathrm{m}(A) < \mathrm{m}(C) + \varepsilon$; per il Lemma 3.4.1 esiste anche $\Pi^* \in \mathcal{P}_h$ tale che $C \subseteq \Pi^* \subseteq A$; si ha allora

$$\inf\{\mathrm{m}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi' \supseteq C\} \;\leq\; \mathrm{m}(\Pi^*) \;\leq\; \mathrm{m}(A) < \mathrm{m}(C) + \varepsilon$$

e conseguentemente, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$\inf\{\mathrm{m}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi' \supseteq C\} \;\leq\; \mathrm{m}(C) \; .$$

Pertanto vale la (4.2.1).

c) Per la Definizione 4.2.1 il numero $\mathrm{m}(A)$ è un maggiorante dell'insieme numerico $\{\mathrm{m}(C) \,:\, C \in \mathcal{C}_h^*\,,\, C \subseteq A\}$, quindi

$$\sup\{\mathrm{m}(C) \,:\, C \in \mathcal{C}_h^*\,,\, C \subseteq A\} \;\leq \mathrm{m}(A) \; .$$

D'altra parte, essendo

$$\{\mathrm{m}(\Pi) \,:\, \Pi \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi \subseteq A\} \;\subseteq\; \{\mathrm{m}(C) \,:\, C \in \mathcal{C}_h^*\,,\, C \subseteq A\} \; ,$$

si ha pure

$$\mathrm{m}(A) \;=\; \sup\{\mathrm{m}(\Pi)\,:\,\Pi \in \mathcal{P}_h\,,\,\Pi \subseteq A\} \;\leq \sup\,\{\mathrm{m}(C)\,:\,C \in \mathcal{C}_h^*\,,\,C \subseteq A\}\ ,$$

dunque vale la (4.2.2).

d) Sia R un qualunque plurintervallo contenuto in $A \setminus \Pi$. Allora $R \cup \Pi \in \mathcal{P}_h$ e $R \cup \Pi \subseteq A$, quindi

$$\mathrm{m}(R \cup \Pi) \;\leq\; \mathrm{m}(A)\ . \tag{4.2.3}$$

Per il Teorema 2.2.2, a) si ha

$$\mathrm{m}(R \cup \Pi) \;=\; \mathrm{m}(R) + \mathrm{m}(\Pi)\ ,$$

quindi la (4.2.3) si scrive

$$\mathrm{m}(R) \;\leq\; \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(\Pi)\ .$$

Per l'arbitrarietà di $R \in \mathcal{P}_h$ tale che $R \subseteq A \setminus \Pi$ si ha, per la definizione di $\mathrm{m}(A \setminus \Pi)$,

$$\mathrm{m}(A \setminus \Pi) \;\leq\; \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(\Pi)\ .$$

Dimostriamo che vale anche la disuguaglianza contraria. Sia $A' \in \mathcal{A}_h^*$ tale che $A' \supseteq \Pi$. Per il Teorema 4.1.1, e) e a), si ha

$$\mathrm{m}(A') + \mathrm{m}(A \setminus \Pi) \;\geq\; \mathrm{m}(A' \cup (A \setminus \Pi)) \;\geq\; \mathrm{m}(A)\ ,$$

quindi

$$\mathrm{m}(A') \;\geq\; \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(A \setminus \Pi)\ ,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $A' \in \mathcal{A}_h^*$ tale che $A' \supseteq \Pi$ e la Definizione 4.2.1, si ricava

$$\mathrm{m}(\Pi) \;\geq\; \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(A \setminus \Pi)\ ,$$

cioè

$$\mathrm{m}(A \setminus \Pi) \;\geq\; \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(\Pi)\ .$$

Ciò completa la dimostrazione della proprietà d).

e) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissiamo, come è possibile per la definizione di $\mathrm{m}(C)$, un insieme $A'_n \in \mathcal{A}_h^*$ tale che

$$A'_n \supseteq C \quad , \quad \mathrm{m}(A'_n) \;<\; \mathrm{m}(C) + \frac{1}{n}$$

e consideriamo l'insieme

$$A_n \;=\; A \cap A'_n \cap \left\{x \in \mathbb{R}^h\ :\ d(x, C) < \frac{1}{n}\right\}\ ;$$

tale insieme è aperto (si tenga presente il Corollario 3.3.2) e limitato (è contenuto in A); si ha inoltre

$$C \ \subseteq \ A_n \ \subseteq \ A'_n \ ,$$

quindi

$$\mathrm{m}(C) \leq \mathrm{m}(A_n) \leq \mathrm{m}(A'_n) < \mathrm{m}(C) + \frac{1}{n} \ ;$$

passando al limite per $n \to \infty$ nella precedente catena di disuguaglianze si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(A_n) = \mathrm{m}(C) \ .$$

Si ha inoltre

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = C \ ;$$

infatti è, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$C \ \subseteq \ A_n \ \subseteq \ \left\{ x \in \mathbb{R}^h \ : \ d(x, C) < \frac{1}{n} \right\}$$

e quindi, essendo C chiuso,

$$C \ \subseteq \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ \subseteq \ \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R}^h \ : \ d(x, C) < \frac{1}{n} \right\} \ = \left\{ x \in \mathbb{R}^h \ : \ d(x, C) = 0 \right\} \ = \ C \ .$$

Fissato poi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un plurintervallo Π'_n tale che

$$C \ \subseteq \ \Pi'_n \ \subseteq \ A_n$$

(ciò che è possibile per il Lemma 3.4.1) è facile verificare che si ha ancora

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(\Pi'_n) = \mathrm{m}(C)$$

e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi'_n = C \ .$$

Infine poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\Pi_n \ = \ \Pi'_1 \cap \ldots \cap \Pi'_n \ .$$

Poiché

$$C \ \subseteq \ \Pi_n \ \subseteq \ \Pi'_n \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

per la successione $\{\Pi_n\}$ si ha ancora

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(\Pi_n) = \mathrm{m}(C)$$

e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi_n = C \ .$$

Inoltre, la successione $\{\Pi_n\}$ è non decrescente, per cui possiamo affermare che

$$\Pi_n \downarrow C \ .$$

Ne segue facilmente che

$$A \setminus \Pi_n \uparrow A \setminus C \ ,$$

da cui, per il Teorema 4.1.1, b),

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(A \setminus \Pi_n) \ = \ \mathrm{m}(A \setminus C) \ .$$

Per la proprietà d) si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{m}(A \setminus \Pi_n) \ = \ \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(\Pi_n) \ .$$

Passando al limite per $n \to \infty$ nella precedente uguaglianza si ottiene la tesi.

f) Sia $A \in \mathcal{A}_h^*$ tale che $A \supseteq C_1 \cup C_2$. Per il Teorema 4.1.1, d), si ha

$$\mathrm{m}(A \setminus C_1) + \mathrm{m}(A \setminus C_2) \ = \ \mathrm{m}((A \setminus C_1) \cup (A \setminus C_2)) + \mathrm{m}((A \setminus C_1) \cap (A \setminus C_2)) =$$

$$\mathrm{m}((A \setminus (C_1 \cap C_2)) + \mathrm{m}((A \setminus (C_1 \cup C_2)) \ ,$$

vale a dire, per la proprietà e),

$$2\mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(C_1) - \mathrm{m}(C_2) \ = \ 2\mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(C_1 \cup C_2) - \mathrm{m}(C_1 \cap C_2) \ ,$$

da cui l'asserto.

g) e h) seguono immediatamente da f).

Osservazione 4.2.2. Ragionando per induzione si ha che le proprietà g) e h) continuano a sussistere nel caso di un qualunque numero finito di insiemi chiusi e limitati. Valgono quindi le seguenti proprietà.

g′) *Siano* $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{C}_h^*$. *Allora*

$$\mathrm{m}(C_1 \cup \ldots \cup C_k) \ \leq \ \mathrm{m}(C_1) + \ldots + \mathrm{m}(C_k) \ .$$

h′) *Siano* $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{C}_h^*$ *insiemi a due a due disgiunti. Allora*

$$\mathrm{m}(C_1 \cup \ldots \cup C_k) \ = \ \mathrm{m}(C_1) + \ldots + \mathrm{m}(C_k) \ .$$

Dal precedente teorema, proprietà b), segue immediatamente la

Proposizione 4.2.1. *Sia $C \in \mathcal{C}_h^*$. Se C è misurabile secondo Peano-Jordan, allora*

$$\text{mis}(C) = \text{m}(C) \ .$$

Esempio 4.2.1. (*Un insieme chiuso e limitato non misurabile secondo Peano-Jordan*). Sia A un insieme aperto limitato non misurabile secondo Peano-Jordan (Esempio 4.1.1) e sia D un insieme chiuso e limitato, misurabile secondo Peano-Jordan (ad es. $D \in \mathcal{P}_h$), tale che $D \supseteq A$. L'insieme $D \setminus A$ è chiuso e limitato e non è misurabile secondo Peano-Jordan perchè altrimenti, essendo $A = D \setminus C$, per il Teorema 2.3.1 anche l'insieme A risulterebbe misurabile secondo Peano-Jordan.

4.3. La misura secondo Lebesgue degli insiemi limitati.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato. È ovvio che esistono sia insiemi chiusi [e limitati] C contenuti in E che insiemi aperti e limitati A contenenti E. Inoltre, gli insiemi numerici ottenuti considerando le misure secondo Lebesgue degli insiemi suddetti, cioè gli insiemi numerici

$$\{\text{m}(C) \,:\, C \in \mathcal{C}_h^* , C \subseteq E\} \quad , \quad \{\text{m}(A) \,:\, A \in \mathcal{A}_h^* , A \supseteq E\} \ , \tag{4.3.1}$$

sono separati; ciò segue subito dalla definizione di misura di un insieme chiuso e limitato.

Definizione 4.3.1. (*Misurabilità e misura secondo Lebesgue di un insieme limitato*). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato. Si dice che l'insieme E è misurabile secondo Lebesgue se gli insiemi numerici (4.3.1), oltre che separati, sono anche contigui; in questo caso si chiama misura secondo Lebesgue di E il numero reale non negativo

$$\text{m}(E) \overset{\text{def.}}{=} \sup\{\text{m}(C) \,:\, C \in \mathcal{C}_h^* , C \subseteq E\} \ = \ \inf\{\text{m}(A) \,:\, A \in \mathcal{A}_h^* , A \supseteq E\} \ .$$

Osservazione 4.3.1. (*Coerenza*). Osserviamo che, per il Teorema 4.1.1, a) ed il Teorema 4.2.1, c), se l'insieme E appartiene a $\mathcal{A}_h^*$, allora E è misurabile secondo Lebesgue anche nel senso della Definizione 4.3.1 e la misura secondo Lebesgue di E nel senso della Definizione 4.3.1 coincide con la misura secondo Lebesgue di E così come definita in precedenza (Definizione 4.1.2). Pertanto la Definizione 4.3.1 è coerente con la Definizione 4.1.2. Analogamente, per il Teorema 4.2.1, a) e la Definizione 4.2.1, si ha che, se l'insieme E appartiene a $\mathcal{C}_h^*$, allora E è misurabile secondo Lebesgue anche nel senso della Definizione 4.3.1 e la misura secondo Lebesgue di E nel senso della Definizione 4.3.1 coincide con la misura secondo Lebesgue di E definita in precedenza (Definizione 4.2.1). Pertanto la Definizione 4.3.1 è coerente anche con la Definizione 4.2.1.

La proposizione successiva è insita nella Definizione 4.3.1. È utile però enunciarla esplicitamente in quanto sarà utilizzata di frequente.

Proposizione 4.3.1. *Un insieme limitato $E \subseteq \mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Lebesgue se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un insieme $A \in \mathcal{A}_h^*$ ed un insieme $C \in \mathcal{C}_h^*$ tali che*

$$C \subseteq E \subseteq A \quad , \quad \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(C) < \varepsilon .$$

Confrontiamo la nozione di misurabilità secondo Lebesgue con quella secondo Peano-Jordan.

Proposizione 4.3.2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato. Allora*

$$\begin{aligned} &\sup\{\mathrm{m}(\Pi) : \Pi \in \mathcal{P}_h , \Pi \subseteq E\} \leq \sup\{\mathrm{m}(C) : C \in \mathcal{C}_h^* , C \subseteq E\} \leq \\ \leq\ &\inf\{\mathrm{m}(A) : A \in \mathcal{A}_h^* , A \supseteq E\} \leq \inf\{\mathrm{m}(\Pi') : \Pi' \in \mathcal{P}_h , \Pi' \supseteq E\} . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Le prime due disuguaglianze sono ovvie. Dimostriamo l'ultima. Fissati un qualunque $\Pi' \in \mathcal{P}_h$ tale che $\Pi' \supseteq E$ ed un qualunque numero $\varepsilon > 0$, per la Proposizione 4.1.3 esiste $B \in \mathcal{A}_h^*$, $B \supseteq \Pi'$, tale che $\mathrm{m}(B) < \mathrm{m}(\Pi') + \varepsilon$. Ne segue che

$$\inf\{\mathrm{m}(A) : A \in \mathcal{A}_h^* , A \supseteq E\} \leq \mathrm{m}(B) < \mathrm{m}(\Pi') + \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$\inf\{\mathrm{m}(A) : A \in \mathcal{A}_h^* , A \supseteq E\} \leq \mathrm{m}(\Pi') .$$

Poichè Π' è un qualsiasi plurintervallo contenente E si ha l'asserto.

Dalla Proposizione 4.3.2 discende immediatamente il

Teorema 4.3.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato. Se E è misurabile secondo Peano-Jordan, allora E è misurabile secondo Lebesgue e*

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{mis}(E) .$$

Sono già noti esempi di insiemi limitati misurabili secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan (Esempi 4.1.1 e 4.2.1). Un altro esempio è il seguente.

Esempio 4.3.1. (*Un insieme limitato $E \subseteq \mathbb{R}^h$, né aperto né chiuso, misurabile secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan*). Sia $B \in \mathcal{A}_h^*$, $B \neq \emptyset$ e sia $M = B \cap \mathbb{Q}^h$. Poiché $\mathbb{R}^h \setminus \mathbb{Q}^h$ è denso in $\mathbb{R}^h$, si ha $\mathring{M} = \emptyset$, quindi $\mathring{M} \neq M$, e pertanto M non è aperto; inoltre, dato che $\mathbb{Q}^h$ è denso in $\mathbb{R}^h$, è facile verificare che $\overline{M} = \overline{B}$, quindi $\overline{M} \neq M$ (l'insieme $\overline{M} = \overline{B}$ ha punti interni, mentre $\mathring{B} \neq \emptyset$), e pertanto M non è neanche chiuso.

Poiché $\overset{\circ}{M} = \emptyset$, si ha

$$\sup\{\mathrm{m}(\Pi) \,:\, \Pi \in \mathcal{P}_h \,,\, \Pi \subseteq M\} \;=\; 0 \;.$$

D'altra parte, dato che per ogni plurintervallo Π' sussiste l'equivalenza

$$\Pi' \supseteq M \iff \Pi' \supseteq \overline{B} \;,$$

si ha, tenuto conto del Teorema 4.2.1, b),

$$\inf\{\mathrm{m}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h \,,\, \Pi' \supseteq M\} \;=\; \inf\{\mathrm{m}(\Pi') \,:\, \Pi' \in \mathcal{P}_h \,,\, \Pi' \supseteq \overline{M}\} \;=\; \mathrm{m}(\overline{M}) \;;$$

inoltre, dato che $\overline{M}$ contiene intervalli chiusi non degeneri, per il Teorema 4.2.1, a) siamo sicuri che $\mathrm{m}(\overline{M}) > 0$. Conseguentemente M non è misurabile secondo Peano-Jordan.

Invece, grazie all'Esempio 4.1.1, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{A}_h^*$, $A \supseteq M$, tale che $\mathrm{m}(A) < \varepsilon$. Ne segue che

$$\inf\{\mathrm{m}(A) \,:\, A \in \mathcal{A}_h^* \,,\, A \supseteq M\} \;=\; 0$$

e pertanto M è misurabile secondo Lebesgue e $\mathrm{m}(M) = 0$.

Passiamo adesso ad occuparci delle proprietà della misura secondo Lebesgue degli insiemi limitati.

Denotiamo con $\mathcal{L}_h^*$ la famiglia degli insiemi limitati $E \subseteq \mathbb{R}^h$ che sono misurabili secondo Lebesgue.

Proposizione 4.3.3. (Monotonia). *Siano $E_1, E_2 \in \mathcal{L}_h^*$ tali che $E_1 \subseteq E_2$. Allora*

$$\mathrm{m}(E_1) \;\leq\; \mathrm{m}(E_2) \;.$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che l'insieme numerico $\{\mathrm{m}(C) \,:\, C \in \mathcal{C}_h^* \,,\, C \subseteq E_1\}$ è contenuto in $\{\mathrm{m}(C) \,:\, C \in \mathcal{C}_h^* \,,\, C \subseteq E_2\}$.

Teorema 4.3.2. (Misurabilità di $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ e proprietà di finita additività della misura di Lebesgue). *Siano $E_1, E_2 \in \mathcal{L}_h^*$. Allora anche gli insiemi*

$$E_1 \;\cup\; E_2 \quad , \quad E_1 \;\cap\; E_2$$

appartengono a $\mathcal{L}_h^*$.

Inoltre, se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, risulta

$$\mathrm{m}(E_1 \cup E_2) \;=\; \mathrm{m}(E_1) \;+\; \mathrm{m}(E_2)$$

(proprietà di finita additività).

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_h^*$ e $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h^*$ tali che

$$C_i \subseteq E_i \subseteq A_i \quad , \quad \mathrm{m}(A_i) - \mathrm{m}(C_i) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \;, \qquad i = 1, 2 \;.$$

È facile verificare che valgono le seguenti inclusioni insiemistiche:

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (C_1 \cup C_2) \;\subseteq\; (A_1 \setminus C_1) \cup (A_2 \setminus C_2) \;, \tag{4.3.2}$$

$$(A_1 \cap A_2) \setminus (C_1 \cap C_2) \;\subseteq\; (A_1 \setminus C_1) \cup (A_2 \setminus C_2) \;. \tag{4.3.3}$$

Si ha inoltre, per la misura dell'insieme che figura al secondo membro, la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} &\mathrm{m}\Big((A_1 \setminus C_1) \cup (A_2 \setminus C_2)\Big) \;\le && \text{(Teorema 4.1.1, e))} \\ &\le\; \mathrm{m}(A_1 \setminus C_1) + \mathrm{m}(A_2 \setminus C_2) \;= && \text{(Teorema 4.2.1, e))} \\ &=\; \mathrm{m}(A_1) - \mathrm{m}(C_1) + \mathrm{m}(A_2) - \mathrm{m}(C_2) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \;. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Posto $C = C_1 \cup C_2$, $A = A_1 \cup A_2$, si ha, ovviamente,

$$C \in \mathcal{C}_h^* \quad , \quad A \in \mathcal{A}_h^* \quad , \quad C \subseteq E_1 \cup E_2 \subseteq A \;;$$

inoltre

$$\begin{aligned} &\mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(C) \;= && \text{(Teorema 4.2.1, e))} \\ &=\; \mathrm{m}(A \setminus C) \;\le && \text{((4.3.2) e Teorema 4.1.1, a))} \\ &\le \mathrm{m}\Big((A_1 \setminus C_1) \cup (A_2 \setminus C_2)\Big) \end{aligned}$$

e quindi, per la (4.3.4),

$$\mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(C) \;<\; \varepsilon \;.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ se ne conclude che $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}_h^*$.

Analogamente, posto $C' = C_1 \cap C_2$, $A' = A_1 \cap A_2$, si ha

$$C' \in \mathcal{C}_h^* \quad , \quad A' \in \mathcal{A}_h^* \quad , \quad C' \subseteq E_1 \cap E_2 \subseteq A' \;;$$

inoltre

$$\begin{aligned} &\mathrm{m}(A') - \mathrm{m}(C') \;= && \text{(Teorema 4.2.1, e))} \\ &=\; \mathrm{m}(A' \setminus C') \;\le && \text{((4.3.3) e Teorema 4.1.1, a))} \\ &\le \mathrm{m}\Big((A_1 \setminus C_1) \cup (A_2 \setminus C_2)\Big) \end{aligned}$$

e quindi, per la (4.3.4),

$$\mathrm{m}(A') - \mathrm{m}(C') \ < \ \varepsilon \ .$$

Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si ha $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{L}_h^*$.

Supponiamo adesso che $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Per la definizione di $\mathrm{m}(E_i)$, $i = 1, 2$, si ha

$$\mathrm{m}(C_i) \leq \mathrm{m}(E_i) \leq \mathrm{m}(A_i) \ , \qquad\qquad i = 1, 2 \ ,$$

quindi

$$\mathrm{m}(C_1) + \mathrm{m}(C_2) \leq \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2) \leq \mathrm{m}(A_1) + \mathrm{m}(A_2) \ ; \tag{4.3.5}$$

d'altra parte, per la definizione di $\mathrm{m}(E_1 \cup E_2)$, si ha pure

$$\begin{aligned} &\mathrm{m}(C_1) + \mathrm{m}(C_2) = && \text{(Teorema 4.2.1, h))} \\ &= \mathrm{m}(C_1 \cup C_2) \leq \mathrm{m}(E_1 \cup E_2) \leq \mathrm{m}(A_1 \cup A_2) \leq && \text{(Teorema 4.1.1, e))} \\ &\leq \mathrm{m}(A_1) + \mathrm{m}(A_2) \ ; \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

da (4.3.5), (4.3.6) e dalle disuguaglianze $\mathrm{m}(A_i) - \mathrm{m}(C_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, 2$, segue

$$\Big| \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2) - \mathrm{m}(E_1 \cup E_2) \Big| \ \leq$$

$$\leq \ \mathrm{m}(A_1) + \mathrm{m}(A_2) - \mathrm{m}(C_1) - \mathrm{m}(C_2) \ < \ \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{m}(E_1 \cup E_2) \ = \ \mathrm{m}(E_1) \ + \ \mathrm{m}(E_2) \ .$$

Osservazione 4.3.2. Ragionando per induzione si ottiene che le proprietà espresse dal precedente Teorema 4.3.2 continuano a valere per un qualunque numero finito di insiemi limitati e misurabili. Vale quindi il seguente teorema.

Teorema 4.3.2$'$. *Siano $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{L}_h^*$. Allora anche gli insiemi*

$$E_1 \cup \ldots \cup E_k \quad , \quad E_1 \cap \ldots \cap E_k$$

appartengono a $\mathcal{L}_h^*$. Inoltre, se gli insiemi $E_1, \ldots, E_k$ sono a due a due disgiunti, risulta

$$\mathrm{m}(E_1 \cup \ldots \cup E_k) \ = \ \mathrm{m}(E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_k) \ .$$

Lemma 4.3.1. *Siano $E_1, E_2 \in \mathcal{L}_h^*$ tali che $E_2 \subseteq E_1$ e inoltre $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{L}_h^*$. Allora*

$$\mathrm{m}(E_1 \setminus E_2) \ = \ \mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E_2) \ .$$

Dimostrazione. Poichè $E_1 = E_2 \cup (E_1 \setminus E_2)$ e $E_2 \cap (E_1 \setminus E_2) = \emptyset$, per il Teorema 4.3.2 si ha

$$\mathrm{m}(E_1) = \mathrm{m}(E_2) + \mathrm{m}(E_1 \setminus E_2) \ ;$$

ne segue la tesi.

Lemma 4.3.2. *Siano $E \in \mathcal{L}_h^*$, $I \in \mathcal{I}_h$ tali che $E \subseteq \mathring{I}$. Allora $I \setminus E \in \mathcal{L}_h^*$.*

Dimostrazione. Fissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, facciamo vedere che esistono $C^* \in \mathcal{C}_h^*$, $A^* \in \mathcal{A}_h^*$ tali che

$$C^* \ \subseteq \ I \setminus E \ \subseteq \ A^* \quad , \quad \mathrm{m}(A^*) - \mathrm{m}(C^*) \ < \ \varepsilon \ .$$

Per la misurabilità di E esistono $C \in \mathcal{C}_h^*$, $A' \in \mathcal{A}_h^*$ tali che

$$C \ \subseteq \ E \ \subseteq \ A' \quad , \quad \mathrm{m}(A') - \mathrm{m}(C) \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \ ;$$

posto $A = A' \cap \mathring{I}$, si ha ancora $A \in \mathcal{A}_h^*$, $E \subseteq A$ e inoltre, per il Teorema 4.1.1, a),

$$\mathrm{m}(A) \ - \ \mathrm{m}(C) \ \leq \ \mathrm{m}(A') \ - \ \mathrm{m}(C) \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Osserviamo che da $C \subseteq E \subseteq A$ segue

$$I \setminus A \ \subseteq \ I \setminus E \ \subseteq I \setminus C \ .$$

L'insieme $C^* = I \setminus A$ è chiuso e limitato e, per il Lemma 4.3.1, si ha

$$\mathrm{m}(C^*) \ = \ \mathrm{m}(I) - \mathrm{m}(A) \ .$$

L'insieme $I \setminus C$ è misurabile secondo Lebesgue; infatti, dato che $C \subseteq E \subseteq \mathring{I}$, si ha

$$I \setminus C \ = \ (\partial I) \cup (\mathring{I} \setminus C)$$

e quindi, dato che

$$\partial I \in \mathcal{C}_h^* \ \subseteq \ \mathcal{L}_h^* \quad , \quad \mathring{I} \setminus C \in \mathcal{A}_h^* \ \subseteq \ \mathcal{L}_h^* \ ,$$

per il Teorema 4.3.2 si ha $I \setminus C \in \mathcal{L}_h^*$. Inoltre, per il Lemma 4.3.1, si ha pure

$$\mathrm{m}(I \setminus C) \ = \ \mathrm{m}(I) \ - \ \mathrm{m}(C)$$

e, per la definizione di $\mathrm{m}(I \setminus C)$, esiste $A^* \in \mathcal{A}_h^*$, $A^* \supseteq I \setminus C$, tale che

$$\mathrm{m}(A^*) < \mathrm{m}(I) - \mathrm{m}(C) + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

In definitiva abbiamo trovato due insiemi $C^* \in \mathcal{C}_h^*$, $A^* \in \mathcal{A}_h^*$ tali che

$$C^* \subseteq I \setminus C \subseteq A^*$$

e inoltre

$$\mathrm{m}(A^*) - \mathrm{m}(C^*) \ < \ \mathrm{m}(I) - \mathrm{m}(C) + \frac{\varepsilon}{2} - \mathrm{m}(I) + \mathrm{m}(A) \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon \ .$$

Teorema 4.3.3. (Misurabilità di $E_1 \setminus E_2$). *Siano* $E_1, E_2 \in \mathcal{L}_h^*$. *Allora* $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{L}_h^*$.

Dimostrazione. Sia $I \in \mathcal{I}_h$ tale che $\mathring{I} \supseteq E_1$. Si ha

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \setminus (E_1 \cap E_2) = E_1 \cap (I \setminus (E_1 \cap E_2)) \ .$$

Per il Teorema 4.3.2 si ha $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{L}_h^*$, quindi, per il Lemma 4.3.2, $I \setminus (E_1 \cap E_2) \in \mathcal{L}_h^*$; pertanto, ancora per il Teorema 4.3.2, $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{L}_h^*$.

Dal Teorema 4.3.3 e dal Lemma 4.3.1 segue ovviamente il

Corollario 4.3.1. (Proprietà di sottrattività della misura di Lebesgue). *Siano* $E_1, E_2 \in \mathcal{L}_h^*$ *tali che* $E_2 \subseteq E_1$. *Allora*

$$\mathrm{m}(E_1 \setminus E_2) \ = \ \mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E_2) \ .$$

Teorema 4.3.4. (Proprietà di σ-additività della misura di Lebesgue). *Sia* $\{E_n\}$ *una successione di insiemi appartenenti a* $\mathcal{L}_h^*$, *a due a due disgiunti. Supponiamo che l'insieme* $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ *sia limitato. Allora* $E \in \mathcal{L}_h^*$ *e inoltre*

$$\mathrm{m}(E) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \ . \tag{4.3.7}$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poiché $E_n \in \mathcal{L}_h^*$, esistono $A'_n \in \mathcal{A}_h^*$, $C_n \in \mathcal{C}_h^*$ tali che

$$C_n \subseteq E_n \subseteq A'_n \quad , \quad \mathrm{m}(A'_n) - \mathrm{m}(C_n) \ < \ \varepsilon 2^{-n} \ .$$

Fissiamo un insieme $B \in \mathcal{A}_h^*$ in modo che $E \subseteq B$ e poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A'_n \cap B$; si ha ancora $A_n \in \mathcal{A}_h^*$, $E_n \subseteq A_n$; inoltre (Teorema 4.1.1, a))

$$\mathrm{m}(A_n) - \mathrm{m}(C_n) \ \leq \ \mathrm{m}(A'_n) - \mathrm{m}(C_n) \ < \ \varepsilon 2^{-n} \ .$$

Poiché gli insiemi $C_1, C_2, \ldots$ sono a due a due disgiunti, l'Osservazione 4.2.2, h′) e la Definizione 4.2.1 implicano che, per ogni $h \in \mathbb{N}$, risulta

$$\sum_{n=1}^{h} \mathrm{m}(C_n) \ = \ \mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{h} C_n\Big) \ \leq \ \mathrm{m}(B) \ ,$$

quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(C_n)$ è convergente (in $\mathbb{R}$); la stessa cosa può allora dirsi della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n)$ che è maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{m}(C_n) + \varepsilon 2^{-n}]$, somma di due serie convergenti (in $\mathbb{R}$), e quindi anche della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)$ che è maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n)$. Per quanto precedentemente osservato e dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(C_n)$ è maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)$, si ha che valgono le disuguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(C_n) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) \ , \tag{4.3.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) \ < \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(C_n) + \varepsilon \ .$$

Dall'ultima disuguaglianza segue ancora che, se $\nu \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) \ < \ \sum_{n=1}^{\nu} \mathrm{m}(C_n) + \varepsilon \quad . \tag{4.3.9}$$

Poniamo

$$A \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad , \quad C = \bigcup_{n=1}^{\nu} C_n \quad .$$

Poichè $A \subseteq B$, l'insieme A oltre che aperto è anche limitato, cioè $A \in \mathcal{A}_h^*$; inoltre, ovviamente, $C \in \mathcal{C}_h^*$ e $C \subseteq E \subseteq A$. Si ha ancora, per il Teorema 4.1.1, g), l'Osservazione 4.2.2, h$'$) e la (4.3.9)

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(C) \ &\leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) - \mathrm{m}(C) \ = \\ &= \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) - \sum_{n=1}^{\nu} \mathrm{m}(C_n) \ < \ \varepsilon \ , \end{aligned}$$

ciò che, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, prova la misurabilità di E.

Dimostriamo infine che vale la (4.3.7).

Per la definizione di $\mathrm{m}(E)$ si ha

$$\mathrm{m}(C) \ \leq \ \mathrm{m}(E) \ \leq \ \mathrm{m}(A) \ ,$$

quindi (Teorema 4.1.1, g) e Osservazione 4.2.2, h$'$))

$$\sum_{n=1}^{\nu} \mathrm{m}(C_n) \ \leq \ \mathrm{m}(E) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) \quad ;$$

d'altra parte, ricordando la (4.3.8), si ha pure

$$\sum_{n=1}^{\nu} \mathrm{m}(C_n) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) \quad ;$$

ne segue

$$\left| \mathrm{m}(E) \;-\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \right| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_n) \;-\; \sum_{n=1}^{\nu} \mathrm{m}(C_n) \ ,$$

quindi, per la (4.3.9),

$$\left| \mathrm{m}(E) \;-\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \right| < \varepsilon \ ,$$

ciò che, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, completa la dimostrazione.

Teorema 4.3.5. (Misurabilità dell'unione numerabile). *Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{L}_h^*$. Supponiamo che l'insieme $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ sia limitato. Allora $E \in \mathcal{L}_h^*$.*

Dimostrazione. Poniamo $F_1 = E_1$ e, per ogni $n \geq 2$, $F_n = E_n \setminus (E_1 \cup \ldots E_{n-1})$. È facile verificare che gli insiemi della successione $\{F_n\}$ sono a due a due disgiunti e che $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Inoltre, per i Teoremi 4.3.2′ e 4.3.3, si ha $F_n \in \mathcal{L}_h^*$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Conseguentemente, per il Teorema 4.3.4, $E \in \mathcal{L}_h^*$.

4.4. La misurabilità e la misura secondo Lebesgue in generale.

Per estendere le nozioni di misurabilità e di misura secondo Lebesgue dal caso degli insiemi limitati al caso generale adottiamo il procedimento già seguito per la misura secondo Peano-Jordan: per decidere sulla misurabilità [e sulla misura] di un insieme E si prendono in esame tutte le possibili intersezioni $E \cap I$ dell'insieme E con gli intervalli chiusi $I \in \mathcal{I}_h$, intersezioni che, essendo insiemi limitati, rientrano nell'ambito della teoria precedentemente svolta.

Premettiamo alla definizione relativa al caso generale (Definizione 4.4.1) un facile lemma, dal quale discenderà la coerenza tra tale definizione e quella data in precedenza a proposito degli insiemi limitati (Definizione 4.3.1).

Lemma 4.4.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato. Allora*

$$E \in \mathcal{L}_h^* \quad \Longleftrightarrow \quad E \cap I \in \mathcal{L}_h^* \quad \forall I \in \mathcal{I}_h \ .$$

Inoltre, nel caso in cui $E \in \mathcal{L}_h^*$, risulta

$$\mathrm{m}(E) \;=\; \sup\{\mathrm{m}(E \cap I) \,:\, I \in \mathcal{I}_h\} \ . \tag{4.4.1}$$

Dimostrazione. Infatti, se $E \in \mathcal{L}_h^*$, allora, per il Teorema 4.3.2, si ha $E \cap I \in \mathcal{L}_h^*$ per ogni $I \in \mathcal{I}_h$. Viceversa, se è vero che $E \cap I \in \mathcal{L}_h^*$ per ogni $I \in \mathcal{I}_h$, allora, scegliendo $J \in \mathcal{I}_h$ tale che $E \subseteq J$, si ottiene subito, essendo $E = E \cap J$, che l'insieme E appartiene a $\mathcal{L}_h^*$.

Inoltre, se $E \in \mathcal{L}_h^*$, allora è facile convincersi, grazie alla Proposizione 4.3.3, che l'insieme numerico $\{\mathrm{m}(E \cap I) \,:\, I \in \mathcal{I}_h\}$ ha come estremo superiore, anzi come massimo, il numero $\mathrm{m}(E)$.

Definizione 4.4.1. (*La misurabilità e la misura secondo Lebesgue in generale*). Sia E un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^h$ (limitato o no). Si dice che l'insieme E è misurabile secondo Lebesgue se per ogni intervallo chiuso $I \in \mathcal{I}_h$ l'insieme limitato $E \cap I$ risulta misurabile secondo Lebesgue nel senso della Definizione 4.3.1; in questo caso si chiama misura secondo Lebesgue di E l'estremo superiore (in $\overline{\mathbb{R}}$) dell'insieme formato dalle misure – nel senso della Definizione 4.3.1 – delle intersezioni $E \cap I$, $I \in \mathcal{I}_h$.

Osservazione 4.4.1. (*Coerenza*). Dal Lemma 4.4.1 segue immediatamente che, se $E \subseteq \mathbb{R}^h$ è un insieme limitato, allora E è misurabile secondo la Definizione 4.4.1 se e solo se lo è secondo la Definizione 4.3.1; inoltre, nel caso in cui E risulti misurabile, la misura di E secondo la Definizione 4.4.1 e quella secondo la Definizione 4.3.1 coincidono.

La Definizione 4.4.1 è dunque coerente con la precedente Definizione 4.3.1 relativa agli insiemi limitati. D'ora in poi possiamo quindi omettere, senza rischio di ambiguità, ogni ulteriore precisazione quando parliamo di misurabilità e di misura secondo Lebesgue di un insieme limitato $E \subseteq \mathbb{R}^h$ ed adoperiamo il simbolo $\mathrm{m}(E)$ per designare tale misura.

Osserviamo inoltre che la (4.4.1) vale adesso, per definizione, per un qualunque insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^h$, limitato o no.

Notazione. Denotiamo con $\mathcal{L}_h$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ che sono misurabili secondo Lebesgue.

Confrontando le Definizioni 4.4.1 e 2.4.1 e tenendo presente il Teorema 4.3.1 si ha subito il

Teorema 4.4.1. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^h$. Se E è misurabile secondo Peano-Jordan, allora E è misurabile anche secondo Lebesgue e risulta*

$$\mathrm{m}(E) \;=\; \mathrm{mis}(E)\ .$$

Un'altra immediata conseguenza della Definizione 4.4.1 è la

Proposizione 4.4.1. *Ogni sottoinsieme chiuso C di $\mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Infatti, se $C \subseteq \mathbb{R}^h$ è chiuso, tutte le intersezioni $C \cap I$, $I \in \mathcal{I}_h$, appartengono a $\mathcal{C}_h^*$ e quindi sono insiemi misurabili.

Occupiamoci adesso delle proprietà della famiglia $\mathcal{L}_h$.

Teorema 4.4.2. (Proprietà della famiglia $\mathcal{L}_h$). *La famiglia $\mathcal{L}_h$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue ha le seguenti proprietà.*

a) *Se $E \in \mathcal{L}_h$ allora $\mathbb{R}^h \setminus E \in \mathcal{L}_h$.*

b) *Se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{L}_h$, allora anche l'unione $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ apartiene a $\mathcal{L}_h$.*

Dimostrazione. a) Se $E \in \mathcal{L}_h$ allora $E \cap I \in \mathcal{L}_h^*$ per ogni $I \in \mathcal{I}_h$; ne segue (Teorema 4.3.3) che l'insieme $(\mathbb{R}^h \setminus E) \cap I = I \setminus (E \cap I)$ appartiene a $\mathcal{L}_h^*$ per ogni $I \in \mathcal{I}_h$, cioè $\mathbb{R}^h \setminus E \in \mathcal{L}_h$.

b) Per ogni $I \in \mathcal{I}_h$ si ha

$$E_n \cap I \in \mathcal{L}_h^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e pertanto (Teorema 4.3.5)

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \cap I \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap I) \;\in\; \mathcal{L}_h^* \;,$$

dunque

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;\in\; \mathcal{L}_h \;.$$

Come vedremo nel capitolo successivo, le proprietà a) e b) del precedente teorema, unitamente alla ovvia circostanza che $\mathbb{R}^h \in \mathcal{L}_h$, si esprimono, nel linguaggio della teoria astratta della misura, con una sola locuzione dicendo che "la famiglia $\mathcal{L}_h$ è una σ-*algebra* in $\mathbb{R}_h$".

In quel capitolo proveremo inoltre (Proposizione 5.1.1) che ogni σ-algebra (in particolare ciò è vero per la famiglia $\mathcal{L}_h$) è chiusa rispetto ad altre operazioni insiemistiche (ad es. l'unione e l'intersezione finita, l'intersezione numerabile e la differenza di due insiemi) oltre a quelle indicate dal precedente teorema, cioè l'unione numerabile e la complementazione rispetto all'insieme "ambiente" (in questo caso $\mathbb{R}^h$), operazioni rispetto alle quali una σ-algebra è chiusa per definizione.

Dal Teorema 4.4.2, a) e dalla Proposizione 4.4.1 discende ovviamente la

Proposizione 4.4.2. *Ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Lebesgue.*

Esempio 4.4.1. (*Un insieme non limitato misurabile secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan*). Per il Teorema 4.4.2, b) l'insieme $\mathbb{Q}^h$, che può scriversi come unione numerabile di intervalli degeneri:

$$\mathbb{Q}^h \;=\; \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^h} \Big\{q\Big\} \;,$$

è misurabile secondo Lebesgue. Sappiamo d'altra parte (Esempio 2.4.1, b)) che $\mathbb{Q}^h$ non è misurabile secondo Peano-Jordan.

Dimostriamo adesso il

Teorema 4.4.3. (σ-additività della misura secondo Lebesgue). *Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili secondo Lebesgue, a due a due disgiunti. Allora*

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\ . \tag{4.4.2}$$

Dimostrazione. Notiamo preliminarmente che la (4.4.2) è un'uguaglianza tra elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ e che la serie al secondo membro è convergente (in $\overline{\mathbb{R}}$) essendo a termini non negativi.

Osserviamo come prima cosa che, grazie al Teorema 4.3.4, per ogni $I \in \mathcal{I}_h$ risulta

$$\mathrm{m}\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)\cap I\Big) \;=\; \mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap I)\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{m}(E_n\cap I) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{m}(E_n)\ ,$$

dunque si ha, per la definizione di $\mathrm{m}(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)$,

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\ . \tag{4.4.3}$$

Dalla (4.4.3) segue, ovviamente, che la (4.4.2) è verificata se $\mathrm{m}(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) = +\infty$.

Supponiamo adesso che sia $\mathrm{m}(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) < +\infty$ e dimostriamo che, oltre alla (4.4.3), vale anche la disuguaglianza contraria. Osserviamo che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha pure $\mathrm{m}(E_k) < +\infty$; risulta infatti, per la Proposizione 4.3.3 e la definizione di $\mathrm{m}(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)$,

$$\mathrm{m}(E_k\cap I) \;\le\; \mathrm{m}\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)\cap I\Big) \;\le\; \mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \qquad \forall I\in\mathcal{I}_h\ ,$$

quindi

$$\mathrm{m}(E_k) \;\le\; \mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)\ .$$

Per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ ed ogni $\varepsilon > 0$, esistono $I_1,\dots,I_\nu \in \mathcal{I}_h$ tali che

$$\mathrm{m}(E_i\cap I_i) > \mathrm{m}(E_i) - \frac{\varepsilon}{\nu}\ , \qquad i = 1,\dots,\nu\ ;$$

pertanto, fissato un intervallo $I \in \mathcal{I}_h$ tale che $I \supseteq I_1 \cup \ldots \cup I_\nu$, per il Teorema 4.3.2$'$ e la Proposizione 4.3.2 si ha

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{m}(E_i) \; < \; \sum_{i=1}^{\nu} \Big[\mathrm{m}(E_i \cap I_i) + \frac{\varepsilon}{\nu}\Big] \; =$$

$$= \; \mathrm{m}\Big(\bigcup_{i=1}^{\nu}(E_i \cap I)\Big) + \varepsilon \; = \; \mathrm{m}\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{\nu} E_i\Big) \cap I\Big) + \varepsilon \; \leq$$

$$\leq \; \mathrm{m}\big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \cap I\big) + \varepsilon \; \leq \; \mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \varepsilon \; .$$

Per l'arbitrarietà di $\nu \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \; \leq \; \mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \; + \; \varepsilon \; ,$$

dunque, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, concludiamo che è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \; \leq \; \mathrm{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \; .$$

Ciò completa la dimostrazione.

Grazie al precedente teorema, nel successivo capitolo potremo affermare che "l'applicazione che ad ogni insieme $E \in \mathcal{L}_h$ fa corrispondere la sua misura secondo Lebesgue $\mathrm{m}_h(E)$ è una *misura su* $\mathcal{L}_h$", nel senso che tale affermazione ha nell'ambito della teoria astratta della misura. Conseguentemente, la misura di Lebesgue gode di tutte le proprietà di cui godono, in generale, tutte le misure "astratte" (e che sono quelle indicate dai Teoremi 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3).

4.5. Caratterizzazione della misurabilità secondo Peano-Jordan.

Il teorema seguente era già stato parzialmente anticipato nel n. 2.4 (Teorema 2.4.3).

Teorema 4.5.1. (Caratterizzazione della misurabilità secondo Peano-Jordan). *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^h$. Sono fatti equivalenti:*

1) *X è misurabile secondo Peano-Jordan;*

2) *∂X è misurabile secondo Peano-Jordan e* $\mathrm{mis}(\partial X) = 0$*;*

3) $\mathrm{m}(\partial X) = 0$ ([3]) .

([3]) Si tenga presente che ∂X è un insieme chiuso, quindi misurabile secondo Lebesgue.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che X sia limitato.

1) $\implies$ 3). Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono esistono Π_1, $\Pi_2 \in \mathcal{P}_h$ tali che:

$$\Pi_1 \subseteq X \subseteq \Pi_2 \quad , \quad \mathrm{mis}(\Pi_2) - \mathrm{mis}(\Pi_1) < \varepsilon \ .$$

Poiché

$$\overline{X} \subseteq \Pi_2 \quad , \quad \overset{\circ}{\Pi}_1 \subseteq \overset{\circ}{X} \ ,$$

si ha

$$\partial X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} \subseteq \Pi_2 \setminus \overset{\circ}{\Pi}_1 \ ,$$

quindi

$$\mathrm{m}(\partial X) \leq \mathrm{m}(\Pi_2 \setminus \overset{\circ}{\Pi}_1) = \mathrm{m}(\Pi_2) - \mathrm{m}(\Pi_1) < \varepsilon \ ,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si ottiene che $\mathrm{m}(\partial X) = 0$.

3) $\implies$ 2). Poiché ∂X è un insieme chiuso e limitato, si ha (Teorema 4.2.1, b))

$$0 = \mathrm{m}(\partial X) = \inf\{\mathrm{m}(\Pi') : \Pi' \in \mathcal{P}_h \, , \, \Pi' \supseteq \partial X\} \ .$$

Ne segue che è pure

$$\sup\{\mathrm{m}(\Pi) : \Pi \in \mathcal{P}_h \, , \, \Pi \subseteq \partial X\} = 0 \ ,$$

dunque è vera la 2).

2) $\implies$ 1). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\Pi' \in \mathcal{P}_h$ tale che

$$\Pi' \supseteq \partial X \quad , \quad \mathrm{m}(\Pi') < \varepsilon \ ,$$

quindi (Proposizione 2.2.5) esiste $T \in \mathcal{P}_h$ tale che

$$\overset{\circ}{T} \supseteq \partial X \quad , \quad \mathrm{m}(T) < \varepsilon \ .$$

L'insieme $\overline{X} \setminus \overset{\circ}{T}$ è un sottoinsieme chiuso di $\overset{\circ}{X}$ e, ovviamente, è anche limitato; quindi, per il Lemma 3.4.1, esiste $\Pi_1 \in \mathcal{P}_h$ tale che

$$\overline{X} \setminus \overset{\circ}{T} \subseteq \Pi_1 \subseteq \overset{\circ}{X} \ .$$

Posto $\Pi_2 = T \cup \Pi_1$, si ha

$$\Pi_2 \supseteq T \cup (\overline{X} \setminus T) \supseteq \overline{X} \supseteq X$$

e, per la finita sub-additività,

$$\mathrm{mis}(\Pi_2) - \mathrm{mis}(\Pi_1) \leq \mathrm{mis}(T) < \varepsilon \ ,$$

quindi X è misurabile secondo Peano-Jordan.

Supponiamo adesso che X non sia limitato.

1) $\implies$ 2). Per ogni $I \in \mathcal{I}_h$ si ha

$$(\partial X) \cap I \subseteq (\partial I) \cup (\partial(I \cap X)) . \tag{4.5.1}$$

Per quanto già dimostrato i due insiemi ∂I e $\partial(I \cap X)$ sono misurabili secondo Peano-Jordan ed hanno misura nulla; di conseguenza anche l'unione $(\partial I) \cup (\partial(I \cap X))$ è misurabile secondo Peano-Jordan. Si ha inoltre, utilizzando la proprietà di finita sub-additività della misura di Lebesgue,

$$\mathrm{mis}((\partial I) \cup (\partial(I \cap X))) = \mathrm{m}((\partial I) \cup (\partial(I \cap X))) = 0 .$$

Ne segue che anche il sottoinsieme $(\partial X) \cap I$ è misurabile secondo Peano-Jordan (cfr. l'Esercizio 4.5.1, b)); ovviamente, risulta

$$\mathrm{mis}((\partial X) \cap I) = 0 .$$

Per l'arbitrarietà di $I \in \mathcal{I}_h$ concludiamo che ∂X è misurabile secondo Peano-Jordan e $\mathrm{mis}(\partial X) = 0$.

2) $\implies$ 3). Ciò è ovvio.

3) $\implies$ 1). Per ogni $I \in \mathcal{I}_h$ si ha

$$\partial(X \cap I) \subseteq (\partial I) \cup ((\partial X) \cap I) , \tag{4.5.2}$$

quindi, dato che $\mathrm{m}(\partial I) = 0$ e $\mathrm{m}((\partial X) \cap I) = 0$, per il Teorema 4.2.1, a) e g), si ha

$$\mathrm{m}(\partial(X \cap I)) = 0 ,$$

pertanto, per quanto già dimostrato, l'insieme $X \cap I$ è misurabile secondo Peano-Jordan.

Per l'arbitrarietà di $I \in \mathcal{I}_h$ concludiamo che X è misurabile secondo Peano-Jordan.

Esercizio 4.5.1. Dimostrare che se $Z \subseteq \mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Peano-Jordan ed ha misura nulla, ogni sottoinsieme di Z è pure misurabile secondo Peano-Jordan (si consideri dapprima il caso Z limitato).

Esercizio 4.5.1. Dimostrare la (4.5.1) e la (4.5.2).