

20. Prodotto di spazi di misura. I teoremi di Tonelli e di Fubini.

20.1. Prodotto di σ -algebre.

Definizione 20.1.1. (*σ -algebra prodotto*). Dati n spazi misurabili

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n) ,$$

si chiama *σ -algebra prodotto* delle σ -algebre $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, e si denota con il simbolo

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n ,$$

la minima σ -algebra \mathcal{A} nel prodotto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ avente la proprietà che, per ogni $i = 1, \dots, n$, la proiezione di Ω su Ω_i , cioè l'applicazione $p_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ definita ponendo

$$p_i(\omega) = \omega_i \qquad \forall \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega ,$$

sia una funzione $\mathcal{A} - \mathcal{A}_i$ -misurabile.

In altre parole, ricordando il concetto di σ -algebra generata da una famiglia di funzioni (Definizione 9.4.1), si ha, per definizione,

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}(p_1, \dots, p_n) .$$

Esempio 20.1.1. Supponiamo che sia $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = \dots = (\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, e quindi $\Omega = \mathbb{R}^n$. Sappiamo, dall'Esempio 9.4.1, che la minima σ -algebra \mathcal{A} in \mathbb{R}^n tale che tutte le proiezioni p_i , $i = 1, \dots, n$, siano funzioni $\mathcal{A} - \mathcal{B}_1$ -misurabili è la σ -algebra dei boreliani di \mathbb{R}^n . Pertanto si ha

$$\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_n .$$

Esempio 20.1.2. Con un ragionamento del tutto analogo a quello svolto a proposito dell'Esempio 9.4.1 si ha che, se si considerano i due spazi misurabili $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k)$ e si identifica, come è abituale, il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ con \mathbb{R}^{h+k} (e quindi la famiglia $\mathcal{P}(\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k)$ con la famiglia $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{h+k})$) mediante la bigezione

$$\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k \ni (x, y) = ((x_1, \dots, x_h), (y_1, \dots, y_k)) \rightarrow (x_1, \dots, x_h, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{h+k}$$

(cfr. la successiva Osservazione 20.1.1), allora risulta

$$(20.1.1) \qquad \mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{h+k}$$

Per comodità del lettore riportiamo di seguito la verifica della (20.1.1). Osserviamo come prima cosa che, in questo caso, le due proiezioni

$$\mathbb{R}^{h+k} \ni (x, y) \rightarrow p_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^h \quad , \quad \mathbb{R}^{h+k} \ni (x, y) \rightarrow p_2(x, y) = y \in \mathbb{R}^k$$

sono entrambe funzioni continue (sono lipschitziane) e quindi, per il Corollario 9.1.1, possiamo affermare che la σ -algebra \mathcal{B}_{h+k} è una delle σ -algebre \mathcal{A} in \mathbb{R}^{h+k} aventi la proprietà che le due proiezioni p_1 e p_2 siano, rispettivamente, $\mathcal{A} - \mathcal{B}_h$ -misurabile e $\mathcal{A} - \mathcal{B}_k$ -misurabile. Pertanto, per la definizione di $\mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k$, si ha

$$\mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_{h+k} \quad .$$

Per dimostrare che è vera pure l'inclusione contraria basta far vedere che la σ -algebra $\mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k$ contiene la famiglia \mathcal{I}_{h+k} degli intervalli chiusi di \mathbb{R}^{h+k} . E infatti, se $I \in \mathcal{I}_{h+k}$ è un qualunque intervallo chiuso di \mathbb{R}^{h+k} , allora, grazie all'identificazione $\mathbb{R}^{h+k} = \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$, possiamo esprimere I come prodotto cartesiano,

$$I = J \times K \quad ,$$

di due intervalli chiusi $J \in \mathcal{I}_h$ e $K \in \mathcal{I}_k$. Poiché le due proiezioni p_1 e p_2 sono, rispettivamente, $\mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k - \mathcal{B}_h$ -misurabile e $\mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k - \mathcal{B}_k$ -misurabile, abbiamo che le due controimmagini

$$J \times \mathbb{R}^k = p_1^{-1}(J) \quad , \quad \mathbb{R}^h \times K = p_2^{-1}(K)$$

appartengono entrambe alla σ -algebra $\mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k$; pertanto anche l'intervallo

$$I = J \times K = p_1^{-1}(J) \cap p_2^{-1}(K)$$

appartiene a $\mathcal{B}_h \otimes \mathcal{B}_k$.

Osservazione 20.1.1. (*Proprietà associativa del prodotto cartesiano*). Noi supponiamo sempre, nel corso di questi appunti, che il prodotto cartesiano di insiemi goda della proprietà associativa.

Se ci limitiamo, per semplicità, al caso delle famiglie finite di insiemi, il significato di questa ipotesi è che, qualunque siano gli insiemi non vuoti $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ ($r \geq 3$) e i numeri interi s_1, \dots, s_n , tali che $1 \leq s_1 < \dots < s_n = r$, il prodotto cartesiano

$$\Omega' = \left(\prod_{i=1}^{s_1} \Omega_i \right) \times \dots \times \left(\prod_{i=s_{n-1}+1}^{s_n} \Omega_i \right)$$

viene identificato con il prodotto cartesiano

$$\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_r$$

mediante la bigezione

$$\omega' = ((\omega_1, \dots, \omega_{s_1}), \dots, (\omega_{s_{n-1}+1}, \dots, \omega_{s_n})) \rightarrow \omega = (\omega_1, \dots, \omega_r) \quad .$$

È ovvio che, in questo modo, risultano identificate anche le corrispondenti famiglie dei sottoinsiemi $\mathcal{P}(\Omega')$ e $\mathcal{P}(\Omega)$. Inoltre, se $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$ è una qualunque altra ν -upla di interi tali che $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_\nu = r$ e si considera il prodotto cartesiano

$$\Omega'' = \left(\bigtimes_{i=1}^{\sigma_1} \Omega_i \right) \times \dots \times \left(\bigtimes_{i=\sigma_{\nu-1}+1}^{\sigma_\nu} \Omega_i \right) ,$$

allora è chiaro che si ha pure $\Omega' = \Omega''$.

Quando nel seguito ci capiterà, occasionalmente, di usare frasi del tipo: “identificando $(\Omega_1 \times \Omega_2) \times \Omega_3$ con $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ ”, oppure “dal momento che $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ si identifica con \mathbb{R}^7 ”, oppure ancora “poiché il prodotto cartesiano gode della proprietà associativa si ha l’uguaglianza $(\Omega_1 \times \Omega_2) \times (\Omega_3 \times \Omega_4) = (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3) \times \Omega_4$ ”, ecc. ecc., l’intento di tali frasi sarà soltanto quello di ribadire, nei casi particolari di volta in volta considerati, quanto qui è stato convenuto in generale.

Esempio 20.1.3. Generalizzando quanto detto nei precedenti due esempi, si ha che, comunque siano dati gli interi positivi h_1, \dots, h_n , se si considerano gli spazi misurabili

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\mathbb{R}^{h_1}, \mathcal{B}_{h_1}), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n) = (\mathbb{R}^{h_n}, \mathcal{B}_{h_n}) ,$$

allora, identificando $\mathbb{R}^{h_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{h_n}$ con $\mathbb{R}^{h_1+\dots+h_n}$, risulta

$$(20.1.2) \quad \mathcal{B}_{h_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{h_n} = \mathcal{B}_{h_1+\dots+h_n} .$$

Lasciamo per esercizio allo studente la verifica dettagliata della (20.1.2)

Teorema 20.1.1. (Generatori della σ -algebra prodotto). *Dati gli spazi misurabili*

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n) ,$$

supponiamo che, per ogni $i = 1, \dots, n$, sia assegnato un generatore \mathcal{E}_i di \mathcal{A}_i . Supponiamo inoltre che, per ognuno dei generatori \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, n$, vi sia una successione $\{E_{ik}\}_{k \in \mathbb{N}}$ di insiemi appartenenti a \mathcal{E}_i tale che $E_{ik} \uparrow \Omega_i$. Allora la famiglia (di sottoinsiemi del prodotto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$)

$$(20.1.3) \quad \mathcal{E} = \{E_1 \times \dots \times E_n : E_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_n\}$$

è un generatore della σ -algebra prodotto $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$.

Dimostrazione.

Osservazione 20.1.2. Dalla dimostrazione del Teorema 20.1.1 si evince che l’inclusione

$$(20.1.4) \quad \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$$

(\mathcal{E} data dalla (20.1.3)) è sempre verificata, qualunque siano i generatori $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ delle σ -algebre $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$.

Di contro, è facile costruire un esempio per convincersi che, in generale, senza ulteriori ipotesi sui generatori \mathcal{E}_i , non vale l'uguaglianza $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$.

Esempio 20.1.4.

Notiamo ancora che, se nel precedente Teorema 20.1.1 si considera come generatore \mathcal{E}_i della σ -algebra \mathcal{A}_i la stessa famiglia \mathcal{A}_i , allora l'ipotesi di esistenza della successione $\{E_{ik}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è ovviamente verificata (infatti, basta considerare la successione costante $\Omega_i, \Omega_i, \dots, \Omega_i, \dots$). Si ha pertanto il seguente corollario.

Corollario 20.1.1. *Siano $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ spazi misurabili. Un generatore della σ -algebra prodotto $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ è la famiglia (di sottoinsiemi di $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$)*

$$\mathcal{G} = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n\} .$$

Osservazione 20.1.3. In molti testi è proprio l'uguaglianza

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}(\mathcal{G}) ,$$

stabilita nel precedente corollario, che viene presa come definizione della σ -algebra prodotto $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$.

Esempio 20.1.5. A titolo di applicazione del Teorema 20.1.1 facciamo vedere come il risultato dell'Esempio 20.1.3 possa anche dedursi facilmente da tale teorema. Infatti, dal momento che, per ogni $h \in \mathbb{N}$, la famiglia \mathcal{I}_h degli intervalli chiusi di \mathbb{R}^h è un generatore di \mathcal{B}_h ed esistono successioni non decrescenti di insiemi appartenenti a \mathcal{I}_h aventi come limite l'intero spazio \mathbb{R}^h (ad es. $\{[-k, k]\}_{k \in \mathbb{N}}$), la (20.1.2) segue immediatamente dal Teorema 20.1.1 prendendo $\mathcal{E}_i = \mathcal{B}_{h_i}$, $i = 1, \dots, n$, e tenendo presente che, in tal caso, grazie all'identificazione di $\mathbb{R}^{h_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{h_n}$ con $\mathbb{R}^{h_1 + \dots + h_n}$, la famiglia \mathcal{E} , data dalla (20.1.3), coincide con la famiglia $\mathcal{I}_{h_1 + \dots + h_n}$ degli intervalli chiusi di $\mathbb{R}^{h_1 + \dots + h_n}$.

20.2. Il problema della misura prodotto.

Per introdurre il problema della misura prodotto è utile esaminare dapprima un caso particolare riguardante la misura di Lebesgue.

Esempio 20.2.1. Fissati, come nell'Esempio 20.1.3, gli interi positivi h_1, \dots, h_n e considerati i corrispondenti spazi di misura

$$(\mathbb{R}^{h_1}, \mathcal{B}_{h_1}, \lambda_{h_1}), \dots, (\mathbb{R}^{h_n}, \mathcal{B}_{h_n}, \lambda_{h_n}) ,$$

nonché le relative famiglie degli intervalli chiusi $\mathcal{I}_{h_1}, \dots, \mathcal{I}_{h_n}$, generatori delle σ -algre $\mathcal{B}_{h_1}, \dots, \mathcal{B}_{h_n}$, prendiamo in esame il problema di trovare una misura λ , definita sulla σ -algebra prodotto $\mathcal{B}_{h_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{h_n} = \mathcal{B}_{h_1 + \dots + h_n}$, tale da risultare

$$\lambda(I_1 \times \dots \times I_n) = \lambda_{h_1}(I_1) \cdot \dots \cdot \lambda_{h_n}(I_n)$$

qualunque siano gli intervalli $I_1 \in \mathcal{I}_{h_1}, \dots, I_n \in \mathcal{I}_{h_n}$ (tale richiesta ha perfettamente senso poiché $I_1 \times \dots \times I_n$ appartiene a $\mathcal{B}_{h_1+\dots+h_n}$).

È facile verificare che il problema posto ha un'unica soluzione, che è la misura

$$\lambda_{h_1+\dots+h_n} .$$

Infatti abbiamo già osservato che, grazie all'identificazione

$$\mathbb{R}^{h_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{h_n} = \mathbb{R}^{h_1+\dots+h_n} ,$$

la famiglia

$$\{I_1 \times \dots \times I_n : I_1 \in \mathcal{I}_{h_1}, \dots, I_n \in \mathcal{I}_{h_n}\}$$

viene a coincidere con la famiglia $\mathcal{I}_{h_1+\dots+h_n}$ degli intervalli chiusi di $\mathbb{R}^{h_1+\dots+h_n}$; inoltre, per ogni insieme $I_1 \times \dots \times I_n$ di tale famiglia, la quantità

$$\lambda_{h_1}(I_1) \cdot \dots \cdot \lambda_{h_n}(I_n)$$

non è altro che la misura elementare

$$\text{mis}_{e, h_1+\dots+h_n}(I_1 \times \dots \times I_n) .$$

Pertanto la richiesta del problema è quella di trovare una misura λ , definita sulla σ -algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^{h_1+\dots+h_n}$, che prolunga la misura elementare. Come sappiamo (Proposizione 7.2.2), l'unica misura con queste caratteristiche è $\lambda_{h_1+\dots+h_n}$.

Una formulazione generale del problema considerato nell'Esempio 20.2.1 è la seguente.

Problema 20.1.1. *Dati gli spazi di misura*

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$$

e le famiglie di insiemi $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$, generatori, rispettivamente, delle σ -algebre $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, trovare una misura μ , definita sulla σ -algebra prodotto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$, tale da risultare

$$\mu(E_1 \times \dots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(E_n)$$

qualunque siano gli insiemi $E_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_n$.

Osserviamo che il problema posto ha perfettamente senso dal momento che vale la (20.1.4).

Problema 20.1.2. *(Problema della misura prodotto).* Dati n spazi di misura

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n) ,$$

trovare una misura μ , definita sulla σ -algebra prodotto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$, tale da risultare

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_n)$$

qualunque siano gli insiemi $A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$.

=====

Teorema 20.2.2. (Unicit  della soluzione del Problema 20.2.1). *Siano dati, come nel Problema 20.2.1, gli spazi di misura*

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$$

e le famiglie di insiemi $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$, generatori, rispettivamente, delle σ -algebre $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$. Supponiamo inoltre che ognuno dei generatori \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, n$, sia \cap -stabile e contenga una successione di insiemi $\{E_{ik}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $E_{ik} \uparrow \Omega_i$ e $\mu_i(E_{ik}) < +\infty \forall k \in \mathbb{N}$. Allora il Problema (20.2.1) ha al pi  una soluzione.

Dimostrazione.

=====

Teorema 20.2.2. (Esistenza ed unicit  del prodotto di due misure σ -finite).

Siano $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ due spazi di misura, con μ_1, μ_2 misure σ -finite.

Esiste una ed una sola misura μ , definita sulla σ -algebra prodotto $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, verificante la condizione

$$(20.2.1) \quad \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 ;$$

valgono inoltre, per la misura μ , le seguenti due formule di rappresentazione:

$$\mu(Q) = \int \mu_2(Q_{\omega_1}) d\mu_1 = \int \mu_1(Q_{\omega_2}) d\mu_2 \quad \forall Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 .$$

Dimostrazione.

Definizione 20.2.2. (*Prodotto di due misure σ -finite*). Siano $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ due spazi di misura, con μ_1, μ_2 misure σ -finite. Si chiama *misura prodotto* delle due misure μ_1 e μ_2 , e si indica con il simbolo $\mu_1 \otimes \mu_2$, l'unica misura μ , definita sulla σ -algebra prodotto $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, verificante la condizione (20.2.1).

Esempio 20.2.1. Consideriamo gli spazi di misura

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda_1) \quad , \quad (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \nu) \quad ,$$

dove ν è la restrizione alla σ -algebra \mathcal{B}_1 della misura che conta i punti di \mathbb{R} (quindi μ_2 non è σ -finita) e facciamo vedere che in questo caso vi sono insiemi $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ per i quali non vale l'uguaglianza

$$\int \mu_2(Q_{\omega_1}) d\mu_1 = \int \mu_1(Q_{\omega_2}) d\mu_2 .$$

Infatti, se consideriamo l'insieme $C = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_1 = \omega_2\}$ (che appartiene alla σ -algebra prodotto $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2$ in quanto C è un insieme chiuso di \mathbb{R}^2), per tale insieme si ha:

$$C_{\omega_1} = \{\omega_1\} \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1 \quad , \quad C_{\omega_2} = \{\omega_2\} \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2 \quad ,$$

quindi

$$\mu_2(C_{\omega_1}) = 1 \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1 \quad , \quad \mu_1(C_{\omega_2}) = 0 \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2 \quad ,$$

pertanto

$$\int \mu_2(Q_{\omega_1}) d\mu_1 = +\infty \quad , \quad \int \mu_1(Q_{\omega_2}) d\mu_2 = 0 \quad .$$

Teorema 20.3.1. (Teorema di Tonelli). *Siano $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ due spazi di misura, con μ_1, μ_2 misure σ -finite, e sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ lo spazio di misura prodotto.*

Se $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una qualunque funzione \mathcal{A} -misurabile e non negativa, le due funzioni

$$\omega_1 \rightarrow \int f_{\omega_1} d\mu_2 \quad , \quad \omega_2 \rightarrow \int f_{\omega_2} d\mu_1 \quad ,$$

da Ω_1 in $\overline{\mathbb{R}}$ la prima e da Ω_2 in $\overline{\mathbb{R}}$ la seconda, sono \mathcal{A}_1 -misurabile e \mathcal{A}_2 -misurabile, rispettivamente, e risulta

$$\int f d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) d\mu_2 \quad .$$

Dimostrazione.

Teorema 20.3.2. (Teorema di Fubini). *Siano $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ due spazi di misura, con μ_1, μ_2 misure σ -finite, e sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ lo spazio di misura prodotto.*

Se $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una qualunque funzione \mathcal{A} -misurabile e $\mu_1 \otimes \mu_2$ -quasi-integrabile, allora:

i) *i due insiemi*

$$E_1 = \{\omega_1 \in \Omega_1 : f_{\omega_1} \text{ è } \mu_2\text{-quasi integrabile}\} \quad ,$$

$$E_2 = \{\omega_2 \in \Omega_2 : f_{\omega_2} \text{ è } \mu_1\text{-quasi integrabile}\}$$

appartengono, rispettivamente, alla σ -algebra \mathcal{A}_1 ed alla σ -algebra \mathcal{A}_2 e si ha

$$\mu_1(\Omega_1 \setminus E_1) = 0 \quad , \quad \mu_2(\Omega_2 \setminus E_2) = 0 \quad ;$$

ii) le due funzioni

$$\omega_1 \rightarrow \int f_{\omega_1} d\mu_2 \quad , \quad \omega_2 \rightarrow \int f_{\omega_2} d\mu_1 \quad ,$$

che, per quanto detto in i), sono definite, rispettivamente, μ_1 -quasi-ovunque in Ω_1 e μ_2 -quasi-ovunque in Ω_2 , sono \mathcal{A}_1 -misurabile e μ_1 -quasi integrabile, la prima, e \mathcal{A}_2 -misurabile e μ_2 -quasi integrabile, la seconda;

iii) risulta

$$\int f d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) d\mu_2 \quad .$$

Dimostrazione.

Esempi 20.3.1. Tutti e tre gli esempi che seguono sono ambientati nello spazio di misura prodotto

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \lambda_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda_1) \otimes (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda_1) \quad .$$

In altre parole supponiamo sempre che sia

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda_1)$$

e quindi lo spazio di misura prodotto

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$$

coincida (Esempi 20.v.n e 20.u.m) con

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \lambda_2) \quad .$$

a) Consideriamo gli insiemi (appartenenti a \mathcal{B}_2 in quanto insiemi aperti)

$$A =]-1, 0[\times \mathbb{R} \quad , \quad B =]0, 1[\times \mathbb{R}$$

e la funzione \mathcal{B}_2 -misurabile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$$

e verifichiamo che, per tale funzione, dei due integrali iterati che figurano nella tesi del teorema di Fubini

$$\int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 \quad , \quad \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) d\mu_2 \quad ,$$

vale a dire, in questo caso,

$$\int \left(\int f(x, y) dy \right) dx \quad , \quad \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy \quad ,$$

esiste solo il secondo. Infatti la funzione f_{ω_1} è la funzione costante 1 oppure -1 oppure 0, e quindi l'integrale "interno" $\int f_{\omega_1} d\mu_2$ è uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$ oppure a 0, a secondo che ω_1 appartenga a $] - 1, 0[$ oppure a $]0, 1[$ oppure a $\mathbb{R} \setminus (] - 1, 0[\cup]0, 1[)$; in altre parole si ha

$$\int f(x, y) dy = (+\infty)\mathbb{1}_{]-1, 0[}(x) + (-\infty)\mathbb{1}_{]0, 1[}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e pertanto l'integrale iterato

$$\int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx$$

non esiste, dal momento che entrambi gli integrali della parte positiva e della parte negativa sono infiniti:

$$\begin{aligned} \int \left(\int f(x, y) dy \right)^+ dx &= \int (+\infty)\mathbb{1}_{]-1, 0[}(x) dx = +\infty \quad , \\ \int \left(\int f(x, y) dy \right)^- dx &= \int (-\infty)\mathbb{1}_{]0, 1[}(x) dx = -\infty \quad . \end{aligned}$$

Invece la funzione f_{ω_2} è uguale a $\mathbb{1}_{]-1, 0[} - \mathbb{1}_{]0, 1[}$, e quindi l'integrale "interno" $\int f_{\omega_2} d\mu_1$ è uguale a zero, qualunque sia $\omega_2 \in \Omega_2$; in altri termini si ha

$$\int f(x, y) dx = \int [\mathbb{1}_{]-1, 0[}(x) - \mathbb{1}_{]0, 1[}(x)] dx = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

e quindi il secondo integrale iterato

$$\int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy$$

esiste ed è uguale a zero.

b) Consideriamo adesso gli insiemi (anche questi aperti e quindi appartenenti a \mathcal{B}_2)

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 < y < x\} \quad , \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < x + 1\}$$

e la funzione \mathcal{B}_2 -misurabile $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$g = \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_D$$

e verifichiamo che, per tale funzione, entrambi gli integrali iterati

$$\begin{aligned} \int \left(\int g_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 &= \int \left(\int g(x, y) dy \right) dx \quad , \\ \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) d\mu_2 &= \int \left(\int g(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

esistono e sono uguali a zero, mentre invece la funzione g non è λ_2 -quasi integrabile, cioè non esiste l'integrale

$$\int g d\mu_1 \otimes \mu_2 \quad .$$

Si ha infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\int g(x, y) dy = \int [\mathbb{1}_{]x-1, x[}(y) - \mathbb{1}_{]x, x+1[}(y)] dy = \lambda_1(]x-1, x[) - \lambda_1(]x, x+1[) = 0$$

e pertanto

$$\int \left(\int g(x, y) dy \right) dx = 0 \quad ;$$

analogamente risulta, per ogni $y \in \mathbb{R}$,

$$\int g(x, y) dx = \int [\mathbb{1}_{]y, y+1[}(x) - \mathbb{1}_{]y-1, y[}(x)] dx = \lambda_1(]y, y+1[) - \lambda_1(]y-1, y[) = 0$$

e pertanto

$$\int \left(\int g(x, y) dx \right) dy = 0 \quad .$$

Invece, dato che si ha

$$g^+ = \mathbb{1}_C \quad , \quad g^- = \mathbb{1}_D$$

e quindi, applicando il teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned} \int g^+ d\lambda_2 &= \int \left(\int g^+(x, y) dy \right) dx = \int \left(\int \mathbb{1}_{]x-1, x[}(y) dy \right) dx = \int 1 dx = +\infty \quad , \\ \int g^- d\lambda_2 &= \int \left(\int g^-(x, y) dy \right) dx = \int \left(\int \mathbb{1}_{]x, x+1[}(y) dy \right) dx = \int 1 dx = +\infty \quad , \end{aligned}$$

l'integrale

$$\int g d\lambda_2$$

non esiste.