3. Successioni di insiemi.

Per evitare incongruenze supponiamo, in questo capitolo, che tutti gli insiemi considerati siano sottoinsiemi di un dato insieme S (l'insieme "ambiente").

Quando occorrerà considerare S munito di qualche struttura aggiuntiva (ad es. quella di spazio topologico o quella di spazio metrico) lo segnaleremo esplicitamente.

3.1. Minimo e massimo limite di una successione di insiemi.

Definizione 3.1.1. (*Minimo e massimo limite di una successione di insiemi*). Sia $\{X_n\}$ una successione di insiemi.

Si chiama *minimo limite* della successione $\{X_n\}$, e si indica con

$$\lim_{n\to\infty}{}' X_n \ ,$$

l'insieme costituito dagli elementi $x \in S$ che godono della seguente proprietà: "esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ (dipendente da x) tale che $x \in X_n$ per ogni $n \geq \overline{n}$".

Si chiama *massimo limite* della successione $\{X_n\}$, e si indica con

$$\lim_{n\to\infty}{}'' X_n \ ,$$

l'insieme costituito dagli elementi $x \in S$ che godono della seguente proprietà: "esiste una successione $\{X_{n_k}\}$ (dipendente da x), estratta da $\{X_n\}$, tale che $x \in X_{n_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$".

Altre notazioni adoperate per indicare il minimo ed il massimo limite della successione $\{X_n\}$ sono, rispettivamente,

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty} X_n \ .$$

La successiva proposizione è un'ovvia conseguenza della definizione.

Proposizione 3.1.1. *Per ogni successione di insiemi $\{X_n\}$ si ha:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \ \subseteq \ \lim_{n\to\infty}{}' X_n \ \subseteq \ \lim_{n\to\infty}{}'' X_n \ \subseteq \ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ . \tag{3.1.1}$$

Si ha inoltre la

Proposizione 3.1.2. *Per ogni successione di insiemi $\{X_n\}$ risulta:*

$$\lim_{n\to\infty}{}' X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap X_{n+1} \cap X_{n+2} \cap \ldots) , \tag{3.1.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}'' X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n \cup X_{n+1} \cup X_{n+2} \cup \ldots) . \tag{3.1.3}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (3.1.3). Si hanno infatti le seguenti equivalenze:

$$x \in \lim_{n\to\infty}{}'' X_n \iff$$

$$\iff \exists\{n_k\}, \text{ successione crescente di numeri naturali, tale che } x \in X_{n_k} \ \forall k \in \mathbb{N} \iff ({}^1)$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists h \in \mathbb{N},\ h \geq n, \quad \text{tale che } x \in X_h \iff$$

$$\iff x \in X_n \cup X_{n+1} \cup X_{n+2} \cup \ldots \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff$$

$$\iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n \cup X_{n+1} \cup X_{n+2} \cup \ldots) .$$

La verifica della (3.1.2) è più semplice ed è lasciata per esercizio allo studente.

Esempio 3.1.1. Siano C, D due insiemi qualsiasi e sia $\{X_n\}$ la successione di insiemi definita ponendo $X_n = C$ oppure $X_n = D$ secondo che n sia dispari oppure pari. Allora

$$\lim_{n\to\infty}{}' X_n = C \cap D \quad , \quad \lim_{n\to\infty}{}'' X_n = C \cup D ;$$

(1) Per dimostrare l'implicazione $\Longrightarrow$ osserviamo che è $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$; pertanto, per verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $h \in \mathbb{N}$, $h \geq n$, tale che $x \in X_h$, basta prendere $h = n_k$ con k sufficientemente grande. Viceversa, per dimostrare la $\Longleftarrow$, osserviamo che l'esistenza della successione $\{n_k\}$ si ottiene nel modo seguente: fissato $n = 1$, esiste, per ipotesi, $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x \in X_{n_1}$; fissato $n = n_1 + 1$, esiste, per ipotesi, $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1 + 1$, tale che $x \in X_{n_2}$; fissato $n = n_2 + 1$ esiste, per ipotesi, $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 \geq n_2 + 1$, tale che $x \in X_{n_3}$; ecc. ecc.

infatti si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \cap X_{n+1} \cap X_{n+2} \cap \ldots \;=\; C \cap D \quad , \quad X_n \cup X_{n+1} \cup X_{n+2} \cup \ldots \;=\; C \cup D \;,$$

dunque l'asserto segue subito dalla Proposizione 3.1.2.

Esempio 3.1.2. Sia $S = \mathbb{R}$. Supponiamo che $n \to q_n$ sia una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ e consideriamo la successione di insiemi $\{X_n\} = \{[0, q_n]\}$. Risulta:

$$\lim_{n\to\infty}{}'[0,q_n] \;=\; \{0\} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}{}''[0,q_n] \;=\; [0,1[\;.$$

Infatti:

— per la (3.1.1) si ha

$$0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [0,q_n] \;\subseteq\; \lim_{n\to\infty}{}'[0,q_n] \;;$$

d'altra parte nessun numero reale $x \neq 0$ appartiene all'insieme $\lim'_{n\to\infty}[0,q_n]$; ciò è ovvio se $x < 0$; se $x > 0$ basta osservare che, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, risulta $0 < q_n < x$, e quindi $x \notin [0,q_n]$, per infiniti valori distinti di $n \in \mathbb{N}$, dunque non può esistere $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x \in [0,q_n]$ $\forall n \geq \overline{n}$;

— ancora per la (3.1.1) si ha

$$[0,1[\; = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,q_n] \;\supseteq\; \lim_{n\to\infty}{}''[0,q_n] \;;$$

d'altra parte, se $x \in [0,1[$, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esistono infiniti valori distinti di $n \in \mathbb{N}$ per i quali risulta $x \leq q_n < 1$ e quindi $x \in [0,q_n]$; di conseguenza si ha $x \in \lim''_{n\to\infty}[0,q_n]$.

Esempio 3.1.3. Sia ancora $S = \mathbb{R}$ e siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che

$$0 \;<\; a_n \;<\; 1 \;<\; b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; 1 \;.$$

Si ha allora, per la successione $\{[a_n, b_n]\}$,

$$\lim_{n\to\infty}{}'[a_n,b_n] \;=\; \lim_{n\to\infty}{}''[a_n,b_n] \;=\;]0,1] \;.$$

Infatti, se $x \in]0,1]$, allora si ha, definitivamente, $a_n \leq x$ e quindi $x \in [a_n,b_n]$, pertanto $x \in \lim'_{n\to\infty}[a_n,b_n]$; dunque

$$]0,1] \;\subseteq\; \lim_{n\to\infty}{}'[a_n,b_n] \;.$$

D'altra parte, se $x \in \lim''_{n\to\infty}[a_n, b_n]$, esiste una successione crescente $\{n_k\}$ di numeri naturali tale che

$$a_{n_k} \ \leq \ x \ \leq \ b_{n_k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ ;$$

ne segue ovviamente che $x > 0$ e inoltre, passando al limite per $k \to \infty$ nella disuguaglianza di destra, $x \leq 1$; dunque si ha pure

$$\lim_{n\to\infty}{}''[a_n, b_n] \ \subseteq \ ]0, 1]\ .$$

La proposizione successiva ci permette di esprimere, dati una successione $\{X_n\}$ ed un insieme Y, il minimo ed il massimo limite della successione $\{Y \setminus X_n\}$ mediante il minimo ed il massimo limite della successione "originaria" $\{X_n\}$. I risultati che si ottengono presentano una certa analogia con le formule di De Morgan (che, peraltro, intervengono in maniera sostanziale nella dimostrazione) e possono essere ricordati, facendo riferimento al caso in cui Y contiene tutti gli insiemi X_n, mediante la filastrocca: "il limite minimo [risp. massimo] della successione dei complementari è uguale al complementare del limite massimo [risp. minimo] della successione originaria."

Proposizione 3.1.3. *Sia $\{X_n\}$ una successione di insiemi e sia Y un insieme qualunque. Risulta allora:*

$$\lim_{n\to\infty}{}'(Y \setminus X_n) \ = \ Y \setminus \big(\lim_{n\to\infty}{}''X_n\big)\ , \tag{3.1.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}''(Y \setminus X_n) \ = \ Y \setminus \big(\lim_{n\to\infty}{}'X_n\big)\ . \tag{3.1.5}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (3.1.4). Dalla (3.1.2), applicando le due formule di De Morgan, si ha

$$\lim_{n\to\infty}{}'(Y \setminus X_n) \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(Y \setminus X_k) \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(Y \setminus \Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k\Big)\Big) \ = \ Y \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k\Big)$$

e quindi, per la (3.1.3),

$$\lim_{n\to\infty}{}'(Y \setminus X_n) \ = \ Y \setminus \big(\lim_{n\to\infty}{}''X_n\big)\ .$$

La dimostrazione della (3.1.5) è perfettamente analoga.

Definizione 3.1.2. (*Successioni convergenti*). Si dice che una successione di insiemi $\{X_n\}$ è *convergente* se

$$\lim_{n\to\infty}{}' X_n \;=\; \lim_{n\to\infty}{}'' X_n \;.$$

In questo caso si dice che la successione $\{X_n\}$ ha per *limite* l'insieme

$$X \;=\; \lim_{n\to\infty}{}' X_n \;=\; \lim_{n\to\infty}{}'' X_n$$

e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} X_n \;=\; X$$

oppure, più brevemente,

$$X_n \;\to\; X \;.$$

Un esempio di successione convergente è dato dall'Esempio 3.1.3. Un altro facile esempio, che è bene tenere a mente, è il seguente.

Esempio 3.1.4. Se gli insiemi della successione $\{X_n\}$ sono a due a due disgiunti, allora

$$\lim_{n\to\infty} X_n \;=\; \emptyset \;.$$

Infatti è ovvio che $\lim''_{n\to\infty} X_n = \emptyset$.

Definizione 3.1.3. (*Successioni monotòne*). Si dice che una successione di insiemi $\{X_n\}$ è *non decrescente* [risp. *non crescente*] se è

$$X_n \;\subseteq\; X_{n+1} \qquad [\text{ risp. } \; X_n \;\supseteq\; X_{n+1} \;] \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;.$$

Si dice che la successione $\{X_n\}$ è *monotòna* se essa è non decrescente oppure non crescente.

Proposizione 3.1.4. (Convergenza delle successioni monotòne). *Se una successione di insiemi* $\{X_n\}$ *è non decrescente* [risp. *non crescente*], *allora* $\{X_n\}$ *è convergente e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} X_n \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \qquad \left[\text{ risp. } \; \lim_{n\to\infty} X_n \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \;\right] \;.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\{X_n\}$ sia non decrescente. Si ha allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \cap X_{n+1} \cap \ldots \;=\; X_n$$

e quindi, per la (3.1.2),

$$\lim_{n\to\infty}{}' X_n \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap X_{n+1} \cap \ldots) \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \;.$$

Conseguentemente, tenendo presente la (3.1.1), si ha

$$\lim_{n\to\infty} X_n \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \;.$$

Analogamente, se $\{X_n\}$ è non crescente, allora è, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \cup X_{n+1} \cup \ldots \;=\; X_n$$

e quindi, per la (3.1.3),

$$\lim_{n\to\infty}{}'' X_n \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \;;$$

pertanto, grazie alla (3.1.1), concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} X_n \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \;.$$

Osserviamo che la successione dell'Esempio 3.1.3 è convergente ma non è monotòna. Anche la successione dell'Esempio 3.1.4 (a condizione che almeno uno degli insiemi X_n sia diverso dall'insieme vuoto) è convergente ma non è monotòna.

Notazione. Per indicare che la successione di insiemi $\{X_n\}$ è non decrescente [risp. non crescente] ed è $\lim_{n\to\infty} X_n = X$, cioè $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ [risp. $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X$], si adopera la notazione

$$X_n \uparrow X \qquad\qquad [\,\text{risp. } X_n \downarrow X\,]$$

(si legge, brevemente, "X_n cresce [risp. decresce] verso X").

Esercizio 3.1.1. Siano $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ due successioni di insiemi tali che $A_n \uparrow A$, $B_n \downarrow B$. Sia $\{X_n\}$ la successione di insiemi definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{2n-1} \;=\; A_n \qquad , \qquad X_{2n} \;=\; B_n \;.$$

Trovare $\lim'_{n\to\infty} X_n$ e $\lim''_{n\to\infty} X_n$.

Esercizio 3.1.2. Sia $S = \mathbb{R}^2$ (identificato con l'insieme dei punti di un piano cartesiano) e sia $n \to q_n$ una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q} \cap]0,1[$. Denotata con Γ la semicirconferenza

$$\Gamma \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1 \,,\, y \geq 0\} \;,$$

siano, per ogni $n \in \mathbb{N}$, P_n il punto di Γ di ascissa q_n e T_n il triangolo (chiuso) di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e P_n.

Trovare il minimo ed il massimo limite della successione di insiemi $\{T_n\}$.

$\Big[$R. : $\qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty}{}' T_n = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}$;

$$\lim_{n\to\infty}{}'' T_n = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\,,\ 0 < y < \min\{1-x, \sqrt{1-x^2}\}\Big\}\ .\ \Big]$$

3.2. Successioni di insiemi invadenti il proprio limite.

Supponiamo che S sia uno spazio topologico.

Definizione 3.2.1. (*Successioni invadenti il proprio limite*). Sia $\{X_n\}$ una successione di sottoinsiemi di S tale che $X_n \uparrow X$. Si dice che la successione $\{X_n\}$ *invade* X se per ogni insieme compatto $K \subseteq X$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq X_{\overline{n}}$ (e quindi $K \subseteq X_n \quad \forall n \ge \overline{n}$).

Esempi 3.2.1. Sia $S = \mathbb{R}$, dotato della topologia usuale.

a) Sia $X_n = [-n, n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $X_n \uparrow \mathbb{R}$. Inoltre $\{X_n\}$ invade $\mathbb{R}$; infatti ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ è limitato e quindi contenuto in $[-n, n]$ per n sufficientemente grande.

b) Sia $X_n =]-\infty, 0] \cup]\frac{1}{n}, +\infty[$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $X_n \uparrow \mathbb{R}$ ma $\{X_n\}$ non invade $\mathbb{R}$; infatti l'intervallo compatto $[0, c]$, $c > 0$, non è contenuto in nessuno degli insiemi X_n.

c) Sia $X_n =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{n}, +\infty[$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $X_n \uparrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre $\{X_n\}$ invade $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; infatti, se $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è compatto, allora K è chiuso e quindi, dato che $0 \notin K$, esiste $r > 0$ tale che $]-r, r[\subseteq \mathbb{R} \setminus K$, cioè $K \subseteq \mathbb{R} \setminus]-r, r[$; pertanto si ha $K \subseteq X_n$ non appena è $\frac{1}{n} < r$.

Osserviamo che l'ultimo esempio si inquadra nel seguente teorema.

Teorema 3.2.1. (Condizione sufficiente di invadenza). *Ogni successione non decrescente $\{A_n\}$ di sottoinsiemi aperti di uno spazio topologico S invade il proprio limite.*

Dimostrazione. Sia $A_n \uparrow A$ e sia $K \subseteq A$ un insieme compatto. Poichè $K \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, la famiglia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto di K; esistono quindi $A_{n_1}, \ldots, A_{n_r}$ tali che $K \subseteq A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_r}$. D'altra parte, essendo $\{A_n\}$ non decrescente, denotato con $\overline{n}$ il $\max\{n_1, \ldots, n_r\}$, si ha $A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_r} = A_{\overline{n}}$. Abbiamo così verificato l'esistenza di $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq A_{\overline{n}}$; ciò completa la dimostrazione.

Osservazione 3.2.1. Siano $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ due successioni di sottoinsiemi di S tali che $X_n \uparrow X$, $Y_n \uparrow Y$. Si ha allora, ovviamente, $X_n \cap Y_n \uparrow X \cap Y$ e $X_n \cup Y_n \uparrow X \cup Y$. Inoltre, se ognuna delle successioni $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ invade il proprio limite, è facile verificare che anche la successione $X_n \cap Y_n$ invade il suo limite. Ciò non è necessariamente vero, invece, per la successione $\{X_n \cup Y_n\}$ (cfr. il successivo Esempio 3.2.2); naturalmente, se gli insiemi X_n, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sono aperti, allora, per la successione $\{X_n \cup Y_n\}$ l'invadenza è assicurata dal Teorema 3.2.1.

Esempio 3.2.2. Sia $S = \mathbb{R}$, dotato della topologia usuale, e siano $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ le successioni di insiemi definite nel modo seguente:

$$X_n \;=\;]-\infty, 0] \quad , \quad Y_n \;=\;]\frac{1}{n}, +\infty[\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$X_n \;\uparrow]-\infty, 0] \quad , \quad Y_n \;\uparrow]0, +\infty[$$

ed entrambe le successioni invadono il proprio limite (ciò è ovvio per la successione $\{X_n\}$ e segue subito dal Teorema 3.2.1 per la $\{Y_n\}$). Invece la successione $\{X_n \cup Y_n\}$ non invade il suo limite $\mathbb{R}$ (cfr. l'Esempio 3.2.1, b)).

Esercizio 3.2.1. Sia $S = \mathbb{R}^2$, dotato della topologia euclidea e siano $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ e $\{C_n\}$ le successioni di insiemi definite ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\,,\, 0 < y < nx\} \quad , \quad B_n \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\,,\, 0 \le y \le nx\} \quad ,$$
$$C_n \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0\,,\, 0 \le y \le nx\} \quad .$$

Per ognuna di tali successioni:

a) provare che si tratta di una successione non decrescente e calcolarne il limite;

b) stabilire se la successione invade o meno il proprio limite.

3.3. Distanza di due insiemi in uno spazio metrico.

Supponiamo adesso che S sia il sostegno di uno spazio metrico (S, d).

Definizione 3.3.1. (*Distanza di due insiemi*). Siano X, Y due sottoinsiemi non vuoti di S. Si chiama *distanza degli insiemi X e Y*, e si indica con $d(X, Y)$, il numero reale non negativo

$$d(X,Y) \;=\; \inf\{d(x,y) \,:\, x \in X \,,\, y \in Y\} \;.$$

È ovvio che vale l'implicazione

$$X \cap Y \;\neq\; \emptyset \quad \Longrightarrow \quad d(X,Y) \;=\; 0 \;. \tag{3.3.1}$$

Il viceversa invece non è vero. Per rendersi conto di ciò basta considerare, nello spazio metrico $\mathbb{R}$, dotato della metrica usuale, la coppia di insiemi disgiunti $X =]-\infty, 0]$ e $Y =]0, +\infty[$, insiemi che, come facilmente si verifica, hanno distanza nulla. Questo controesempio rientra, come caso particolare, nel seguente esempio di carattere generale.

Esempio 3.3.1. Supponiamo che lo spazio metrico (S, d) sia connesso e sia $X \subseteq S$ tale che $X \neq \emptyset$, $X \neq S$. Allora i due insiemi disgiunti X e $Y = S \setminus X$ hanno distanza nulla. Infatti, le ipotesi su (S, d) e X implicano che $\partial X \neq \emptyset$. Sia $\overline{x}$ un elemento di $\partial X = \partial(S \setminus X) = \partial Y$. Il punto $\overline{x}$ appartiene ad uno degli insiemi X, Y (supponiamo, per fissare le idee, che sia $\overline{x} \in X$) ed è di accumulazione per l'altro insieme; di conseguenza abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in Y$ tale che $d(\overline{x}, y) < \varepsilon$, dunque l'estremo inferiore dell'insieme $\{d(x, y) : x \in X \, , \, y \in Y\}$, cioè la distanza $d(X, Y)$, è uguale a zero.

Un caso importante nel quale è possibile invertire la (3.3.1) è quello considerato nel seguente teorema.

Teorema 3.3.1. *Siano X, Y sottoinsiemi non vuoti dello spazio metrico (S, d). Supponiamo inoltre che che uno dei due insiemi sia compatto e l'altro sia chiuso.*

Allora, se la distanza $d(X, Y)$ è nulla, risulta $X \cap Y \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che X sia compatto. L'ipotesi $d(X, Y) = 0$ implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x^* \in X$, $y^* \in Y$ tali che $d(x^*, y^*) < \varepsilon$. Ne segue l'esistenza di due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, la prima di punti di X, la seconda di punti di Y, tali che $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè X è compatto – cioè sequenzialmente compatto, dato che S è uno spazio metrico – esiste una successione $\{x_{n_k}\}$, estratta da $\{x_n\}$, tale che

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} \; = \; x \in X \; .$$

Ma anche la corrispondente successione $\{y_{n_k}\}$, estratta da $\{y_n\}$, è tale che

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} \; = \; x \; ;$$

infatti dalla disuguaglianza

$$d(y_{n_k}, x) \; \leq \; d(y_{n_k}, x_{n_k}) \; + \; d(x_{n_k}, x) \; , \qquad k \in \mathbb{N} \; ,$$

si ottiene facilmente

$$\lim_{k \to \infty} d(y_{n_k}, x) \; = \; 0 \; .$$

Poichè Y è chiuso e $\{y_{n_k}\}$ è una successione di punti di X, si ha $x \in Y$, quindi $x \in X \cap Y$. Ciò completa la dimostrazione.

Osserviamo che l'ipotesi che gli insiemi X e Y siano entrambi chiusi non è sufficiente per potere invertire la (3.3.1). Ciò si evince dal successivo esempio.

Esempio 3.3.2. Sia $S = \mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea. Gli insiemi disgiunti

$$X \; = \; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xy = 0\} \qquad , \qquad Y \; = \; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xy = 1\}$$

sono entrambi chiusi ed hanno distanza nulla.

Esercizio 3.3.1. Dimostrare quanto affermato nell'esempio precedente.

Esercizio 3.3.2. Trovare una coppia di sottoinsiemi chiusi disgiunti dello spazio $\mathbb{R}$, dotato della metrica usuale, aventi distanza nulla.

Definizione 3.3.2. (*Distanza di un punto da un insieme*). Siano x e Y, rispettivamente, un punto ed un sottoinsieme non vuoto dello spazio metrico (S, d). Si chiama *distanza del punto x dall'insieme Y*, e si indica con $d(x, Y)$, la distanza $d(\{x\}, Y)$ dei due insiemi $\{x\}$ e Y.

In altre parole

$$d(x, Y) \;=\; \inf\{d(x, y) \,:\, y \in Y\} \;. \tag{3.3.2}$$

Proposizione 3.3.1. *La distanza $d(x, Y)$ è nulla se e solo se $x \in \overline{Y}$.*

Esercizio 3.3.3. Dimostrare la Proposizione 3.3.1.

Fissato l'insieme $Y \subseteq S$, $Y \neq \emptyset$, consideriamo la funzione

$$x \;\rightarrow\; d(x, Y) \;,$$

da S in $\mathbb{R}$, e dimostriamo che tale funzione è continua, anzi lipschitziana.

Teorema 3.3.2. *Sia Y un sottoinsieme non vuoto dello spazio metrico (S, d). La funzione*

$$x \;\rightarrow\; d(x, Y) \;, \tag{3.3.3}$$

da S in $\mathbb{R}$, è lipschitziana; infatti si ha:

$$|d(x_1, Y) - d(x_2, Y)| \;\leq\; d(x_1, x_2) \qquad\qquad \forall x_1, x_2 \in S \;.$$

Dimostrazione. Per ogni $x_1, x_2 \in S$ ed ogni $y \in Y$ si ha

$$d(x_1, Y) \;\leq\; d(x_1, y) \;\leq\; d(x_1, x_2) \;+\; d(x_2, y) \;,$$

quindi

$$d(x_1, Y) \;-\; d(x_1, x_2) \;\leq\; d(x_2, y) \;,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $y \in Y$, ricordando la (3.3.2),

$$d(x_1, Y) \;-\; d(x_1, x_2) \;\leq\; d(x_2, Y) \;,$$

cioè

$$d(x_1, Y) \;-\; d(x_2, Y) \;\leq\; d(x_1, x_2) \;;$$

poichè $x_1, x_2 \in S$ sono arbitrari si ha pure

$$d(x_2, Y) \;-\; d(x_1, Y) \;\leq\; d(x_1, x_2) \;,$$

pertanto

$$|d(x_1, Y) - d(x_2, Y)| \;\leq\; d(x_1, x_2) \;.$$

Corollario 3.3.1. *Sia Y un sottoinsieme non vuoto dello spazio metrico (S, d). La funzione*

$$x \;\rightarrow\; d(x, Y) \;,$$

da S in $\mathbb{R}$, è continua.

Corollario 3.3.2. *Sia Y un sottoinsieme non vuoto dello spazio metrico (S, d). Per ogni $r > 0$ gli insiemi*

$$\{x \in S \,:\, d(x, Y) < r\} \quad , \quad \{x \in S \,:\, d(x, Y) > r\} \tag{3.3.4}$$

sono aperti, mentre gli insiemi

$$\{x \in S \,:\, d(x, Y) \leq r\} \quad , \quad \{x \in S \,:\, d(x, Y) \geq r\} \tag{3.3.5}$$

sono chiusi.

Dimostrazione. Segue subito dal Corollario 3.3.1 osservando che gli insiemi (3.3.4) sono le controimmagini tramite la funzione continua (3.3.3) degli insiemi $]-\infty, r[$ e $]r, +\infty[$, aperti di $\mathbb{R}$, mentre gli insiemi (3.3.5) sono le controimmagini dei chiusi $]-\infty, r]$ e $[r, +\infty[$.

3.4. Ogni aperto di $\mathbb{R}^h$ è invaso da una successione di plurintervalli.

La proprietà degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^h$ espressa dal successivo Teorema 3.4.1 sarà particolarmente utile, nel capitolo successivo, nello sviluppo della teoria della misura secondo Lebesgue.

Teorema 3.4.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme aperto. Esiste una successione $\{\Pi_n\}$ di plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ tale che:*

i) $\Pi_n \;\subseteq\; \Pi_{n+1} \;\subseteq\; A$ *per ogni $n \in \mathbb{N}$;*

ii) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{\Pi}_n \;=\; A$.

Dimostrazione. Se $A = \mathbb{R}^h$ basta prendere $\Pi_n = [-n, n]^h$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo quindi che sia $A \neq \mathbb{R}^h$, cioè $\mathbb{R}^h \setminus A \neq \emptyset$, e consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme

$$C_n \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^h \,:\, d(x, \mathbb{R}^h \setminus A) \geq \tfrac{1}{n}\right\} .$$

La successione $\{C_n\}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ che così si ottiene è una successione di insiemi chiusi (per il Corollario 3.3.2) e si ha

$$C_n \;\uparrow\; \left\{x \in \mathbb{R}^h \,:\, d(x, \mathbb{R}^h \setminus A) > 0\right\} ;$$

inoltre, dato che $\mathbb{R}^h \setminus A$ è chiuso, tenendo presente la Proposizione 3.3.1 si ha

$$\left\{x \in \mathbb{R}^h \,:\, d(x, \mathbb{R}^h \setminus A) > 0\right\} =$$

$$= \mathbb{R}^h \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^h \,:\, d(x, \mathbb{R}^h \setminus A) = 0\right\} = \mathbb{R}^h \setminus (\mathbb{R}^h \setminus A) = A \,,$$

dunque

$$C_n \uparrow A \,.$$

Consideriamo adesso la successione $\{K_n\}$ di insiemi chiusi e limitati (cioè compatti) ottenuta dalla $\{C_n\}$ nel modo seguente:

$$K_n = C_n \cap [-n, n]^h \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,;$$

ovviamente, anche per la successione $\{K_n\}$ si ha

$$K_n \uparrow A \,.$$

Sia, poi, $\{R_n\}$ una successione di plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ tale che

$$K_n \subseteq \overset{\circ}{R}_n \quad , \quad R_n \subseteq A \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(l'esistenza di una siffatta successione è assicurata dal successivo Lemma 3.4.1). Si ha

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{R}_n \subseteq A \,,$$

quindi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{R}_n = A \,.$$

Infine, posto

$$\Pi_n = R_1 \cup \ldots \cup R_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,,$$

è immediato verificare che la successione di plurintervalli $\{\Pi_n\}$, così definita, soddisfa le condizioni i) e ii).

Lemma 3.4.1. *Siano A un insieme aperto di $\mathbb{R}^h$ e K un insieme compatto di $\mathbb{R}^h$ tali che $K \subseteq A$. Esiste allora un plurintervallo $R \in \mathcal{P}_h$ tale che*

$$K \subseteq \overset{\circ}{R} \quad , \quad R \subseteq A \,.$$

Dimostrazione. Se $K = \emptyset$, basta prendere $R = \emptyset$. Supponiamo quindi $K \neq \emptyset$ e, per ogni punto $x \in K$, scegliamo, come è certamente possibile, un intervallo $I_x \in \mathcal{I}_h$ tale che

$$x \in \overset{\circ}{I}_x \quad , \quad I_x \subseteq A \ .$$

La famiglia di insiemi

$$\left\{ \overset{\circ}{I}_x \ : \ x \in K \right\}$$

è un ricoprimento aperto di K; esistono quindi $x_1, \ldots, x_r \in K$ tali che

$$K \subseteq \overset{\circ}{I}_{x_1} \cup \ldots \cup \overset{\circ}{I}_{x_r} \ ;$$

allora, per provare la tesi, è sufficiente prendere

$$R = I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_r} \ .$$

Osservazione 3.4.1. Ritorniamo all'enunciato del Teorema 3.4.1 e verifichiamo che – come annunciato nel titolo del paragrafo – la successione $\{\Pi_n\}$ invade A.

Infatti, le proprietà i) e ii) implicano ovviamente che

$$\overset{\circ}{\Pi}_n \uparrow A \ ,$$

quindi, per il Teorema 3.2.1, la successione $\{\overset{\circ}{\Pi}_n\}$ invade il proprio limite A. Dalle i) e ii) segue inoltre che

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{\Pi}_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n \subseteq A \ ,$$

quindi anche per la successione $\{\Pi_n\}$ risulta

$$\Pi_n \uparrow A \ ;$$

di conseguenza, dato che $\{\overset{\circ}{\Pi}_n\}$ invade A, è ovvio che anche $\{\Pi_n\}$ invade A.