2. La misura secondo Peano-Jordan.

La teoria della misura secondo Peano-Jordan è già nota agli studenti dai corsi di Analisi 1 e 2. Lo scopo principale di questo capitolo è quello di richiamarne le definizioni ed i risultati più importanti, soprattutto quelli che riguardano i plurintervalli e la loro misura elementare. La misura elementare dei plurintervalli costituisce infatti il punto di partenza, oltre che per la teoria della misura secondo Peano-Jordan, anche per la teoria della misura secondo Lebesgue, uno degli argomenti fondamentali del corso di Istituzioni di Analisi superiore.

Il capitolo ha anche un'altra finalità.

Solitamente, durante lo svolgimento dei corsi di Analisi matematica, la maggior parte delle dimostrazioni riguardanti la teoria della misura secondo Peano-Jordan, specialmente quelle che si riferiscono alla misura elementare dei plurintervalli, vengono omesse ed il professore si limita a dare una giustificazione intuitiva dei relativi enunciati. La stessa osservazione si applica, grosso modo, ai libri di testo. Cè un motivo molto semplice di ciò: si tratta, per lo più, di dimostrazioni molto "tecniche", in taluni casi alquanto laboriose, a fronte di enunciati abbastanza evidenti da un punto di vista intuitivo.

L'esposizione della teoria della misura secondo Peano-Jordan, che viene presentata in questo capitolo, è corredata delle dimostrazioni complete di tutte le proposizioni enunciate. In questo modo il capitolo diviene – ed è questo il suo secondo intendimento – un "sito" dove potere accedere a tali dimostrazioni, dando così l'opportunità a chi ne avesse la curiosità e la voglia di leggerle e studiarle.

Agli studenti di Istituzioni di Analisi superiore raccomandiamo una lettura del capitolo che sta a metà strada tra la lettura completa e quella "essenziale" (cioè limitata alle definizioni ed ai soli enunciati). Tale lettura di tipo "intermedio" – indicata anche tipograficamente – si ottiene escludendo le dimostrazioni più complicate e meno significative, riportate nelle appendici ai primi due paragrafi e scritte in carattere più piccolo. Le altre dimostrazioni, quelle per così dire "obbligatorie", costituiscono invece una buona palestra per prepararsi ai ragionamenti di approssimazione di insiemi e di misure, che molto frequentemente interverranno nella teoria della misura secondo Lebesgue.

2.1. Plurintervalli di $\mathbb{R}^h$.

Notazioni. Siano $a = (a_1, \dots, a_h)$, $b = (b_1, \dots, b_h)$ due elementi di $\mathbb{R}^h$.

Scriveremo $a \leq b$ [risp. $a < b$] per indicare che è $a_i \leq b_i$ [risp. $a_i < b_i$] per ogni $i = 1, \dots, h$.

Indicheremo inoltre con $a \wedge b$ e $a \vee b$ gli elementi di $\mathbb{R}^h$ definiti nel seguente modo:

$$a \wedge b = (\min\{a_1, b_1\}, \dots, \min\{a_h, b_h\}) \quad , \quad a \vee b = (\max\{a_1, b_1\}, \dots, \max\{a_h, b_h\}) \, .$$

Definizione 2.1.1. (*Intervalli chiusi di* $\mathbb{R}^h$). Siano $a, b \in \mathbb{R}^h$ tali che $a \leq b$. Si chiama *intervallo chiuso di* $\mathbb{R}^h$ *di estremi* a *e* b, e si indica con $[a, b]$, l'insieme costituito dagli elementi $x \in \mathbb{R}^h$ tali che $a \leq x \leq b$ (1); in altre parole, se le componenti di a e b sono:

$$a = (a_1, \ldots, a_h) \qquad \text{e} \qquad b = (b_1, \ldots, b_h) \ ,$$

l'intervallo chiuso $[a, b]$ è il prodotto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_h, b_h]$$

(di h intervalli chiusi di $\mathbb{R}$).

Se $a < b$ si dice che l'intervallo $[a, b]$ è *non degenere*; in caso contrario $[a, b]$ viene detto *degenere.*

La famiglia degli intervalli chiusi di $\mathbb{R}^h$ si indica con $\mathcal{I}_h$.

Ad esempio, nel caso $h = 2$, gli intervalli chiusi degeneri di $\mathbb{R}^2$ (identificato con l'insieme dei punti di un piano cartesiano) sono gli insiemi costituiti da un solo punto e i segmenti (chiusi) paralleli ad uno degli assi coordinati; gli intervalli non degeneri sono i rettangoli (chiusi) con i lati paralleli agli assi coordinati.

La dimostrazione della successiva Proposizione 2.1.1, semplice ma alquanto tecnica, è riportata nell'appendice al paragrafo.

Proposizione 2.1.1. *Sia* $I = [a, b]$ *un intervallo chiuso di* $\mathbb{R}^h$*. Allora:*

a) I *è un insieme chiuso di* $\mathbb{R}^h$*;*

b) I *è non degenere se e solo se* $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$*;*

c) *se* I *è non degenere, allora*

$$\overset{\circ}{I} = \{x \in \mathbb{R}^h \ : \ a < x < b\} \ ;$$

inoltre $I = \overline{\overset{\circ}{I}}$*, quindi* I *è un dominio.*

Proposizione 2.1.2. *Siano* $I = [a, b]$*,* $J = [c, d]$ *due intervalli chiusi di* $\mathbb{R}^h$*. Allora*

$$I \cap J \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad a \vee c \ \leq \ b \wedge d \ ;$$

inoltre, se $I \cap J \neq \emptyset$*, risulta*

$$I \cap J \ = \ [a \vee c \, , \, b \wedge d] \ .$$

---

(1) Ovviamente "$a \leq x \leq b$" significa "$a \leq x$ e $x \leq b$".

Dimostrazione. Se $I \cap J \neq \emptyset$ si verifica immediatamente che per ogni $x \in I \cap J$ risulta $a \vee c \leq x \leq b \wedge d$; si ha pertanto $a \vee c \leq b \wedge d$ e $I \cap J \subseteq [a \vee c, b \wedge d]$. Viceversa, se $a \vee c \leq b \wedge d$, è facile verificare che $[a \vee c, b \wedge d] \subseteq I \cap J$, quindi $I \cap J \neq \emptyset$. Inoltre, da quanto dimostrato segue subito che, se $I \cap J \neq \emptyset$, vale l'uguaglianza $I \cap J = [a \vee c\,,\, b \wedge d]$.

Definizione 2.1.2. (*Plurintervalli di* $\mathbb{R}^h$). Si chiama *plurintervallo di* $\mathbb{R}^h$ ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^h$ che è unione finita di intervalli chiusi di $\mathbb{R}^h$. Si conviene inoltre, per semplificare l'esposizione, di considerare plurintervallo di $\mathbb{R}^h$ anche l'insieme vuoto $\emptyset$.

La famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ verrà indicata con $\mathcal{P}_h$.

È molto importante per il seguito la constatazione (Teorema 2.1.1) che ogni plurintervallo non vuoto è unione finita di intervalli chiusi a due a due privi di punti interni comuni.

Per dimostrare ciò denotiamo con $\mathcal{P}_h^*$ la famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ che sono l'unione di un numero finito di intervalli chiusi a due a due privi di punti interni comuni e osserviamo che sussiste la seguente proposizione. Per la dimostrazione, che richiede l'uso di alcuni lemmi tecnici, rinviamo all'Appendice al paragrafo.

Proposizione 2.1.3. *Siano* $D, \Pi \in \mathcal{P}_h^*$ *e supponiamo che* $D \subseteq \Pi$. *Esiste* $\Pi^* \in \mathcal{P}_h^*$ *tale che*

$$\Pi \;=\; \Pi^* \cup D \qquad e \qquad \mathring{\Pi}^* \cap \mathring{D} \;=\; \emptyset \quad .$$

Teorema 2.1.1. *Ogni plurintervallo non vuoto è l'unione di un numero finito di intervalli chiusi a due a due privi di punti interni comuni.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che è

$$\mathcal{P}_h \setminus \{\emptyset\} \;\subseteq\; \mathcal{P}_h^* \,. \tag{2.1.1}$$

Indichiamo, per ogni $r \in \mathbb{N}$, con $\mathcal{P}_h^r$ la famiglia di tutti i plurintervalli $\Pi \in \mathcal{P}_h$, $\Pi \neq \emptyset$, che si possono esprimere come unione

$$\Pi \;=\; I_1 \cup \ldots \cup I_r$$

di r intervalli chiusi di $\mathbb{R}^h$. Poiché

$$\mathcal{P}_h \setminus \{\emptyset\} \;=\; \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{P}_h^r \,,$$

dimostrare la (2.1.1) equivale a dimostrare che risulta

$$\mathcal{P}_h^r \;\subseteq\; \mathcal{P}_h^* \tag{2.1.2$_r$}$$

per ogni $r \in \mathbb{N}$. Procediamo per induzione su r. Per $r = 1$ è evidente che la $(2.1.2)_1$ è verificata. Supponiamo, quindi, che sia vera la $(2.1.2)_r$ e dimostriamo che è vera pure la $(2.1.2)_{r+1}$.

Sia $\Pi \in \mathcal{P}_h^{r+1}$, cioè

$$\Pi \;=\; I_1 \,\cup\, \ldots \,\cup\, I_r \,\cup\, I_{r+1} \;,$$

con $I_1, \ldots, I_r, I_{r+1} \in \mathcal{I}_h$. Posto $D = I_1 \cup \ldots \cup I_r$, per l'ipotesi induttiva si ha $D \in \mathcal{P}_h^*$. Consideriamo $D \cap I_{r+1}$. Se $D \cap I_{r+1} = \emptyset$, allora è ovvio che $\Pi = D \cup I_{r+1}$ appartiene a $\mathcal{P}_h^*$. Se $D \cap I_{r+1} \neq \emptyset$, ragioniamo nel modo seguente. È chiaro che $D \cap I_{r+1} \in \mathcal{P}_h^*$ (si tenga presente la Proposizione 2.1.2). Per la Proposizione 2.1.3 esiste $\Pi^* \in \mathcal{P}_h^*$ tale che

$$I_{r+1} \;=\; \Pi^* \cup (D \cap I_{r+1}) \qquad \text{e} \qquad \mathring{\Pi}^* \cap \left(\overbrace{D \cap I_{r+1}}^{\circ}\right) \;=\; \emptyset \;.$$

Si ha allora

$$\Pi \;=\; D \cup I_{r+1} \;=\; D \cup \Pi^* \cup (D \cap I_{r+1}) \;=\; D \cup \Pi^*$$

e inoltre

$$\mathring{D} \cap \mathring{\Pi}^* \;=\; \emptyset \tag{2.1.3}$$

(infatti un eventuale elemento di $\mathring{D} \cap \mathring{\Pi}^*$ dovrebbe appartenere anche a

$$\mathring{D} \cap \mathring{I}_{r+1} \;=\; \overbrace{D \cap I_{r+1}}^{\circ}$$

e quindi a

$$\mathring{\Pi}^* \cap \left(\overbrace{D \cap I_{r+1}}^{\circ}\right) \;,$$

ma ciò è assurdo). Dal momento che D, Π^* appartengono a $\mathcal{P}_h^*$ e vale la (2.1.3), se ne conclude facilmente che anche $\Pi = D \cup \Pi^*$ appartiene a $\mathcal{P}_h^*$.

Teorema 2.1.2. (Proprietà della famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$). *La famiglia $\mathcal{P}_h$ dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$ ha le seguenti proprietà.*

a) $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}_h \implies \Pi_1 \cup \Pi_2 \in \mathcal{P}_h$.

b) $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}_h \implies \Pi_1 \cap \Pi_2 \in \mathcal{P}_h$.

c) *Se $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}_h$ e $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$, esiste $\Pi' \in \mathcal{P}_h$ tale che*

$$\Pi_2 \;=\; \Pi' \cup \Pi_1 \qquad e \qquad \mathring{\Pi}' \cap \mathring{\Pi}_1 \;=\; \emptyset \quad .$$

Dimostrazione. La proprietà a) è ovvia. La b) è pure banale quando $\Pi_1 = \emptyset$ o $\Pi_2 = \emptyset$; se, invece, Π_1, Π_2 sono entrambi non vuoti, quindi

$$\Pi_1 \;=\; I_1 \,\cup\, \ldots \,\cup\, I_r \quad , \quad \Pi_2 \;=\; J_1 \,\cup\, \ldots \,\cup\, J_s \;,$$

con $I_1, \dots, I_r, J_1, \dots, J_s \in \mathcal{I}_h$, allora

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \ = \ \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} (I_i \cap J_j)$$

e pertanto, ricordando la Proposizione 2.1.2, si ha $\Pi_1 \cap \Pi_2 \in \mathcal{P}_h$. Infine, la c) segue immediatamente (eccettuato il caso banale $\Pi_1 = \emptyset$) dal Teorema 2.1.1 e dalla Proposizione 2.1.3.

Appendice al n. 2.1.

Dimostrazione della Proposizione 2.1.1. Indichiamo con d la distanza euclidea. Supponiamo, inoltre, che le componenti dei punti a e b siano:

$$a \ = \ (a_1, \dots, a_h) \quad , \quad b \ = \ (b_1, \dots, b_h) \ .$$

a) Proviamo che $\mathbb{R}^h \setminus I$ è un insieme aperto. Sia $c = (c_1, \dots, c_h)$ un elemento di $\mathbb{R}^h \setminus I$. Poiché $c \notin [a, b]$ esiste un indice i, $1 \leq i \leq h$, tale che $c_i \notin [a_i, b_i]$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $c_i < a_i$. Posto $r = a_i - c_i$ e denotato con B il disco aperto di centro c e raggio r, verifichiamo che è $B \subseteq \mathbb{R}^h \setminus I$; infatti, per ogni $x = (x_1, \dots, x_h) \in B$, si ha

$$x_i \ = \ x_i - c_i + c_i \ \leq \ |x_i - c_i| + c_i \ \leq \ d(x, c) + c_i \ < \ r + c_i \ = a_i \ ,$$

quindi $x \notin [a, b]$.

b) Proviamo dapprima che, se I è non degenere, l'insieme (non vuoto) $\{x \in \mathbb{R}^h \ : \ a < x < b\}$ è contenuto in $\overset{\circ}{I}$. Sia $c = (c_1, \dots, c_h)$ un elemento di $\{x \in \mathbb{R}^h \ : \ a < x < b\}$. Si ha

$$a_i \ < \ c_i \ < \ b_i \qquad\qquad \forall i = i, \dots, h \ ,$$

quindi il numero

$$r \ = \ \min\{c_1 - a_1, \dots, c_h - a_h, b_1 - c_1, \dots, b_h - c_h\}$$

è positivo. Denotato con B il disco aperto di centro c e raggio r, verifichiamo che risulta $B \subseteq I$. Infatti, se $x = (x_1, \dots, x_h)$ è un qualsiasi punto di B, si ha

$$|x_i - c_i| \ \leq \ d(x, c) \ < \ r \qquad\qquad \forall i = i, \dots, h$$

e quindi

$$a_i \ = c_i - (c_i - a_i) \ \leq \ c_i - r \ < \ x_i \ < \ c_i + r \ \leq c_i + (b_i - c_i) \ = \ b_i \qquad \forall i = i, \dots, h \ ;$$

pertanto $x \in [a, b]$.

Viceversa, proviamo che, se $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$, risulta $a < b$ e si ha $\overset{\circ}{I} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^h \ : \ a < x < b\}$. Sia $c = (c_1, \dots, c_h)$ un elemento di $\overset{\circ}{I}$ e sia B un disco aperto di centro c contenuto nell'intervallo I; denotiamo con r il raggio di tale disco. Per ogni $i = 1, \dots, h$ i punti

$$(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i - \tfrac{r}{2}, c_{i+1}, \dots, c_h) \quad \text{e} \quad (c_1, \dots, c_{i-1}, c_i + \tfrac{r}{2}, c_{i+1}, \dots, c_h)$$

appartengono a B e quindi a I, pertanto si ha

$$a_i \;\leq\; c_i - \frac{r}{2} \;<\; c_i \;<\; c_i + \frac{r}{2} \;\leq\; b_i \;;$$

ciò prova che è $a < b$ e che c appartiene a $\{x \in \mathbb{R}^h \,:\, a < x < b\}$.

c) Supponiamo che I sia non degenere. L'uguaglianza $\overset{\circ}{I} = \{x \in \mathbb{R}^h \;:\; a < x < b\}$ segue subito da quanto provato in b). Proviamo l'uguaglianza $I = \overline{\overset{\circ}{I}}$. L'inclusione $I \supseteq \overline{\overset{\circ}{I}}$ è vera dato che I è un insieme chiuso. Verifichiamo che vale anche l'inclusione contraria. Sia $c = (c_1, \ldots, c_h)$ un elemento di I, cioè

$$c_i \;\in\; [a_i, b_i] \qquad\qquad \forall i = 1, \ldots, h \;.$$

Detto r un arbitrario numero positivo, è certamente possibile trovare, per ogni $i = 1, \ldots, h$, un numero z_i tale che

$$z_i \;\in]a_i, b_i[\qquad \text{e} \qquad |z_i - c_i| \;<\; \frac{r}{\sqrt{h}} \;.$$

Allora, considerato il punto $z = (z_1, \ldots, z_h)$, si ha

$$z \;\in\; \{x \in \mathbb{R}^h \,:\, a < x < b\} \;=\; \overset{\circ}{I}$$

e inoltre

$$d(z, c) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{h} (z_i - c_i)^2} \;<\; \sqrt{\frac{r^2}{h} + \ldots + \frac{r^2}{h}} \;=\; r \;.$$

Per l'arbitrarietà di $r > 0$ ne segue che c appartiene alla chiusura di $\overset{\circ}{I}$.

Passiamo ora ad occuparci della dimostrazione della Proposizione 2.1.3. Premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 2.1.1. *Siano $I, J \in \mathcal{I}_h$ tali che $I \subseteq J$. Esiste $\Pi^* \in \mathcal{P}_h^*$ tale che*

$$J \;=\; \Pi^* \cup I \qquad e \qquad \overset{\circ}{\Pi^*} \cap \overset{\circ}{I} \;=\; \emptyset \;.$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia:

$$I \;=\; [a, b] \quad , \quad J \;=\; [c, d] \;,$$
$$a = (a_1, \ldots, a_h) \quad , \quad b = (b_1, \ldots, b_h) \quad , \quad c = (c_1, \ldots, c_h) \quad , \quad d = (d_1, \ldots, d_h) \;.$$

Da $I \subseteq J$ segue $a, b \in J$, quindi

$$c \;\leq\; a \;\leq\; b \;\leq\; d \;,$$

cioè

$$c_i \;\leq\; a_i \;\leq\; b_i \;\leq\; d_i \;, \qquad\qquad i = 1, \ldots, h \;.$$

Per ogni $i = 1, \ldots, h$ poniamo

$$L_i^1 \;=\; [c_i, a_i] \;,\; L_i^2 \;=\; [a_i, b_i] \;,\; L_i^3 \;=\; [b_i, d_i] \;.$$

Poniamo inoltre, per ogni $(r_1, \ldots, r_h) \in \{1, 2, 3\}^h$,

$$I_{(r_1,\ldots,r_h)} \;=\; L_1^{r_1} \times \ldots \times L_h^{r_h} \;.$$

Si verifica facilmente che l'unione dei 3^h intervalli chiusi $I_{(r_1,\ldots,r_h)}$ è l'intervallo J e che

$$\overset{\circ}{I}_{(r_1,\ldots,r_h)} \cap I_{(s_1,\ldots,s_h)} \;=\; \emptyset \qquad\qquad \text{se} \;\; (r_1, \ldots, r_h) \neq (s_1, \ldots, s_h) \;;$$

si ha inoltre

$$I_{(2,\ldots,2)} \;=\; I \;.$$

Denotata con Π^* l'unione di tutti gli intervalli $I_{(r_1,\ldots,r_h)}$ con $(r_1, \ldots, r_h) \neq (2, \ldots, 2)$, è allora facile verificare che il plurintervallo Π^* ha le proprietà indicate nell'enunciato.

Lemma 2.1.2. *Siano $A, B_1, \ldots, B_r$ sottoinsiemi di uno spazio topologico S, con A aperto e $B_1, \ldots, B_r$ chiusi.*

Supponiamo che sia

$$A \cap \left(\overbrace{B_1 \cup \ldots \cup B_r}^{\circ} \right) \;\neq\; \emptyset \;\;.$$

Allora almeno uno degli insiemi

$$A \cap \overset{\circ}{B}_1 \,,\; \ldots \,,\; A \cap \overset{\circ}{B}_r$$

è diverso dall'insieme vuoto.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su r. L'asserto è ovviamente vero per $r = 1$. Dimostriamolo per $r = 2$. Supponiamo per assurdo che

$$A \cap \overset{\circ}{B}_1 \;=\; A \cap \overset{\circ}{B}_2 \;=\; \emptyset$$

e denotiamo con Ω l'aperto

$$A \cap \left(\overbrace{B_1 \cup B_2}^{\circ} \right) \,,$$

che, per ipotesi, non è vuoto. Sia x un qualsiasi punto di Ω e sia U un qualsiasi intorno aperto di x. Allora $\Omega \cap U$ è un intorno aperto di x contenuto sia in A che in $B_1 \cup B_2$. Non può essere $\Omega \cap U \subseteq B_1$ perché, altrimenti, sarebbe

$$\Omega \cap U \;\subseteq\; A \cap \overset{\circ}{B}_1$$

e quindi

$$A \cap \overset{\circ}{B}_1 \;\neq \emptyset \;;$$

per lo stesso motivo non può essere $\Omega \cap U \subseteq B_2$. Conseguentemente l'insieme $\Omega \cap U$ contiene sia punti di B_1 che punti di B_2. La stessa cosa può allora dirsi, a maggior ragione, dell'insieme U. Pertanto, dato che U è un arbitrario intorno aperto di x, si ha

$$x \in \overline{B}_1 \;=\; B_1 \quad , \quad x \in \overline{B}_2 \;=\; B_2 \;.$$

Ne segue, per l'arbitrarietà di $x \in \Omega$, che $\Omega \subseteq B_1 \cap B_2$ e quindi

$$\Omega \subseteq \overbrace{B_1 \cap B_2}^{\circ} = \overset{\circ}{B_1} \cap \overset{\circ}{B_2} \ ;$$

dato che $\Omega \subseteq A$, se ne deduce che

$$A \cap \overset{\circ}{B_1} \neq \emptyset \quad , \quad A \cap \overset{\circ}{B_2} \neq \emptyset \ ,$$

ma ciò è assurdo.

Supponiamo adesso che l'asserto sia vero per l'indice r e dimostriamo che è vero pure per l'indice $r+1$.

Siano $A, B_1, \ldots, B_r, B_{r+1}$ sottoinsiemi di S, con A aperto e $B_1, \ldots, B_r, B_{r+1}$ chiusi, tali che

$$A \cap \left(\overbrace{B_1 \cup \ldots \cup B_r \cup B_{r+1}}^{\circ} \right) \neq \emptyset \ .$$

Poiché $B_1 \cup \ldots \cup B_r$ è chiuso, per il caso $r = 2$ abbiamo che almeno uno dei due insiemi

$$A \cap \left(\overbrace{B_1 \cup \ldots \cup B_r}^{\circ} \right) \qquad \text{e} \qquad A \cap \overset{\circ}{B}_{r+1}$$

è diverso dall'insieme vuoto. Se è $A \cap \overset{\circ}{B}_{r+1} \neq \emptyset$ la tesi è ovviamente verificata; in caso contrario, essa segue subito dall'ipotesi induttiva.

Osservazione 2.1.1. Nel precedente lemma l'ipotesi che $B_1, \ldots, B_r$ siano chiusi è essenziale. Per rendersi conto di ciò basta considerare il seguente facile controesempio:

$$S = \mathbb{R} \text{ con la topologia usuale;} \qquad A = \mathbb{R} \ ; \qquad B_1 = \mathbb{Q}, \ B_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ .$$

Corollario 2.1.1. *Siano $C_1, \ldots, C_r$, $D_1, \ldots, D_s$ sottoinsiemi chiusi di uno spazio topologico S.*

Supponiamo che sia

$$\left(\overbrace{C_1 \cup \ldots \cup C_r}^{\circ} \right) \cap \left(\overbrace{D_1 \cup \ldots \cup D_s}^{\circ} \right) \neq \emptyset \ .$$

Allora almeno uno degli insiemi

$$\overset{\circ}{C_i} \cap \overset{\circ}{D_j} \ , \qquad\qquad i = 1, \ldots, r \ ; \ j = 1, \ldots, s \ ,$$

è diverso dall'insieme vuoto.

Dimostrazione. Applicando il lemma precedente all'aperto

$$A = \overbrace{C_1 \cup \ldots \cup C_r}^{\circ}$$

ed ai chiusi $D_1, \ldots, D_s$ otteniamo l'esistenza di un indice j, $1 \leq j \leq s$, tale che

$$A \cap \overset{\circ}{D}_j \neq \emptyset ;$$

possiamo pertanto applicare di nuovo il Lemma 2.1.2 all'aperto $\overset{\circ}{D}_j$ ed ai chiusi $C_1, \ldots, C_r$; dunque esiste anche i, $1 \leq i \leq r$, tale che

$$\overset{\circ}{C}_i \cap \overset{\circ}{D}_j \neq \emptyset .$$

Lemma 2.1.3. *Siano* $I \in \mathcal{I}_h$, $\Pi \in \mathcal{P}_h^*$ *tali che* $I \subseteq \Pi$. *Esiste* $\Pi^* \in \mathcal{P}_h^*$ *tale che*

$$\Pi = \Pi^* \cup I \qquad e \qquad \overset{\circ}{\Pi}{}^* \cap \overset{\circ}{I} = \emptyset .$$

Dimostrazione. Sia $\Pi = J_1 \cup \ldots \cup J_r$, con $J_1, \ldots, J_r$ intervalli chiusi a due a due privi di punti interni comuni. Per ogni $i = 1, \ldots, r$ esiste $\Pi_i' \in \mathcal{P}_h^*$ tale che

$$J_i = \Pi_i' \cup (I \cap J_i) \qquad \text{e} \qquad \overset{\circ}{\Pi}{}_i' \cap \left(\overset{\circ}{\overbrace{I \cap J_i}} \right) = \emptyset ;$$

infatti, se $I \cap J_i = \emptyset$, basta prendere $\Pi_i' = J_i$, mentre, se $I \cap J_i \neq \emptyset$ e quindi (Proposizione 2.1.2) $I \cap J_i$ è un intervallo chiuso, basta applicare il Lemma 2.1.1.

Poniamo $\Pi^* = \Pi_1' \cup \ldots \cup \Pi_r'$. Poiché $\Pi_1', \ldots, \Pi_r' \in \mathcal{P}_h^*$ e $\overset{\circ}{\Pi}{}_i' \cap \overset{\circ}{\Pi}{}_j' = \emptyset$ se $i \neq j$ (dato che $\overset{\circ}{J}{}_i' \cap \overset{\circ}{J}{}_j' = \emptyset$) si ha $\Pi^* \in \mathcal{P}_h^*$. Si ha inoltre

$$\begin{aligned} \Pi &= J_1 \cup \ldots \cup J_r = \Pi_1' \cup \ldots \cup \Pi_r' \cup (I \cap J_1) \cup \ldots \cup (I \cap J_r) = \\ &= \Pi^* \cup (I \cap (J_1 \cup \ldots \cup J_r)) = \Pi^* \cup (I \cap \Pi) = \Pi^* \cup I . \end{aligned}$$

Dimostriamo infine che $\overset{\circ}{\Pi}{}^* \cap \overset{\circ}{I} = \emptyset$. Supponiamo per assurdo che sia $\overset{\circ}{\Pi}{}^* \cap \overset{\circ}{I} \neq \emptyset$. Poiché $\Pi^* = \Pi_1' \cup \ldots \cup \Pi_r'$ e $I = (I \cap J_1) \cup \ldots \cup (I \cap J_r)$, per il Corollario 2.1.1 esistono i, j, $1 \leq i, j \leq r$, tali che

$$\overset{\circ}{\Pi}{}_i' \cap \left(\overset{\circ}{\overbrace{I \cap J_j}} \right) \neq \emptyset ;$$

dato che $\overset{\circ}{\Pi}{}_i' \subseteq \overset{\circ}{J}_i$ e che gli intervalli $J_1, \ldots, J_r$ sono a due a due privi di punti interni comuni, si ha necessariamente $i = j$, quindi

$$\overset{\circ}{\Pi}{}_i' \cap \left(\overset{\circ}{\overbrace{I \cap J_i}} \right) \neq \emptyset ,$$

ma ciò è assurdo.

Dimostrazione della Proposizione 2.1.3. Per ogni $r \in \mathbb{N}$ indichiamo con $\mathcal{P}_h^{*,r}$ la famiglia di tutti i plurintervalli $D \in \mathcal{P}_h^*$ che si possono esprimere come unione

$$D \;=\; I_1 \cup \ldots \cup I_r$$

di r intervalli chiusi di $\mathbb{R}^h$, a due a due privi di punti interni comuni. Ovviamente si ha

$$\mathcal{P}_h^* \;=\; \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{P}_h^{*,r} \;;$$

pertanto dimostrare la Proposizione 2.1.3 equivale a dimostrare che l'affermazione

$(2.1.4)_r$ "*Se* $D \in \mathcal{P}_h^{*,r}$, $\Pi \in \mathcal{P}_h^*$ *e* $D \subseteq \Pi$, *allora vale la tesi della Proposizione 2.1.3*"

è vera per ogni $r \in \mathbb{N}$. Procediamo per induzione. Per $r = 1$ l'affermazione $(2.1.4)_1$ è vera (è l'enunciato del Lemma 2.1.3). Supponiamo vera la $(2.1.4)_r$ e dimostriamo che è vera pure la $(2.1.4)_{r+1}$. Consideriamo un qualunque plurintervallo $D \in \mathcal{P}_h^{*,r+1}$ e sia

$$D \;=\; I_1 \cup \ldots \cup I_r \cup I_{r+1}$$

una rappresentazione di D come unione di $r+1$ intervalli chiusi di $\mathbb{R}^h$ a due a due privi di punti interni comuni. Sia, inoltre, $\Pi \in \mathcal{P}_h^*$ tale che $D \subseteq \Pi$. Posto

$$R \;=\; I_1 \cup \ldots \cup I_r \;,$$

per l'ipotesi induttiva esiste $R^* \in \mathcal{P}_h^*$ tale che

$$\Pi \;=\; R^* \cup R \qquad \text{e} \qquad \overset{\circ}{R^*} \cap \overset{\circ}{R} \;=\; \emptyset \;.$$

Se $\overset{\circ}{I}_{r+1} = \emptyset$, per ottenere la tesi è sufficiente prendere $\Pi^* = R^*$; si ha infatti

$$\Pi \;=\; R^* \cup R \cup I_{r+1} \;=\; \Pi^* \cup D \;;$$

inoltre, essendo

$$\overset{\circ}{\Pi^*} \cap \overset{\circ}{R} \;=\; \emptyset \qquad \text{e} \qquad \overset{\circ}{\Pi^*} \cap \overset{\circ}{I}_{r+1} \;=\; \emptyset \;,$$

il Lemma 2.1.2 assicura che è pure

$$\overset{\circ}{\Pi^*} \cap \overset{\circ}{D} \;=\; \emptyset \;.$$

Supponiamo adesso che sia $\overset{\circ}{I}_{r+1} \neq \emptyset$. In questo caso si ha $I_{r+1} \subseteq R^*$. Per dimostrare ciò osserviamo che, se x è un qualsiasi punto di $\overset{\circ}{I}_{r+1}$, risulta $x \in R^*$, perché, in caso contrario, essendo $x \in \overset{\circ}{\Pi}$, esisterebbe un intorno di x contenuto in $\overset{\circ}{\Pi} \setminus R^*$ e quindi x apparterrebbe a $\overset{\circ}{R}$, ma ciò è assurdo poiché, per il Lemma 2.1.2, si ha $\overset{\circ}{I}_{r+1} \cap \overset{\circ}{R} = \emptyset$; abbiamo così provato che

$$\overset{\circ}{I}_{r+1} \;\subseteq\; R^* \;;$$

di conseguenza, ricordando la Proposizione 2.1.1, c), si ha

$$I_{r+1} \;=\; \overline{\overset{\circ}{I}_{r+1}} \;\subseteq\; R^* \;.$$

Possiamo allora applicare il Lemma 2.1.3 all'intervallo I_{r+1} ed al plurintervallo R^*; esiste di conseguenza $\Pi^* \in \mathcal{P}_h^*$ tale che

$$R^* \;=\; \Pi^* \cup I_{r+1} \qquad \text{e} \qquad \mathring{\Pi}^* \cap \mathring{I}_{r+1} \;=\; \emptyset \;.$$

Per completare la dimostrazione osserviamo che si ha

$$\Pi \;=\; R^* \,\cup\, R \;=\; \Pi^* \,\cup\, I_{r+1} \,\cup\, R \;=\; \Pi^* \,\cup\, D$$

e inoltre

$$\mathring{\Pi}^* \cap \mathring{D} \;=\; \emptyset$$

perché, in caso contrario, per il Lemma 2.1.2 dovrebbe essere

$$\mathring{\Pi}^* \cap \mathring{R} \;\neq\; \emptyset \qquad \text{oppure} \qquad \mathring{\Pi}^* \cap \mathring{I}_{r+1} \;\neq\; \emptyset \;,$$

ma entrambe le conclusioni sono assurde.

2.2. La misura elementare dei plurintervalli.

Definizione 2.2.1. (*La misura elementare degli intervalli chiusi*). Siano $a = (a_1, \ldots, a_h)$, $b = (b_1, \ldots, b_h)$ due elementi di $\mathbb{R}^h$ tali che $a \leq b$ e sia $I = [a, b]$. Si chiama *misura elementare dell'intervallo chiuso I,* e si indica con $\mathrm{mis_e}(I)$, il numero

$$(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_h - a_h) \;.$$

Notiamo che la definizione data non è ambigua poiché, come si verifica immediatamente, da $[a, b] = [c, d]$ segue $a = c$ e $b = d$.

Si ha inoltre, ovviamente, la

Proposizione 2.2.1. *Per ogni $I \in \mathcal{I}_h$ risulta* $\mathrm{mis_e}(I) \geq 0$ *ed è* $\mathrm{mis_e}(I) = 0$ *se e solo se I è degenere.*

Il teorema che segue esprime un'importante proprietà della misura elementare degli intervalli chiusi: la proprietà di finita additività. Il significato e la validità di tale proprietà sono intuitivamente evidenti. La dimostrazione rigorosa, però, è un tantino laboriosa ed è esposta nell'appendice al paragrafo.

Teorema 2.2.1. (Finita additività della misura elementare degli intervalli chiusi). *Siano I_1, ..., I_r intervalli chiusi, a due a due privi di punti interni comuni, e supponiamo che anche la loro unione $I_1 \cup \ldots \cup I_r$ sia un intervallo chiuso I.*

Risulta allora

$$\mathrm{mis_e}(I) \;=\; \mathrm{mis_e}(I_1) \;+\; \ldots \;+\; \mathrm{mis_e}(I_r) \;. \tag{2.2.1}$$

Corollario 2.2.1. *Siano* $I_1, \ldots, I_r$, $J_1, \ldots, J_s \in \mathcal{I}_h$, *con* $I_1, \ldots, I_r$ *a due a due privi di punti interni comuni e* $J_1, \ldots, J_s$ *a due a due privi di punti interni comuni.*

Supponiamo che

$$I_1 \cup \ldots \cup I_r = J_1 \cup \ldots \cup J_s .$$

Risulta allora

$$\mathrm{mis_e}(I_1) + \ldots + \mathrm{mis_e}(I_r) = \mathrm{mis_e}(J_1) + \ldots + \mathrm{mis_e}(J_s) .$$

Dimostrazione. Per ogni indice $i = 1, \ldots, r$ si ha

$$I_i = I_i \cap (I_1 \cup \ldots \cup I_r) = I_i \cap (J_1 \cup \ldots \cup J_s) = (I_i \cap J_1) \cup \ldots \cup (I_i \cap J_s) ,$$

quindi, per il Teorema 2.2.1,

$$\mathrm{mis_e}(I_i) = \sum_j{}' \mathrm{mis_e}(I_i \cap J_j) ,$$

dove la sommatoria $\sum_j'$ è estesa a tutti gli indici j, $1 \leq j \leq s$, tali che $I_i \cap J_j \neq \emptyset$. Sommando rispetto all'indice i otteniamo

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{mis_e}(I_i) = \sum_{(i,j)}{}^{*} \mathrm{mis_e}(I_i \cap J_j) ,$$

dove la sommatoria $\sum_{(i,j)}^{*}$ è estesa a tutte le coppie di indici (i, j), $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, tali che $I_i \cap J_j \neq \emptyset$.

Scambiando i ruoli degli intervalli I_i e J_j e ripetendo il precedente ragionamento si ottiene

$$\sum_{j=1}^{s} \mathrm{mis_e}(J_j) = \sum_{(i,j)}{}^{*} \mathrm{mis_e}(I_i \cap J_j) .$$

Ciò completa la dimostrazione.

Per il Teorema 2.1.1 ed il precedente corollario ha senso porre la seguente definizione.

Definizione 2.2.2. (*Misura elementare dei plurintervalli*). Sia $\Pi \in \mathcal{P}_h \setminus \{\emptyset\}$. Si chiama *misura elementare del plurintervallo* Π, e si indica con $\mathrm{mis_e}(\Pi)$, il numero reale non negativo

$$\mathrm{mis_e}(I_1) + \ldots + \mathrm{mis_e}(I_r) ,$$

dove $\{I_1, \ldots, I_r\}$ è una qualsiasi famiglia finita di intervalli chiusi, a due a due privi di punti interni comuni, tale che

$$\Pi = I_1 \cup \ldots \cup I_r$$

e le misure

$$\mathrm{mis_e}(I_1), \ldots, \mathrm{mis_e}(I_r)$$

sono quelle introdotte con la Definizione 2.2.1.

Si pone, inoltre, per definizione,

$$\mathrm{mis_e}(\emptyset) = 0 .$$

Osservazione 2.2.1. (*Coerenza*). Il Teorema 2.2.1 assicura che, nel caso particolare in cui $\Pi = I \in \mathcal{I}_h$, la misura elementare di I, calcolata considerando I plurintervallo, cioè secondo la Definizione 2.2.2, coincide con la misura elementare precedentemente definita (Definizione 2.2.1); pertanto la Definizione 2.2.2 è coerente con la Definizione 2.2.1 ed è perfettamente giustificato il fatto che nella Definizione 2.2.2 si sia adoperato lo stesso simbolo $\mathrm{mis_e}$ della Definizione 2.1 per indicare la misura elementare dei plurintervalli.

Teorema 2.2.2. (Proprietà della misura elementare). *La misura elementare dei plurintervalli gode delle seguenti proprietà.*

a) *Se* $\Pi_1, \ldots, \Pi_k \in \mathcal{P}_h$ *sono a due a due privi di punti interni comuni, si ha*

$$\mathrm{mis_e}(\Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_k) \ = \ \mathrm{mis_e}(\Pi_1) \ + \ \ldots \ + \ \mathrm{mis_e}(\Pi_k)$$

(proprietà di finita additività).

b) *Se* $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}_h$ *sono tali che* $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$, *allora*

$$\mathrm{mis_e}(\Pi_1) \ \leq \ \mathrm{mis_e}(\Pi_2)$$

(proprietà di monotonia).

c) *Qualunque siano* $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}_h$ *risulta*

$$\mathrm{mis_e}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \ + \ \mathrm{mis_e}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \ = \ \mathrm{mis_e}(\Pi_1) \ + \ \mathrm{mis_e}(\Pi_2)$$

(proprietà di modularità).

Dimostrazione. a) Ciò segue in modo evidente dalla definizione di misura elementare di un plurintervallo.

b) Per il Teorema 2.1.2, c) esiste un plurintervallo Π^* tale che

$$\Pi_2 \ = \ \Pi^* \cup \Pi_1 \qquad \text{e} \qquad \mathring{\Pi}^* \cap \mathring{\Pi}_1 \ = \ \emptyset \ ;$$

si ha allora, per la proprietà a),

$$\mathrm{mis_e}(\Pi_2) \ = \ \mathrm{mis_e}(\Pi^*) + \mathrm{mis_e}(\Pi_1) \ \geq \ \mathrm{mis_e}(\Pi_1) \ .$$

c) Posto $D = \Pi_1 \cap \Pi_2$, per il Teorema 2.1.2, c) esistono Π', $\Pi'' \in \mathcal{P}_h$ tali che

$$\Pi_1 \ = \ \Pi' \cup D \quad , \quad \Pi_2 \ = \ \Pi'' \cup D \quad , \quad \mathring{\Pi}' \cap \mathring{D} \ = \mathring{\Pi}'' \cap \mathring{D} \ = \ \emptyset$$

e quindi, per la proprietà a),

$$\mathrm{mis_e}(\Pi_1) \ = \ \mathrm{mis_e}(\Pi') + \mathrm{mis_e}(D) \quad , \quad \mathrm{mis_e}(\Pi_2) \ = \ \mathrm{mis_e}(\Pi'') + \mathrm{mis_e}(D) \ . \tag{2.2.2}$$

D'altra parte si ha

$$\Pi_1 \cup \Pi_2 \; = \; \Pi' \cup \Pi'' \cup D \; ;$$

inoltre, dato che

$$\overset{\circ}{\Pi}{}' \cap \overset{\circ}{\Pi}{}'' \; \subseteq \; \overset{\circ}{\Pi}_1 \cap \overset{\circ}{\Pi}_2 \; = \; \overset{\circ}{D} \; ,$$

si ha pure

$$\overset{\circ}{\Pi}{}' \cap \overset{\circ}{\Pi}{}'' \; = \; \overset{\circ}{\Pi}{}' \cap \overset{\circ}{\Pi}{}'' \cap \overset{\circ}{D} \; = \; \emptyset \; ;$$

pertanto, ancora per la proprietà a),

$$\mathrm{mis_e}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \; = \; \mathrm{mis_e}(\Pi') \, + \, \mathrm{mis_e}(\Pi'') \, + \, \mathrm{mis_e}(D) \; ,$$

da cui, sostituendo a $\mathrm{mis_e}(\Pi')$ e $\mathrm{mis_e}(\Pi'')$ i valori che si ricavano dalle (2.2.2), si ottiene la tesi.

Proposizione 2.2.2. *Sia* $\Pi \in \mathcal{P}_h$. *Allora* $\mathrm{mis_e}(\Pi) = 0$ *se e solo se* $\overset{\circ}{\Pi} = \emptyset$.

Dimostrazione. Infatti, tenendo presenti la Proposizione 2.2.1 e la Proposizione 2.1.1, b), per la definizione di $\mathrm{mis_e}(\Pi)$ ed il Teorema 2.2.2, b) si ha l'equivalenza

$$\mathrm{mis_e}(\Pi) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists I \in \mathcal{I}_h \;\; \text{tale che} \;\; \overset{\circ}{I} \neq \emptyset \; , \; I \subseteq \Pi \; .$$

D'altra parte, per ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R}^h$ si ha

$$\overset{\circ}{X} \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists I \in \mathcal{I}_h \;\; \text{tale che} \;\; \overset{\circ}{I} \neq \emptyset \; , \; I \subseteq X \quad (^2) \quad .$$

Dalle due precedenti equivalenze segue, ovviamente, l'asserto.

Proposizione 2.2.3. (Proprietà di finita sub-additività della misura elementare). *Siano* $\Pi_1, \ldots, \Pi_k \in \mathcal{P}_h$. *Allora*

$$\mathrm{mis_e}(\Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_k) \; \leq \; \mathrm{mis_e}(\Pi_1) \, + \, \ldots \, + \, \mathrm{mis_e}(\Pi_k) \; .$$

Dimostrazione. Basta ragionare per induzione su k, dopo avere osservato che l'asserto è banalmente vero per $k = 1$ e segue subito dal Teorema 2.2.2, c) per $k = 2$.

---

(2) L'implicazione $\Longleftarrow$ è ovvia. Per provare la $\Longrightarrow$ osserviamo che, se $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$ e B è un disco aperto di $\mathbb{R}^h$, con la metrica euclidea, contenuto nell'insieme X, allora, denotati con $c = (c_1, \ldots, c_h)$ e r il centro ed il raggio di B e fissato $0 < \sigma < r$, si verifica facilmente che l'intervallo chiuso non degenere (e quindi dotato di punti interni) di estremi

$$a' = (c_1 - \tfrac{\sigma}{\sqrt{h}}, \ldots, c_h - \tfrac{\sigma}{\sqrt{h}}) \quad \text{e} \quad b' = (c_1 + \tfrac{\sigma}{\sqrt{h}}, \ldots, c_h + \tfrac{\sigma}{\sqrt{h}})$$

è contenuto in B e quindi in X.

Proposizione 2.2.4. (Approssimazione di intervalli chiusi). *Sia* $\Delta \in \mathcal{I}_h$. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono* $I \in \mathcal{I}_h \cup \{\emptyset\}$ *e* $J \in \mathcal{I}_h$ *tali che*

$$I \subseteq \overset{\circ}{\Delta} \quad , \quad \mathrm{mis_e}(I) \; > \; \mathrm{mis_e}(\Delta) - \varepsilon \; ,$$
$$\Delta \subseteq \overset{\circ}{J} \quad , \quad \mathrm{mis_e}(J) \; < \; \mathrm{mis_e}(\Delta) + \varepsilon \; .$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia $\Delta = [a, b]$, $a = (a_1, \ldots, a_h)$, $b = (b_1, \ldots, b_h)$.

Dimostriamo l'esistenza di I. Se Δ è degenere basta prendere $I = \emptyset$. Se Δ è non degenere, osserviamo che, posto

$$\delta \; = \; \frac{1}{2} \min \{b_i - a_i \; : \; i = 1, \ldots, h\} \; ,$$

per ogni $\sigma \in]0, \delta]$ l'intervallo chiuso

$$I_\sigma \; = \; [a_1 + \sigma, b_1 - \sigma] \times \ldots \times [a_h + \sigma, b_h - \sigma]$$

è contenuto in $\overset{\circ}{\Delta}$; si ha inoltre

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathrm{mis_e}(I_\sigma) \; = \; \mathrm{mis_e}(\Delta) \; ;$$

pertanto basta prendere $I = I_\sigma$ con σ sufficientemente prossimo a zero.

L'esistenza di J si prova analogamente, considerando gli intervalli

$$J_\sigma \; = \; [a_1 - \sigma, b_1 + \sigma] \times \ldots \times [a_h - \sigma, b_h + \sigma] \; , \qquad \sigma > 0 \; .$$

Proposizione 2.2.5. (Approssimazione di plurintervalli). *Sia* $\Pi \in \mathcal{P}_h$. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono* S, $T \in \mathcal{P}_h$ *tali che*

$$S \subseteq \overset{\circ}{\Pi} \quad , \quad \mathrm{mis_e}(S) \; > \; \mathrm{mis_e}(\Pi) - \varepsilon \; ,$$
$$\Pi \subseteq \overset{\circ}{T} \quad , \quad \mathrm{mis_e}(T) \; < \; \mathrm{mis_e}(\Pi) + \varepsilon \; .$$

Dimostrazione. Se $\Pi = \emptyset$ basta prendere $S = T = \emptyset$. Se $\Pi \neq \emptyset$, $\Pi \; = \; \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k$, con $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ intervalli chiusi a due a due privi di punti interni comuni, allora, per ogni $i = 1, \ldots, k$, grazie alla Proposizione 2.2.4, esiste $I_i \in \mathcal{I}_h \cup \{\emptyset\}$ tale che

$$I_i \subseteq \overset{\circ}{\Delta}_i \quad , \quad \mathrm{mis_e}(I_i) \; > \; \mathrm{mis_e}(\Delta_i) - \tfrac{\varepsilon}{k} \quad .$$

Posto $S \; = \; I_1 \cup \ldots \cup I_k$, si ha

$$S \subseteq \overset{\circ}{\Delta}_1 \cup \ldots \cup \overset{\circ}{\Delta}_k \subseteq \overset{\circ}{\Pi}$$

e

$$\begin{aligned} \text{mis}_\text{e}(S) \;&=\; \text{mis}_\text{e}(I_1) \,+\, \ldots \,+\, \text{mis}_\text{e}(I_k) \;> \\ >\; \text{mis}_\text{e}(\Delta_1) \,+\, \ldots \,+\, \text{mis}_\text{e}(\Delta_k) \,-\, \varepsilon \;&=\; \text{mis}_\text{e}(\Pi) \,-\, \varepsilon \;. \end{aligned}$$

Analogamente, denotato, per ogni $i = 1, \ldots, k$, con J_i un intervallo chiuso tale che

$$\Delta_i \subseteq \overset{\circ}{J}_i \quad , \quad \text{mis}_\text{e}(J_i) \;<\; \text{mis}_\text{e}(\Delta_i) + \tfrac{\varepsilon}{k}$$

e posto $T = J_1 \cup \ldots \cup J_k$, si ha

$$\Pi \subseteq \overset{\circ}{J}_1 \cup \ldots \cup \overset{\circ}{J}_k \subseteq \overset{\circ}{T}$$

e, per la Proposizione 2.2.3,

$$\begin{aligned} \text{mis}_\text{e}(T) \;&\leq\; \text{mis}_\text{e}(J_1) \,+\, \ldots \,+\, \text{mis}_\text{e}(J_k) \;< \\ <\; \text{mis}_\text{e}(\Delta_1) \,+\, \ldots \,+\, \text{mis}_\text{e}(\Delta_k) \,+\, \varepsilon \;&=\; \text{mis}_\text{e}(\Pi) \,+\, \varepsilon \;. \end{aligned}$$

Appendice al n. 2.2.

Per dimostrare il Teorema 2.2.1 abbiamo bisogno dei seguenti due lemmi.

Lemma 2.2.1. *Siano* $I, I_0, I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_h$ *tali che*

$$I \;=\; I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_k \;.$$

Se I *è non degenere e* I_0 *è degenere, allora è*

$$I \;=\; I_1 \cup \ldots \cup I_k \;.$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che è

$$I_0 \;\subseteq\; I_1 \cup \ldots \cup I_k \;.$$

Supponiamo per assurdo che esista un punto $x \in I_0 \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$ e sia B un disco aperto di centro x disgiunto dall'insieme (chiuso) $I_1 \cup \ldots \cup I_k$. Per la Proposizione 2.1.1, c) esistono punti y tali che

$$y \in \overset{\circ}{I} \cap B \;=\; \overset{\circ}{\overbrace{I \cap B}} \,,$$

dunque, essendo $I \cap B \subseteq I_0$ e quindi

$$\overset{\circ}{\overbrace{I \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{I}_0 \,,$$

l'insieme $\overset{\circ}{I}_0$ non è vuoto, ma ciò contraddice le ipotesi del lemma.

Lemma 2.2.2. *Siano I, I', I'' intervalli chiusi non degeneri tali che*

$$I \supseteq I' \cup I'' \quad , \quad \overset{\circ}{I'} \cap \overset{\circ}{I''} = \emptyset \quad .$$

Esistono allora J', $J'' \in \mathcal{I}_h$ tali che

$$J' \supseteq I' \quad , \quad J'' \supseteq I'' \qquad ; \qquad I = J' \cup J'' \quad , \quad \overset{\circ}{J'} \cap \overset{\circ}{J''} = \emptyset$$

e inoltre

$$\mathrm{mis_e}(I) = \mathrm{mis_e}(J') + \mathrm{mis_e}(J'') \; .$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia

$$\begin{gathered} I = [a,b] \quad , \quad I' = [a',b'] \quad , \quad I'' = [a'',b''] \quad , \\ a = (a_1,\ldots,a_h) \quad , \quad a' = (a'_1,\ldots,a'_h) \quad , \quad a'' = (a''_1,\ldots,a''_h) \quad , \\ b = (b_1,\ldots,b_h) \quad , \quad b' = (b'_1,\ldots,b'_h) \quad , \quad b'' = (b''_1,\ldots,b''_h) \quad . \end{gathered}$$

Poiché

$$\overset{\circ}{\overbrace{I' \cap I''}} = \overset{\circ}{I'} \cap \overset{\circ}{I''} = \emptyset \; ,$$

per le Proposizioni 2.1.2 e 2.1.1, b) non può essere $a' \vee a'' < b' \wedge b''$, dunque esiste j, $1 \leq j \leq h$, tale che

$$\max\{a'_j, a''_j\} \geq \min\{b'_j, b''_j\} \; .$$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $j = 1$ e $\max\{a'_1, a''_1\} = a''_1$, quindi $\min\{b'_1, b''_1\} = b'_1$. Detto γ un numero reale compreso tra b'_1 e a''_1 e posto

$$J' = [a_1,\gamma] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_h,b_h] \quad , \quad J'' = [\gamma,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_h,b_h] \quad ,$$

si verifica facilmente che J' e J'' soddisfano ai requisiti dell'enunciato.

Dimostrazione del Teorema 2.2.1. Procediamo per induzione su r.

Per $r = 1$ l'asserto è ovvio.

Consideriamo il caso $r = 2$. Se I è degenere, anche I_1 e I_2 sono degeneri e la (2.2.1) è verificata. Se I è non degenere e uno degli intervalli I_1 e I_2, per es I_1, è degenere, allora $I = I_2$ per il Lemma 2.2.1 e la (2.2.1) è verificata. Esaminiamo infine il caso in cui nessuno degli intervalli I, I_1 e I_2 sia degenere. Per il Lemma 2.2.2 esistono $J_1, J_2 \in \mathcal{I}_h$ tali che

$$J_1 \supseteq I_1 \quad , \quad J_2 \supseteq I_2 \qquad ; \qquad I = J_1 \cup J_2 \quad , \quad \overset{\circ}{J_1} \cap \overset{\circ}{J_2} = \emptyset \; ;$$

$$\mathrm{mis_e}(I) = \mathrm{mis_e}(J_1) + \mathrm{mis_e}(J_2) \; .$$

Pertanto, basta dimostrare che è $J_1 = I_1$, $J_2 = I_2$. Proviamo, ad esempio, la prima uguaglianza. Supponiamo, per assurdo, che esista un punto $x \in J_1 \setminus I_1$ e sia U un intorno aperto di x disgiunto da I_1; per la Proposizione 2.1.1, c) l'insieme $U \cap \overset{\circ}{J_1}$ non è vuoto; tale insieme, inoltre, è disgiunto da J_2, perché, altrimenti, sempre per la Proposizione 2.1.1, c), $U \cap \overset{\circ}{J_1}$ avrebbe punti comuni con $\overset{\circ}{J_2}$, il che è assurdo; ne segue che è

$$U \cap \overset{\circ}{J_1} \subseteq I \setminus (I_1 \cup I_2) \; ,$$

quindi $I \setminus (I_1 \cup I_2) \neq \emptyset$, ma ciò contraddice le ipotesi del lemma.

Infine, dimostriamo che, se l'asserto è vero per ogni indice $s = 1, \ldots, r$, allora esso è vero pure per l'indice $r+1$. Supponiamo quindi che l'intervallo chiuso I sia uguale all'unione $I_1 \cup \ldots \cup I_r \cup I_{r+1}$ di $r+1$ intervalli chiusi, a due a due privi di punti interni comuni. Se I è degenere, allora è ovvio che risulta

$$(2.2.1)' \qquad \mathrm{mis_e}(I) \ = \ \mathrm{mis_e}(I_1) \ + \ \ldots \ + \ \mathrm{mis_e}(I_r) \ + \ \mathrm{mis_e}(I_{r+1}) \ .$$

Se I è non degenere, ma qualcuno degli intervalli $I_1, \ldots, I_r, I_{r+1}$, ad esempio I_{r+1}, è degenere, allora, per il Lemma 2.2.1, si ha $I = I_1 \cup \ldots \cup I_r$ e, grazie all'ipotesi induttiva, la $(2.2.1)'$ è ancora verificata. Infine, se nessuno degli intervalli $I_1, \ldots, I_r, I_{r+1}$ è degenere, allora, per il Lemma 2.2.2, esistono $J_r, J_{r+1} \in \mathcal{I}_h$ tali che

$$J_r \ \supseteq \ I_r \quad , \quad J_{r+1} \ \supseteq \ I_{r+1} \quad ; \quad I \ = \ J_r \cup J_{r+1} \quad , \quad \mathring{J}_r \cap \mathring{J}_{r+1} \ = \ \emptyset \ ;$$

$$\mathrm{mis_e}(I) \ = \ \mathrm{mis_e}(J_r) \ + \ \mathrm{mis_e}(J_{r+1}) \ .$$

Osserviamo che

$$J_r \ = \ J_r \cap I \ = \ (J_r \cap I_1) \cup \ldots \cup (J_r \cap I_r) \cup (J_r \cap I_{r+1}) \ ,$$

$$J_{r+1} \ = \ J_{r+1} \cap I \ = \ (J_{r+1} \cap I_1) \cup \ldots \cup (J_{r+1} \cap I_r) \cup (J_{r+1} \cap I_{r+1}) \ .$$

Poiché gli intervalli $J_r \cap I_{r+1}$ e $J_{r+1} \cap I_r$ sono degeneri, se ne deduce, per l'ipotesi induttiva e per quanto già dimostrato nel caso dell'indice $r+1$, che

$$\mathrm{mis_e}(J_r) \ = \ \sum_i{}' \mathrm{mis_e}(J_r \cap I_i) \quad , \quad \mathrm{mis_e}(J_{r+1}) \ = \ \sum_i{}'' \mathrm{mis_e}(J_{r+1} \cap I_i)$$

dove la sommatoria $\sum_i'$ [risp. $\sum_i''$] è estesa a tutti gli indici i, $1 \leq i \leq r+1$, tali che $J_r \cap I_i \neq \emptyset$ [risp. $J_{r+1} \cap I_i \neq \emptyset$]. D'altra parte, per ogni indice $i = 1, \ldots, r, r+1$ tale che $J_r \cap I_i \neq \emptyset$ e $J_{r+1} \cap I_i \neq \emptyset$, si ha, per il caso $r = 2$,

$$\mathrm{mis_e}(I_i) \ = \ \mathrm{mis_e}(I \cap I_i) \ = \mathrm{mis_e}((J_r \cap I_i) \cup (J_{r+1} \cap I_i))) \ = \ \mathrm{mis_e}(J_r \cap I_i) \ + \ \mathrm{mis_e}(J_{r+1} \cap I_i) \ ;$$

conseguentemente si ha

$$\begin{gathered} \mathrm{mis_e}(I_1) \ + \ \ldots \ + \ \mathrm{mis_e}(I_r) \ + \ \mathrm{mis_e}(I_{r+1}) \ = \\ = \ \sum_i{}' \mathrm{mis_e}(J_r \cap I_i) \ + \ \sum_i{}'' \mathrm{mis_e}(J_{r+1} \cap I_i) \ = \ \mathrm{mis_e}(I) \end{gathered}$$

e ciò completa la dimostrazione.

2.3. La misura secondo Peano-Jordan degli insiemi limitati.

Se $X \subseteq \mathbb{R}^h$ è un insieme limitato esistono plurintervalli Π contenuti in X (sicuramente vi è $\Pi = \emptyset$) e plurintervalli Π' contenenti X (infatti dire che X è limitato vuol dire che X è contenuto in qualche disco chiuso C dello spazio $\mathbb{R}^h$, munito della metrica euclidea; ne segue facilmente che X è contenuto in qualche intervallo chiuso di $\mathbb{R}^h$ ([3])). Inoltre, per il Teorema 2.2.2, b), gli insiemi numerici costituiti dalle misure elementari dei suddetti plurintervalli, cioè gli insiemi numerici

$$\{\mathrm{mis_e}(\Pi)\ :\ \Pi \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi \subseteq X\} \quad , \quad \{\mathrm{mis_e}(\Pi')\ :\ \Pi' \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi' \supseteq X\}\ , \tag{2.3.1}$$

sono separati.

Definizione 2.3.1. (*Misurabilità e misura secondo Peano-Jordan di un insieme limitato*). Sia $X \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato. Si dice che l'insieme X è *misurabile secondo Peano-Jordan* se gli insiemi numerici (2.3.1), oltre che separati, sono anche contigui; in questo caso si chiama *misura secondo Peano-Jordan di* X, e si indica con $\mathrm{mis}(X)$, il numero reale non negativo

$$\sup\{\mathrm{mis_e}(\Pi)\ :\ \Pi \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi \subseteq X\}\ =\ \inf\{\mathrm{mis_e}(\Pi')\ :\ \Pi' \in \mathcal{P}_h\,,\, \Pi' \supseteq X\}\ .$$

Osserviamo subito che, nel caso particolare in cui l'insieme X sia esso stesso un plurintervallo, il numero $\mathrm{mis_e}(X)$ appartiene ad entrambi gli insiemi numerici (2.3.1) (quindi è il massimo del primo di tali insiemi numerici ed il minimo del secondo); di conseguenza si ha la seguente proposizione, che esprime la coerenza della misura secondo Peano-Jordan con la misura elementare.

Proposizione 2.3.1. (Misurabilità secondo Peano-Jordan dei plurintervalli). *Ogni plurintervallo di $\mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua misura secondo Peano-Jordan è uguale alla misura elementare.*

Osserviamo inoltre che dalla equivalenza

$$\overset{\circ}{X} \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \Pi \in \mathcal{P}_h \ \text{ tale che } \ \overset{\circ}{\Pi} \neq \emptyset\ ,\ \Pi \subseteq X \ ([4])$$

e dalla Proposizione 2.2.2 segue la

([3]) Infatti, denotati con $c = (c_1, \dots, c_h)$ e r il centro ed il raggio del disco C e posto

$$a\ =\ (c_1 - r, \dots, c_h - r) \quad , \quad b\ =\ (c_1 + r, \dots, c_h + r)\ ,$$

è immediato verificare che risulta $C \subseteq [a, b]$.

([4]) L'implicazione $\Longleftarrow$ è ovvia. Per provare la $\Longrightarrow$ basta ricordare che si ha l'equivalenza

$$\overset{\circ}{X} \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists I \in \mathcal{I}_h \ \text{ tale che } \ \overset{\circ}{I} \neq \emptyset\ ,\ I \subseteq X$$

(cfr. la nota ([2])).

Proposizione 2.3.2. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato, misurabile secondo Peano-Jordan. Allora* $\operatorname{mis}(X) = 0$ *se e solo se* $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$.

Infine, anche se ciò è un'ovvia conseguenza della Definizione 2.3.1 e della Proposizione 2.3.1, è utile osservare esplicitamente che la misurabilità di un insieme limitato $X \subseteq \mathbb{R}^h$ si caratterizza nel modo seguente.

Proposizione 2.3.3. (Caratterizzazione della misurabilità). *Un insieme limitato $X \subseteq \mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Peano-Jordan se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono* Π, $\Pi' \in \mathcal{P}_h$ *tali che:*

$$\Pi \subseteq X \subseteq \Pi' \quad , \quad \operatorname{mis}(\Pi') - \operatorname{mis}(\Pi) < \varepsilon \, .$$

Dimostriamo adesso il

Teorema 2.3.1. (Proprietà della famiglia degli insiemi limitati e misurabili secondo Peano-Jordan). *Siano X_1, $X_2 \subseteq \mathbb{R}^h$ due insiemi limitati, misurabili secondo Peano-Jordan. Allora ognuno degli insiemi*

$$X_1 \cup X_2 \quad , \quad X_1 \cap X_2 \quad e \quad X_1 \setminus X_2 \quad ,$$

è misurabile secondo Pean-Jordan.

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima la misurabilità di $X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2$.

Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, esistono, per ipotesi, Π_1, Π_1', Π_2, $\Pi_2' \in \mathcal{P}_h$ tali che

$$\Pi_i \subseteq X_i \subseteq \Pi_i' \quad , \quad \operatorname{mis}(\Pi_i') - \operatorname{mis}(\Pi_i) < \varepsilon \quad , \qquad i = 1, 2.$$

Per il Teorema 2.1.2, c) esistono pure Π_1^*, $\Pi_2^* \in \mathcal{P}_h$ tali che

$$\Pi_i' = \Pi_i^* \cup \Pi_i \quad , \quad \overset{\circ}{\Pi}{}_i^* \cap \overset{\circ}{\Pi}_i = \emptyset \quad , \qquad i = 1, 2 \, ,$$

e, per il Teorema 2.2.2, a), si ha

$$\operatorname{mis}(\Pi_i') = \operatorname{mis}(\Pi_i^*) + \operatorname{mis}(\Pi_i) \quad , \qquad i = 1, 2 \, ,$$

e quindi

$$\operatorname{mis}(\Pi_i^*) < \varepsilon \quad , \qquad i = 1, 2.$$

Osserviamo che

$$\Pi_1 \cup \Pi_2 \subseteq X_1 \cup X_2 \subseteq \Pi_1' \cup \Pi_2'$$

e che, grazie alla Proposizione 2.2.3, si ha

$$\begin{gathered}\operatorname{mis}(\Pi_1' \cup \Pi_2') \;=\; \operatorname{mis}(\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_1^* \cup \Pi_2^*) \;\leq \\ \leq\; \operatorname{mis}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \;+\; \operatorname{mis}(\Pi_1^*) \;+\; \operatorname{mis}(\Pi_2^*) \;<\; \operatorname{mis}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \;+\; 2\varepsilon\end{gathered}$$

e quindi

$$\operatorname{mis}(\Pi_1' \cup \Pi_2') \;-\; \operatorname{mis}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \;<\; 2\varepsilon \quad .$$

Abbiamo così provato l'esistenza di due plurintervalli

$$P \;=\; \Pi_1 \cup \Pi_2 \quad , \quad P' \;=\; \Pi_1' \cup \Pi_2'$$

tali che

$$P \subseteq X_1 \cup X_2 \subseteq P' \quad , \quad \operatorname{mis}(P') - \operatorname{mis}(P) \;<\; 2\varepsilon \; .$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ ciò prova la misurabilità di $X_1 \cup X_2$.

Osserviamo ancora che è

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \;\subseteq\; X_1 \cap X_2 \;\subseteq\; \Pi_1' \cap \Pi_2'$$

e inoltre

$$\Pi_1' \cap \Pi_2' \;=\; (\Pi_1^* \cup \Pi_1) \cap (\Pi_2^* \cup \Pi_2) \;\subseteq\; (\Pi_1 \cap \Pi_2) \cup \Pi_1^* \cup \Pi_2^* \; ;$$

ne segue (Teorema 2.2.2, b) e Proposizione 2.2.3)

$$\begin{gathered}\operatorname{mis}(\Pi_1' \cap \Pi_2') \;-\; \operatorname{mis}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \;\leq \\ \leq\; \operatorname{mis}(\Pi_1 \cap \Pi_2) + \operatorname{mis}(\Pi_1^*) + \operatorname{mis}(\Pi_2^*) \;-\; \operatorname{mis}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \;<\; 2\varepsilon \; ,\end{gathered}$$

dunque anche $X_1 \cap X_2$ è misurabile.

Dimostriamo adesso la misurabilità di $X_1 \setminus X_2$. Consideriamo, in un primo momento, il caso particolare in cui sia

$$X_1 \;=\; R \in \mathcal{P}_h \qquad \text{e} \qquad X_2 \;=\; X \;\subseteq\; \overset{\circ}{R} \; .$$

Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono Π, $\Pi' \in \mathcal{P}_h$ tali che:

$$\Pi \subseteq X \subseteq \Pi' \quad , \quad \operatorname{mis}(\Pi') \;-\; \operatorname{mis}(\Pi) \;<\; \varepsilon \; .$$

Per la Proposizione 2.2.5 esiste $\Pi'' \in \mathcal{P}_h$ tale che

$$\Pi' \;\subseteq\; \overset{\circ}{\Pi}{}'' \qquad \text{e} \qquad \operatorname{mis}(\Pi'') \;<\; \operatorname{mis}(\Pi') \;+\; \varepsilon \; .$$

Posto

$$S \;=\; \Pi'' \cap R \; ,$$

si ha

$$S \in \mathcal{P}_h \quad , \quad X \subseteq \overset{\circ}{\Pi}{}'' \cap \overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{S} \quad , \quad S \subseteq R$$

e

$$\text{mis}(S) \leq \text{mis}(\Pi'') < \text{mis}(\Pi') + \varepsilon < \text{mis}(\Pi) + 2\varepsilon \; .$$

Per il Teorema 2.1.2, c) esistono S^*, $\Pi^* \in \mathcal{P}_h$ tali che

$$R = S^* \cup S \quad , \quad \overset{\circ}{S}{}^* \cap \overset{\circ}{S} = \emptyset \, ,$$

$$S = \Pi^* \cup \Pi \quad , \quad \overset{\circ}{\Pi}{}^* \cap \overset{\circ}{\Pi} = \emptyset \, ;$$

ne segue che

$$\text{mis}(\Pi^*) = \text{mis}(S) - \text{mis}(\Pi) < 2\varepsilon \; .$$

Da

$$\Pi \subseteq X \subseteq R \quad \text{e} \quad R = S^* \cup \Pi^* \cup \Pi$$

segue facilmente

$$R \setminus X \subseteq S^* \cup \Pi^* \; .$$

Per la Proposizione 2.2.5 esiste $T \in \mathcal{P}_h$ tale che

$$T \subseteq \overset{\circ}{S}{}^* \quad \text{e} \quad \text{mis}(T) > \text{mis}(S^*) - \varepsilon \; .$$

Osserviamo che da $x \in T$ segue $x \notin X$ (altrimenti x apparterrebbe a $\overset{\circ}{S}{}^* \cap \overset{\circ}{S}$); pertanto

$$T \subseteq R \setminus X \; .$$

Infine, osserviamo che

$$\text{mis}(S^* \cup \Pi^*) - \text{mis}(T) = \text{mis}(S^*) + \text{mis}(\Pi^*) - \text{mis}(T) <$$
$$\text{mis}(S^*) + 2\varepsilon - \text{mis}(T) < 3\varepsilon \; .$$

Abbiamo così provato l'esistenza di due plurintervalli:

$$T \quad , \quad T' = S^* \cup \Pi^* \quad ,$$

tali che

$$T \subseteq R \setminus X \subseteq T' \quad , \quad \text{mis}(T') - \text{mis}(T) < 3\varepsilon \; .$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ ciò prova la misurabilità di $R \setminus X = X_1 \setminus X_2$.

Dimostriamo infine la misurabilità di $X_1 \setminus X_2$ in generale. Sia R un plurintervallo tale che

$$X_1 \cup X_2 \subseteq \overset{\circ}{R} \; .$$

Si ha, ovviamente,

$$X_1 \setminus X_2 = X_1 \cap (R \setminus X_2) \; .$$

Poiché, per quanto già dimostrato, $R \setminus X_2$ è misurabile e l'intersezione di due insiemi limitati e misurabili è misurabile, ne segue che $X_1 \setminus X_2$ è misurabile.

Ragionando per induzione si ricava facilmente il seguente corollario.

Corollario 2.3.1. *Siano $X_1, \ldots, X_k \subseteq \mathbb{R}^h$ insiemi limitati, misurabili secondo Peano-Jordan. Allora gli insiemi*

$$X_1 \cup \ldots \cup X_k \quad e \quad X_1 \cap \ldots \cap X_k$$

sono misurabili secondo Pean-Jordan.

Teorema 2.3.2. (Proprietà della misura secondo Peano-Jordan degli insiemi limitati). *La misura secondo Peano-Jordan degli insiemi limitati gode delle seguenti proprietà.*

a) *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}^h$ insiemi limitati e misurabili secondo Peano-Jordan. Se $X \subseteq Y$, allora*

$$\mathrm{mis}(X) \;\leq\; \mathrm{mis}(Y)$$

(proprietà di monotonia).

b) *Siano $X_1, \ldots, X_k \subseteq \mathbb{R}^h$ insiemi limitati e misurabili secondo Peano-Jordan, a due a due privi di punti interni comuni. Allora*

$$\mathrm{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k) \;=\; \mathrm{mis}(X_1) + \ldots + \mathrm{mis}(X_k)$$

(proprietà di finita additività).

c) *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}^h$ insiemi limitati e misurabili secondo Peano-Jordan. Allora*

$$\mathrm{mis}(X \cup Y) + \mathrm{mis}(X \cap Y) \;=\; \mathrm{mis}(X) + \mathrm{mis}(Y)$$

(proprietà di modularità).

d) *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}^h$ insiemi limitati, misurabili secondo Peano-Jordan e tali che $X \subseteq Y$. Allora*

$$\mathrm{mis}(Y \setminus X) \;=\; \mathrm{mis}(Y) - \mathrm{mis}(X)$$

(proprietà di sottrattività).

Dimostrazione. a) Segue dall'inclusione insiemistica

$$\{\mathrm{mis_e}(\Pi) \,:\, \Pi \in \mathcal{P}_h \,,\, \Pi \subseteq X\} \;\subseteq\; \{\mathrm{mis_e}(\Pi) \,:\, \Pi \in \mathcal{P}_h \,,\, \Pi \subseteq Y\} \,.$$

b) Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, esistono, per ipotesi,

$$\Pi_i \,,\, \Pi_i' \in \mathcal{P}_h \,, \qquad\qquad i = 1, \ldots, k \,,$$

tali che

$$\Pi_i \subseteq X_i \subseteq \Pi'_i \quad , \quad \mathrm{mis}(\Pi'_i) - \mathrm{mis}(\Pi_i) < \frac{\varepsilon}{k} \quad , \qquad\qquad i = 1, \dots, k\,.$$

Si ha allora, per la definizione di $\mathrm{mis}(X_i)$, $i = 1, \dots, k$,

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(\Pi_i) \le \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(X_i) \le \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(\Pi'_i) < \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(\Pi_i) + \varepsilon\ .$$

D'altra parte i plurintervalli $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ sono a due a due privi di punti interni comuni; pertanto, per il Teorema 2.2.1, a), la definizione di $\mathrm{mis}(\cup_{i=1}^{k} X_i)$ e la Proposizione 2.2.3, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(\Pi_i) &= \mathrm{mis}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} \Pi_i\Big) \le \mathrm{mis}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\Big) \le \\ &\le \mathrm{mis}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} \Pi'_i\Big) \le \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(\Pi'_i) < \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(\Pi_i) + \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Dalle due catene di disuguaglianze segue

$$\Big| \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mis}(X_i) - \mathrm{mis}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\Big) \Big| < \varepsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, la tesi.

c) Si ha

$$X \cup Y = X \cup (Y \setminus X) \qquad \text{e} \qquad X \cap (Y \setminus X) = \emptyset\ .$$

Ne segue, per la proprietà b),

$$\mathrm{mis}(X \cup Y) = \mathrm{mis}(X) + \mathrm{mis}(Y \setminus X)\ . \tag{2.3.2}$$

D'altra parte si ha pure

$$Y = (Y \cap X) \cup (Y \setminus X) \qquad \text{e} \qquad (Y \cap X) \cap (Y \setminus X) = \emptyset\ ,$$

quindi, ancora per la proprietà b),

$$\mathrm{mis}(Y) = \mathrm{mis}(Y \cap X) + \mathrm{mis}(Y \setminus X)\ . \tag{2.3.3}$$

Da (2.3.2) e (2.3.3) segue facilmente la tesi.

d) Segue dalla (2.3.2), tenendo presente che in questo caso è $X \cup Y = Y$.

Il seguente esempio dà risposta negativa alla domanda, che è abbastanza naturale porsi, se ogni insieme limitato risulti misurabile secondo Peano-Jordan.

Esempio 2.3.1. (*Un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^h$ non misurabile secondo Peano-Jordan*). Sia Δ un intervallo chiuso non degenere di $\mathbb{R}^h$ e sia $X = \Delta \cap \mathbb{Q}^h$. Si ha allora, tenendo presente che $\mathbb{Q}^h$ e $\mathbb{R}^h \setminus \mathbb{Q}^h$ sono entrambi sottoinsiemi densi di $\mathbb{R}^h$ e che Δ è un dominio,

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset \quad , \quad \overline{X} = \Delta \; .$$

Di conseguenza ogni plurintervallo $\Pi \subseteq X$ è privo di punti interni e quindi (Proposizione 2.2.2) si ha $\operatorname{mis}(\Pi) = 0$; invece, per ogni plurintervallo $\Pi' \supseteq X$ si ha

$$\Pi' = \overline{\Pi'} \supseteq \overline{X} = \Delta$$

e quindi

$$\operatorname{mis}(\Pi') \geq \operatorname{mis}(\Delta) > 0 \; .$$

In conclusione abbiamo che

$$\sup\{\operatorname{mis_e}(\Pi) \, : \, \Pi \in \mathcal{P}_h \, , \, \Pi \subseteq X\} = 0 \quad ,$$
$$\inf\{\operatorname{mis_e}(\Pi') \, : \, \Pi' \in \mathcal{P}_h \, , \, \Pi' \supseteq X\} \geq \operatorname{mis}(\Delta) > 0 \quad ,$$

dunque l'insieme X non è misurabile secondo Peano-Jordan.

Osservazione 2.3.1. Osserviamo che l'insieme $X = \Delta \cap \mathbb{Q}^h$, considerato nel precedente esempio, è unione numerabile di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan, precisamente di intervalli degeneri; infatti possiamo scrivere

$$X = \bigcup_{x \in X} \Big\{x\Big\} \; .$$

Pertanto *la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan non è chiusa rispetto all'unione numerabile.*

La proposizione seguente servirà, nel prossimo paragrafo, per mostrare la coerenza tra la definizione generale di misurabilità e di misura secondo Peano-Jordan (Definizione 2.4.1), che verrà data in quel paragrafo, e quella già introdotta in questo numero relativamente al caso degli insiemi limitati (Definizione 2.3.1).

Proposizione 2.3.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato.*

L'insieme X è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se ogni insieme $X \cap I$, con $I \in \mathcal{I}_h$, è misurabile secondo Peano-Jordan.

Se X è misurabile secondo Peano-Jordan, risulta

$$\operatorname{mis}(X) = \sup\{\operatorname{mis}(X \cap I) \, : \, I \in \mathcal{I}_h\} \; . \tag{2.3.5}$$

Dimostrazione. Se X è misurabile secondo Peano-Jordan, allora, per il Teorema 2.3.1, ogni intersezione $X \cap I$, con $I \in \mathcal{I}_h$, è misurabile secondo Peano-Jordan. Viceversa, se è vero che l'intersezione $X \cap I$ è misurabile secondo Peano-Jordan qualunque sia $I \in \mathcal{I}_h$, allora, prendendo un intervallo $J \in \mathcal{I}_h$ tale che $J \supseteq X$, quindi $X \cap J = X$, si ottiene subito che anche X è misurabile secondo Peano-Jordan.

Se X è misurabile secondo Peano-Jordan, il Teorema 2.3.2, a) assicura che il numero $\mathrm{mis}(X)$ è un maggiorante dell'insieme numerico $\{\mathrm{mis}(X \cap I) : I \in \mathcal{I}_h\}$; d'altra parte tale numero è un elemento dell'insieme (basta considerare $J \in \mathcal{I}_h$ tale che $J \supseteq X$); pertanto vale la (2.3.5).

2.4. La misura secondo Peano-Jordan in generale.

Per estendere le nozioni di misurabilità e di misura secondo Peano-Jordan dal caso degli insiemi limitati al caso generale, un modo abbastanza naturale di procedere è quello di decidere in merito alla misurabilità [ed alla misura] di un insieme X in base alla misurabilità [ed alla misura] delle intersezioni $X \cap I$ dell'insieme X con gli intervalli chiusi $I \in \mathcal{I}_h$, intersezioni che, essendo insiemi limitati, rientrano nell'ambito della teoria precedentemente svolta. Precisamente, diremo che X è misurabile secondo Peano-Jordan se tali intersezioni sono tutte misurabili e, in caso che ciò si verifichi, chiameremo misura di X l'estremo superiore delle misure delle predette intersezioni. Notiamo che tali definizioni, da un punto di vista intuitivo, sono, in un certo senso, necessarie. Infatti è naturale attendersi che, se un insieme X è misurabile, allora X sia anche "localmente" misurabile, cioè siano misurabili le intersezioni $X \cap I$ e che le misure di tali intersezioni forniscano un'approssimazione (per difetto) della misura di X via via sempre più precisa man mano che si considerano intervalli I sempre più grandi.

Definizione 2.4.1. (*La misurabilità e la misura secondo Peano-Jordan in generale*). Sia X un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^h$ (limitato o no). Si dice che l'insieme X è misurabile secondo Peano-Jordan se, comunque si consideri un intervallo chiuso $I \in \mathcal{I}_h$, l'insieme limitato $X \cap I$ risulta misurabile secondo Peano-Jordan nel senso della Definizione 2.3.1. Se X è misurabile secondo Peano-Jordan, si chiama misura secondo Peano-Jordan di X l'elemento di $[0, +\infty]$ che si ottiene considerando l'estremo superiore (in $\overline{\mathbb{R}}$) dell'insieme formato da tutte le misure – nel senso della Definizione 2.3.1 – $\mathrm{mis}(X \cap I)$, con $I \in \mathcal{I}_h$.

Osservazione 2.4.1. (*Coerenza*). Dalla Proposizione 2.3.4 segue immediatamente che, se $X \subseteq \mathbb{R}^h$ è un insieme limitato, allora X è misurabile secondo la Definizione 2.4.1 se e solo se lo è secondo la Definizione 2.3.1; inoltre, se X è misurabile, la misura di X secondo la Definizione 2.4.1 e quella secondo la Definizione 2.3.1 coincidono.

La Definizione 2.4.1 è dunque coerente con la precedente Definizione 2.3.1 relativa agli insiemi limitati. D'ora in poi possiamo quindi omettere, senza rischio di ambiguità, ogni ulteriore precisazione quando parliamo di misurabilità e di misura secondo Peano-Jordan di un insieme limitato $X \subseteq \mathbb{R}^h$ ed adoperiamo il simbolo $\mathrm{mis}(X)$ per designarne la misura.

Osserviamo inoltre che adesso la (2.3.5) vale, per definizione, per un qualunque insieme misurabile $X \subseteq \mathbb{R}^h$.

Esempi 2.4.1. a) $\mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Peano-Jordan e $\text{mis}(\mathbb{R}^h) = +\infty$.

b) $\mathbb{Q}^h$ non è misurabile secondo Peano-Jordan (cfr. l'Esempio 2.3.1).

c) Sia $\gamma \in \mathbb{R}$ e sia j un intero, $1 \le j \le h$. L'insieme

$$L \;=\; \{x = (x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h \;:\; x_j = \gamma\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan e $\text{mis}(L) = 0$. Infatti, per ogni $I \in \mathcal{I}_h$, l'insieme $L \cap I$ è o l'insieme vuoto o un intervallo degenere.

Teorema 2.4.1. (Proprietà della famiglia degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan). *Siano X_1, X_2 due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Allora ognuno degli insiemi*

$$X_1 \cup X_2 \quad , \quad X_1 \cap X_2 \quad , \quad X_1 \setminus X_2 \tag{2.4.1}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan.

Dimostrazione. Fissato un qualunque $I \in \mathcal{I}_h$, gli insiemi limitati $X_1 \cap I$ e $X_2 \cap I$ sono misurabili per ipotesi. Si ha inoltre

$$\begin{aligned}
(X_1 \cup X_2) \cap I \;&=\; (X_1 \cap I) \cup (X_2 \cap I) \;\;, \\
(X_1 \cap X_2) \cap I \;&=\; (X_1 \cap I) \cap (X_2 \cap I) \;\;, \\
(X_1 \setminus X_2) \cap I \;&=\; (X_1 \cap I) \setminus (X_2 \cap I) \;\;,
\end{aligned}$$

quindi, per il Teorema 2.3.1, ognuno dei precedenti tre insiemi è misurabile secondo Peano-Jordan. Per l'arbitrarietà di $I \in \mathcal{I}_h$ ciò prova la misurabilità degli insiemi (2.4.1).

Per induzione si ottiene subito il

Corollario 2.4.1. *Siano $X_1, \ldots, X_k \subseteq \mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Allora anche $X_1 \cup \ldots \cup X_k$ e $X_1 \cap \ldots \cap X_k$ sono misurabili secondo Peano-Jordan.*

Teorema 2.4.2. (Proprietà della misura secondo Peano-Jordan). *La misura secondo Peano-Jordan gode delle seguenti proprietà.*

a) *Siano X, $Y \subseteq \mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Se $X \subseteq Y$, allora*

$$\text{mis}(X) \;\le\; \text{mis}(Y)$$

(proprietà di monotonia).

b) *Siano $X_1, \ldots, X_k \subseteq \mathbb{R}^h$ insiemi misurabili secondo Peano-Jordan, a due a due privi di punti interni comuni. Allora*

$$\text{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k) \;=\; \text{mis}(X_1) + \ldots + \text{mis}(X_k)$$

(proprietà di finita additività).

c) *Siano* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^h$ *misurabili secondo Peano-Jordan. Allora*

$$\mathrm{mis}(X \cup Y) + \mathrm{mis}(X \cap Y) \ = \ \mathrm{mis}(X) + \mathrm{mis}(Y)$$

(proprietà di modularità).

d) *Siano* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^h$ *insiemi misurabili secondo Peano-Jordan, tali che* $X \subseteq Y$ *e* $\mathrm{mis}(X) < +\infty$. *Allora*

$$\mathrm{mis}(Y \setminus X) \ = \ \mathrm{mis}(Y) - \mathrm{mis}(X)$$

(proprietà di sottrattività).

Dimostrazione. a) Per ogni $I \in \mathcal{I}_h$ si ha $X \cap I \subseteq Y \cap I$ e quindi, per il Teorema 2.3.2, a) e la definizione di $\mathrm{mis}(Y)$,

$$\mathrm{mis}(X \cap I) \ \leq \ \mathrm{mis}(Y \cap I) \ \leq \ \mathrm{mis}(Y) \ ;$$

si ha pertanto, per la definizione di $\mathrm{mis}(X)$,

$$\mathrm{mis}(X) \ \leq \ \mathrm{mis}(Y) \ .$$

b) Se è $\mathrm{mis}(X_i) = +\infty$ per qualche $i = 1, \ldots, k$, allora, per la proprietà a), si ha pure $\mathrm{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k) = +\infty$ e la tesi è vera. Supponiamo quindi che sia $\mathrm{mis}(X_i) < +\infty$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Osserviamo che per ogni $I \in \mathcal{I}_h$ risulta

$$(X_1 \cup \ldots \cup X_k) \cap I \ = \ (X_1 \cap I) \cup \ldots \cup (X_k \cap I)$$

e quindi, per il Teorema 2.3.2, b) e la definizione di $\mathrm{mis}(X_1), \ldots, \mathrm{mis}(X_k)$, si ha

$$\mathrm{mis}((X_1 \cup \ldots \cup X_k) \cap I) \ = \ \mathrm{mis}(X_1 \cap I) + \ldots + \mathrm{mis}(X_k \cap I) \ \leq \ \mathrm{mis}(X_1) + \ldots + \mathrm{mis}(X_k) \ ;$$

pertanto, per l'arbitrarietà di $I \in \mathcal{I}_h$ e la definizione di $\mathrm{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k)$, si ha pure

$$\mathrm{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k) \ \leq \ \mathrm{mis}(X_1) + \ldots + \mathrm{mis}(X_k) \ .$$

Per dimostrare che vale anche la disuguaglianza contraria, osserviamo che, per la definizione di $\mathrm{mis}(X_1), \ldots, \mathrm{mis}(X_k)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}_h$ tali che

$$\mathrm{mis}(X_i \cap I_i) \ > \ \mathrm{mis}(X_i) - \frac{\varepsilon}{k} \ , \qquad\qquad i = 1, \ldots, k \ .$$

Denotato con Δ un intervallo chiuso di $\mathbb{R}^h$ tale che $\Delta \supseteq I_1 \cup \ldots \cup I_k$, risulta allora, per per la definizione di $\mathrm{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k)$ ed il Teorema 2.3.2, a) e b),

$$\begin{gathered} \mathrm{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k) \ \geq \ \mathrm{mis}((X_1 \cup \ldots \cup X_k) \cap \Delta) \ = \\ = \ \mathrm{mis}((X_1 \cap \Delta) \cup \ldots \cup (X_k \cap \Delta)) \ = \ \mathrm{mis}(X_1 \cap \Delta) + \ldots + \mathrm{mis}(X_k \cap \Delta) \ \geq \\ \geq \ \mathrm{mis}(X_1 \cap I_1) + \ldots + \mathrm{mis}(X_k \cap I_k) \ > \ \mathrm{mis}(X_1) + \ldots + \mathrm{mis}(X_k) - \varepsilon \end{gathered}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$\text{mis}(X_1 \cup \ldots \cup X_k) \ \geq \ \text{mis}(X_1) \ + \ldots \ + \text{mis}(X_k) \ .$$

Ciò completa la dimostrazione di b).

c) Poiché

$$\begin{aligned} X \cup Y \ &= \ X \cup (Y \setminus X) \quad , \quad X \cap (Y \setminus X) \ = \ \emptyset \ , \\ Y \ &= \ (Y \cap X) \cup (Y \setminus X) \quad , \quad (Y \cap X) \cap (Y \setminus X) \ = \ \emptyset \ , \end{aligned}$$

si ha, per la proprietà b),

$$\text{mis}(X \cup Y) \ = \ \text{mis}(X) + \text{mis}(Y \setminus X) \ , \tag{2.4.2}$$

$$\text{mis}(Y) \ = \ \text{mis}(Y \cap X) + \text{mis}(Y \setminus X) \ . \tag{2.4.3}$$

Se $\text{mis}(X) = +\infty$ oppure $\text{mis}(Y) = +\infty$, allora, per la a), è pure $\text{mis}(X \cup Y) = +\infty$ e la tesi è vera. Se $\text{mis}(X), \text{mis}(Y) < +\infty$, allora, per la a), è $\text{mis}(X \cap Y) < +\infty$, $\text{mis}(X \setminus Y) < +\infty$ e quindi, per la (2.4.2), è anche $\text{mis}(X \cup Y) < +\infty$. Pertanto (2.4.2) e (2.4.3) sono uguaglianze tra numeri; la tesi segue allora con facili calcoli.

d) Segue facilmente dalla (2.4.3).

Per completare il capitolo, osserviamo che si ha la seguente importante caratterizzazione della misurabilità secondo Peano-Jordan.

Teorema 2.4.3. *Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^h$ è misurabile secondo Peano-Jordan se e soltanto se la sua frontiera ∂X è misurabile secondo Peano-Jordan ed ha misura nulla.*

La dimostrazione del precedente teorema sarà data nel successivo capitolo 4. Si dimostrerà, anzi, un risultato più completo (Teorema 4.5.1), del quale il Teorema 2.4.3 è soltanto una parte.