19. Inclusioni tra spazi L^p.

Nel n. 15.1 abbiamo provato (Teorema 15.1.1) che, se la misura μ è finita, allora tra i corispondenti spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$ si hanno le seguenti inclusioni:

$$(*) \qquad \forall p, r \in]0, +\infty[\; : \; p < r \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}^p(\mu) \supseteq \mathcal{L}^r(\mu) \;\; ;$$

però abbiamo anche accennato al fatto che vi sono spazi di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ per i quali si ha una situazione opposta, cioè valgono le inclusioni:

$$(**) \qquad \forall p, r \in]0, +\infty[\; : \; p < r \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu) \;\; .$$

Esempio. Uno spazio di misura per cui è vera la $(**)$ è lo spazio $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, dove μ è la misura che conta i punti.

Infatti, in questo caso, dire che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{L}^p(\mu)$ equivale a dire che risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p \; < \; +\infty \;\; ;$$

ciò implica che è

$$\lim_{n \to \infty} |f(n)|^p \; = \; 0 \;\; ,$$

ovverossia

$$\lim_{n \to \infty} |f(n)| \; = \; 0 \;\; ,$$

e quindi esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f(n)| \; < \; 1 \qquad\qquad \forall n \geq \overline{n} \; ;$$

di conseguenza, se $r > p$, si ha pure

$$|f(n)|^r \; \leq \; |f(n)|^p \qquad\qquad \forall n \geq \overline{n}$$

e pertanto, tenendo presente che i valori $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, sono reali, possiamo concludere che risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^r \; < \; +\infty \;\; ,$$

dunque la funzione f appartiene anche a $\mathcal{L}^r(\mu)$.

È allora naturale chiedersi se (e come) sia possibile caratterizzare gli spazi di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ aventi la proprietà $(*)$ ovvero la $(**)$. I Teoremi 19.3.1 e 19.3.2, presentati nel n. 3 di questo capitolo, rispondono alla precedente domanda.

Più in generale ci si potrebbe interrogare sulla possibilità di trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché per una particolare coppia di esponenti $p_1, p_2 \in]0, +\infty[$, $p_1 \neq p_2$, si abbia l'inclusione $\mathcal{L}^{p_1}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$. Questa questione è però solo apparentemente più generale; infatti gli stessi Teoremi 19.3.1 e 19.3.2, sopra menzionati, mostrano che, non appena l'inclusione $\mathcal{L}^{p_1}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$ è vera per una particolare coppia di esponenti p_1, p_2, $p_1 \neq p_2$, allora lo spazio $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gode necessariamente o della proprietà $(*)$ (se $p_1 > p_2$) ovvero della $(**)$ (se $p_1 < p_2$).

Allo studio dei Teoremi 19.3.1 e 19.3.2 premettiamo, nel n. 1, alcuni fatti importanti sulla continuità delle applicazioni lineari tra spazi normati e, nel n. 2, la fondamentale osservazione che in un qualunque spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'inclusione insiemistica $\mathcal{L}^{p_1}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$ implica necessariamente la continuità dell'immersione di $\mathcal{L}^{p_1}(\mu)$ in $\mathcal{L}^{p_2}(\mu)$.

19.1. Applicazioni lineari e continue tra spazi normati.

Ricordiamo che, se X_1, X_2 sono due spazi vettoriali sullo stesso corpo scalare $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), un'*applicazione lineare* da X_1 in X_2 è un'applicazione

$$L \,:\, X_1 \,\rightarrow\, X_2$$

avente le seguenti due proprietà:

— *omogeneità* (rispetto al corpo $\mathbb{K}$):

$$\text{(o)} \qquad L(\alpha x) \;=\; \alpha L(x) \qquad \forall x \in X_1,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ ;$$

— *additività*:

$$\text{(a)} \qquad L(x_1 + x_2) \;=\; L(x_1) + L(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X_1\ .$$

Supponiamo adesso che X_1, X_2, oltre che spazi vettoriali sullo stesso corpo scalare, siano anche spazi normati:

$$(X_1, \|\ \|_1) \quad , \quad (X_2, \|\ \|_2)$$

e, considerata un'applicazione lineare L dallo spazio vettoriale X_1 nello spazio vettoriale X_2, cerchiamo di trovare condizioni affinché la L sia anche un'applicazione continua dallo spazio normato $(X_1, \|\ \|_1)$ nello spazio normato $(X_2, \|\ \|_2)$.

Si ha in proposito il seguente teorema, il quale fornisce alcune utili e importanti caratterizzazioni della continuità di un'applicazione lineare L.

Teorema 19.1.1. (Caratterizzazioni della continuità delle applicazioni lineari tra spazi normati). *Siano*

$$(X_1, \|\ \|_1)\ ,\ (X_2, \|\ \|_2)$$

due spazi lineari normati (entrambi reali o entrambi complessi) *e sia* $L : X_1 \to X_2$ *un'applicazione lineare.*

I seguenti fatti sono equivalenti:

(1) *l'applicazione* L *è continua* (in tutto X_1);

(2) *l'applicazione* L *è continua nel punto* $x_0 = 0$;

(3) *risulta*

$$\sup\left\{\|L(x)\|_2 : x \in X_1,\ \|x\|_1 \leq 1\right\}\ <\ +\infty\quad ;$$

(4) *risulta*

$$\sup\left\{\|L(x)\|_2 : x \in X_1,\ \|x\|_1 = 1\right\}\ <\ +\infty\quad ;$$

(5) *esiste una costante* $k \in [0, +\infty[$ *tale che*

$$\|L(x)\|_2\ \leq\ k\|x\|_1 \qquad \forall x \in X_1\ .$$

Dimostrazione. L'implicazione (1) $\Longrightarrow$ (2) è banale.

(2) $\Longrightarrow$ (3) . Poiché L è lineare si ha $L(0) = 0$, pertanto dire che L è continua nel punto $x_0 = 0$ vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\quad :\quad \forall x \in X_1,\ \|x\|_1\ \leq\ \delta\quad \Longrightarrow\quad \|L(x)\|_2\ <\ \varepsilon\quad .$$

Allora, fissato il numero $\varepsilon > 0$ e considerato il corrispondente δ, per ogni $x \in X_1$ tale che $\|x\|_1 \leq 1$, essendo

$$\|\delta x\|_1\ =\ \delta\|x\|_1\ \leq\ \delta\quad ,$$

si ha, per la linearità di L e le proprietà della norma,

$$\|L(x)\|_2\ =\ \left\|L\left(\frac{1}{\delta}\delta x\right)\right\|_2\ =\ \left\|\frac{1}{\delta}L\left(\delta x\right)\right\|_2\ =\ \frac{1}{\delta}\left\|L\left(\delta x\right)\right\|_2\ <\ \frac{\varepsilon}{\delta}\quad ,$$

dunque

$$\sup\left\{\|L(x)\|_2 : x \in X_1,\ \|x\|_1 \leq 1\right\}\ \leq\ \frac{\varepsilon}{\delta} <\ +\infty\quad .$$

Anche l'implicazione (3) $\Longrightarrow$ (4) è banale.

(4) $\Longrightarrow$ (5) . Posto

$$k\ =\ \sup\left\{\|L(x)\|_2 : x \in X_1,\ \|x\|_1 = 1\right\}$$

(quindi $k \in [0, +\infty[$ per l'ipotesi (4)), per ogni $x \in X_1$, $x \neq 0$, dal momento che la norma dell'elemento

$$\frac{x}{\|x\|_1} = \frac{1}{\|x\|_1}\, x$$

è uguale a uno ([1]), si ha, per la linearità di L e le proprietà della norma,

$$\|L(x)\|_2 = \left\| L\left(\|x\|_1 \frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 = \left\| \|x\|_1 L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 =$$

$$= \|x\|_1 \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \leq k\, \|x\|_1 \quad .$$

Ovviamente la disuguaglianza appena provata:

$$\|L(x)\|_2 \leq k\, \|x\|_1$$

è ancora verificata, con il segno =, quando $x = 0$; pertanto possiamo concludere che è vera la (5).

(5) $\Longrightarrow$ (1) . Dall'ipotesi (5), per la linearità di L, si deduce che risulta

$$\|L(x_1) - L(x_2)\|_2 = \|L(x_1 - x_2)\|_2 \leq k\|x_1 - x_2\|_1 \qquad \forall x_1, x_2 \in X_1 \ ,$$

dunque la funzione L è lipschitziana e quindi continua.

Osservazione 19.1.1. Osserviamo che nella precedente dimostrazione l'ipotesi di linearità di L è stata utilizzata solo per provare le implicazioni (2) $\Longrightarrow$ (3) , (4) $\Longrightarrow$ (5) (per le quali si è adoperata la proprietà di omogeneità) e (5) $\Longrightarrow$ (1) (per la quale si sono adoperate entrambe le proprietà di omogeneità e additività). Osserviamo inoltre che, ogni volta che si è fatto uso dell'omogeneità di L, in realtà si è adoperata l'omogeneità di L soltanto rispetto al corpo dei numeri reali.

Pertanto possiamo affermare che:

Il Teorema 19.1.1 continua a valere anche se l'applicazione L è è lineare da X_1, considerato spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, in X_2, considerato spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e gli spazi vettoriali di partenza X_1 e X_2 non sono necessariamente sullo stesso corpo scalare.

([1]) infatti si ha

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 = \left\|\frac{1}{\|x\|_1}\, x\right\|_1 = \frac{1}{\|x\|_1}\, \|x\|_1 = 1 \quad .$$

19.2. Continuità dell'immersione di uno spazio $\mathcal{L}^p(\mu)$ in un altro.

Così come accade negli spazi metrici, anche negli spazi semimetrici la continuità di una funzione T in un punto x_0 si può caratterizzare tramite il comportamento di T sulle successioni di elementi del suo dominio che convergono a x_0.

Per comodità dello studente riportiamo esplicitamente questo criterio di continuità, sebbene sia l'enunciato che la dimostrazione siano perfettamente analoghi a quelli riguardanti gli spazi metrici.

Teorema 19.2.1. (Continuità e successioni). *Dati gli spazi semimetrici (S_1, d_1), (S_2, d_2), supponiamo che T sia un'applicazione da S_1 in S_2 e x_0 sia un punto di S_1.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione T sia continua nel punto x_0 è che sia vera la seguente affermazione:

(C) *per ogni successione $\{x_n\}$ di elementi di S_1 tale che* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (nello spazio (S_1, d_1)) *risulta* $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$ (nello spazio (S_2, d_2)).

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supponiamo che la funzione T sia continua nel punto x_0, cioè si abbia:

(19.2.1) $\quad \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ : \ x \in S_1, \ d_1(x, x_0) \le \delta \implies d_2(T(x), T(x_0)) < \varepsilon \ ,$ [2]

e consideriamo una qualunque successione $\{x_n\}$ di elementi di S_1 tale che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ ,$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x_0) = 0 \ . \tag{19.2.2}$$

Allora, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ e considerato il corrispondente δ dato dalla (19.2.1), per la (19.2.2) esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d_1(x_n, x_0) \le \delta \qquad \forall n \ge \overline{n} \ ;$$

riepilogando abbiamo che, in corrispondenza di un qualunque $\varepsilon > 0$, esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ per il quale valgono le seguenti implicazioni:

$$n \in \mathbb{N}, \ n \ge \overline{n} \implies d_1(x_n, x_0) \le \delta \implies d_2(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon \ ,$$

dunque è vero che

$$\lim_{n\to\infty} d_2(T(x_n), T(x_0)) = 0 \ ,$$

vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) \ .$$

---

[2] Ricordando come si definisce la topologia di uno spazio semimetrico (cfr. il n. 15.3), è facile provare che la (19.2.1) è condizione necessaria e sufficiente per la continuità della funzione T nel punto x_0.

La condizione è sufficiente. Supponiamo, per assurdo, che la funzione T non sia continua nel punto x_0, cioè non valga la (19.2.1); esiste allora un numero $\overline{\varepsilon} > 0$ avente la proprietà che:

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists x^* \in S_1 \quad : \quad d_1(x^*, x_0) \leq \delta \quad \text{ma} \quad d_2(T(x^*), T(x_0)) \ \geq \ \overline{\varepsilon} \ \ .$$

Ne segue (prendendo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$) l'esistenza di una successione $\{x_n\}$ di elementi di S_1 tale che:

$$d_1(x_n, x_0) \ \leq \ \frac{1}{n} \quad , \quad d_2(T(x_n), T(x_0) \ \geq \ \overline{\varepsilon} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Si ha allora, in (S_1, d_1),

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ = \ x_0 \ \ ;$$

invece, nello spazio (S_2, d_2), non è vero che

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) \ = \ T(x_0) \ \ .$$

Questa conclusione è però assurda in quanto contraddice l'ipotesi (C).

Per la caratterizzazione degli spazi di misura che hanno la proprietà (*), ovvero la proprietà (**), è di importanza fondamentale l'osservazione – notevole anche di per sè – che, ogni qual volta che sussiste l'inclusione insiemistica $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$, allora la corrispondente "immersione", o "applicazione di inclusione", di $\mathcal{L}^p(\mu)$ in $\mathcal{L}^r(\mu)$, è continua.

Per immersione di $\mathcal{L}^p(\mu)$ in $\mathcal{L}^r(\mu)$ – nell'ipotesi che sia $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$ – si intende l'applicazione

$$i \ : \ \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}^r(\mu)$$

definita ponendo

$$i(f) \ = \ f \qquad\qquad \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) \ .$$

Teorema 19.2.2. (Continuità dell'immersione di $\mathcal{L}^p(\mu)$ in $\mathcal{L}^r(\mu)$). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che esistano due esponenti $p, r \in]0, +\infty[$ per i quali è vera l'inclusione insiemistica*

$$\mathcal{L}^p(\mu) \ \subseteq \ \mathcal{L}^r(\mu) \ \ .$$

Allora l'immersione di $\mathcal{L}^p(\mu)$ in $\mathcal{L}^r(\mu)$ è un'applicazione continua dallo spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$ nello spazio semimetrico $(\mathcal{L}^r(\mu), d_r)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 19.2.1 è sufficiente dimostrare che, se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^p(\mu)$, convergente in media di ordine p verso una funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, allora si ha pure $i(f_n) \to i(f)$ in $\mathcal{L}^r(\mu)$, cioè $\{f_n\}$ converge a f anche in media di ordine r. Utilizziamo a tale scopo la caratterizzazione della convergenza in media data dal Teorema 16.5.1.

Se $\{f_n\}$ converge in media di ordine p verso f, allora, per il Teorema 16.5.1 (parte necessaria), è vero che:

"Per ogni successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, esistono una successione $\{f_{n_{k_r}}\}$, estratta da $\{f_{n_k}\}$, ed una funzione $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, di classe L^p, tali che:

$$f_{n_{k_r}} \to f \quad \mu\text{-q.o.} \qquad , \qquad \left|f_{n_{k_r}}\right| \leq g \qquad \forall r \in \mathbb{N} \ . \text{ "}$$

Usando l'ipotesi $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$ è facile provare che la funzione g, oltre che di classe L^p, è anche di classe L^r; infatti, per il Teorema 13.8.2, si ha

$$|g| < +\infty \quad \mu\text{-q.o.} \ ,$$

quindi, posto

$$h = g\mathbb{1}_{\{|g|<+\infty\}} \ ,$$

risulta

$$h = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

e inoltre

$$h \in \mathcal{L}^p(\mu) \ ;$$

di conseguenza, grazie all'ipotesi $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$, si ha pure

$$h \in \mathcal{L}^r(\mu)$$

e pertanto la funzione g è anche di classe L^r.

A questo punto possiamo affermare che:

"Per ogni successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, esistono una successione $\{f_{n_{k_r}}\}$, estratta da $\{f_{n_k}\}$, ed una funzione $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, di classe L^r, tali che:

$$f_{n_{k_r}} \to f \quad \mu\text{-q.o.} \qquad , \qquad \left|f_{n_{k_r}}\right| \leq g \qquad \forall r \in \mathbb{N} \ . \text{ "}$$

Per il Teorema 16.5.1 (parte sufficiente) possiamo allora concludere che la successione $\{f_n\}$ converge verso f in media di ordine r. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

Vogliamo adesso estendere il precedente teorema dagli spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$ agli spazi $L^p(\mu)$.

Cominciamo con un'osservazione riguardante le classi di equivalenza individuate da un stessa funzione f in due spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$ con esponenti diversi.

Osservazione 19.2.1. Supponiamo che f sia una funzione appartenente sia allo spazio $\mathcal{L}^p(\mu)$ che allo spazio $\mathcal{L}^r(\mu)$ ($p, r \in]0, +\infty[$, $p \neq r$).

La funzione f individua allora sia una classe di equivalenza in $\mathcal{L}^p(\mu)$:

$$f^{\sim,p} = \{f_1 \in \mathcal{L}^p(\mu) \ : \ f_1 = f \quad \mu\text{-q.o.}\} \ ,$$

elemento di di $L^p(\mu)$, che una classe di equivalenza in $\mathcal{L}^r(\mu)$:

$$f^{\sim,r} \quad = \quad \{f_1 \in \mathcal{L}^r(\mu) \ : \ f_1 = f \quad \mu\text{-q.o.}\} \quad ,$$

elemento di di $L^r(\mu)$.

Osserviamo però che, per il Teorema 13.8.1, risulta

$$\{f_1 \in \mathcal{L}^p(\mu) \ : \ f_1 = f \quad \mu\text{-q.o.}\} \quad = \quad \{f_1 \in M(\mathcal{A}) \ : \ f_1 = f \quad \mu\text{-q.o.}\}$$

e, analogamente,

$$\{f_1 \in \mathcal{L}^r(\mu) \ : \ f_1 = f \quad \mu\text{-q.o.}\} \quad = \quad \{f_1 \in M(\mathcal{A}) \ : \ f_1 = f \quad \mu\text{-q.o.}\} \quad ,$$

dunque si ha l'uguaglianza insiemistica

$$f^{\sim,p} \quad = \quad f^{\sim,r} \quad .$$

Notazione. Se f è una funzione appartenente a qualche spazio $\mathcal{L}^p(\mu)$, la precedente osservazione giustifica l'uso di un unico simbolo $\widetilde{f}$, indipendente dall'esponente p, per indicare la classe di equivalenza della funzione f in uno qualsiasi degli spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$ di cui la f fa parte.

Proposizione 19.2.1. *Per ogni spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ed ogni coppia di esponenti $p, r \in]0, +\infty[$ vale l'equivalenza:*

$$\mathcal{L}^p(\mu) \ \subseteq \ \mathcal{L}^r(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad L^p(\mu) \ \subseteq \ L^r(\mu) \quad .$$

Dimostrazione. $\Longrightarrow$. Consideriamo un qualsiasi elemento di $L^p(\mu)$; esso è una classe di equivalenza $\widetilde{f}$ (in $\mathcal{L}^p(\mu)$) individuata da una funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$; poiché, per ipotesi, si ha $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$, la funzione f appartiene pure a $\mathcal{L}^r(\mu)$ e possiamo quindi concludere, per quanto detto nella precedente Osservazione 19.2.1, che la sua classe di equivalenza $\widetilde{f}$ è anche elemento di $L^r(\mu)$.

$\Longleftarrow$. Consideriamo una qualsiasi funzione f, elemento di $\mathcal{L}^p(\mu)$; la sua classe di equivalenza $\widetilde{f}$ appartiene a $L^p(\mu)$; pertanto, dato che per ipotesi vale l'inclusione $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$, la classe di equivalenza $\widetilde{f}$ appartiene anche a $L^r(\mu)$; ne segue, ovviamente, che la funzione f è pure elemento di $\mathcal{L}^r(\mu)$.

Teorema 19.2.2$'$. (Continuità dell'immersione di $L^p(\mu)$ in $L^r(\mu)$). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che esistano due esponenti $p, r \in]0, +\infty[$ per i quali è vera l'inclusione insiemistica*

$$L^p(\mu) \ \subseteq \ L^r(\mu) \quad .$$

Allora l'immersione di $L^p(\mu)$ in $L^r(\mu)$ è un'applicazione continua dallo spazio metrico $(L^p(\mu), d_p^*)$ nello spazio metrico $(L^r(\mu), d_r^*)$.

Dimostrazione. Utilizziamo di nuovo il Teorema 19.2.1. Dobbiamo provare che, se $\{\widetilde{f}_n\}$ è una successione di classi di equivalenza, elementi di $L^p(\mu)$, convergente in $L^p(\mu)$ alla classe di equivalenza $\widetilde{f}$, allora la $\{\widetilde{f}_n\}$ converge a $\widetilde{f}$ anche in in $L^r(\mu)$.

Poiché $(L^p(\mu), d_p^*)$ è lo spazio metrico associato allo spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$, dire che

$$\widetilde{f}_n \ \rightarrow \ \widetilde{f} \qquad\qquad \text{in} \ \ (L^p(\mu), d_p^*)$$

equivale a dire che

$$f_n \ \rightarrow \ f \qquad\qquad \text{in} \ \ (\mathcal{L}^p(\mu), d_p) \ \ ;$$

d'altra parte, per la Proposizione 19.2.1 ed il Teorema 19.2.2, l'immersione di $\mathcal{L}^p(\mu)$ in $\mathcal{L}^r(\mu)$ è un'applicazione continua dallo spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$ nello spazio semimetrico $(\mathcal{L}^r(\mu), d_r)$ e quindi, per il Teorema 19.2.1 (parte necessaria), si ha

$$f_n \ \rightarrow \ f \qquad\qquad \text{in} \ \ (\mathcal{L}^r(\mu), d_r) \ \ ;$$

conseguentemente, dato che $(L^r(\mu), d_r^*)$ è lo spazio metrico associato allo spazio semimetrico $(\mathcal{L}^r(\mu), d_r)$, si ha pure

$$\widetilde{f}_n \ \rightarrow \ \widetilde{f} \qquad\qquad \text{in} \ \ (L^r(\mu), d_r^*) \ \ ,$$

come dovevamo dimostrare.

19.3. Caratterizzazione dell'inclusione tra due spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Teorema 19.3.1. (Caratterizzazione dell'inclusione $\mathcal{L}^p(\mu) \supseteq \mathcal{L}^r(\mu)$, $p < r$). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e denotata con $\mathcal{A}_{\backslash\infty}$ la sottofamiglia di $\mathcal{A}$ costituita dagli insiemi di misura finita:*

$$\mathcal{A}_{\backslash\infty} \ = \ \{A \in \mathcal{A} \ : \ \mu(A) < +\infty\} \ \ ,$$

i seguenti fatti sono equivalenti:

$$(\overline{*}) \qquad\qquad \exists\, \overline{p}, \overline{r} \in]0, +\infty[\ , \ \overline{p} < \overline{r} \quad : \quad \mathcal{L}^{\overline{p}}(\mu) \supseteq \mathcal{L}^{\overline{r}}(\mu) \ \ ;$$

$$(\mathrm{A}_{\backslash\infty}) \qquad\qquad \sup\left\{\mu(A) \ : \ A \in \mathcal{A}_{\backslash\infty}\right\} \ < \ +\infty \ \ ;$$

$$(*) \qquad\qquad \forall\, p, r \in]0, +\infty[\, : \ p < r \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}^p(\mu) \supseteq \mathcal{L}^r(\mu) \ \ .$$

Dimostrazione. $(\overline{*}) \Longrightarrow (\mathrm{A}_{\backslash\infty})$. Osserviamo come prima cosa che, se per qualche coppia di esponenti $p, r \in]0, +\infty[$ è vera l'inclusione $\mathcal{L}^p(\mu) \supseteq \mathcal{L}^r(\mu)$, allora si ha pure

$$\mathcal{L}^{pt}(\mu) \ \supseteq \ \mathcal{L}^{rt}(\mu) \qquad\qquad \forall t \in]0, +\infty[\ ;$$

infatti, se è vero che $\mathcal{L}^p(\mu) \supseteq \mathcal{L}^r(\mu)$, allora per ogni funzione $f \in M(\mathcal{A})$ si hanno le implicazioni

$$f \in \mathcal{L}^{rt}(\mu) \iff |f|^t \in \mathcal{L}^r(\mu) \implies |f|^t \in \mathcal{L}^p(\mu) \iff f \in \mathcal{L}^{pt}(\mu) \quad .$$

Possiamo pertanto supporre che gli esponenti $\overline{p}, \overline{r}$, che esistono in virtù dell'ipotesi $(\overline{*})$, siano entrambi maggiori o uguali a uno (in caso contrario basta rimpiazzare la coppia di esponenti $\overline{p}, \overline{r}$ con la coppia $\overline{p}t, \overline{r}t$ con $t \geq 1/\overline{p}$).

Per la Proposizione 19.2.1 si ha pure $L^{\overline{p}}(\mu) \supseteq L^{\overline{r}}(\mu)$ e inoltre l'immersione di $L^{\overline{r}}(\mu)$ in $L^{\overline{p}}(\mu)$ è continua (Teorema 19.2.2′); di conseguenza, dato che $L^{\overline{r}}(\mu)$ e $L^{\overline{p}}(\mu)$ sono spazi normati, per il Teorema 19.1.1 esiste una costante $k \in [0, +\infty[$ tale che

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{\overline{p}}(\mu)} \leq k \left\|\tilde{f}\right\|_{L^{\overline{r}}(\mu)} \qquad \forall \tilde{f} \in L^{\overline{r}}(\mu) \ ,$$

ovverossia, ricordando la definizione della norma degli spazi $L^p(\mu)$, $p \geq 1$,

$$\left(\int |f|^{\overline{p}} \, d\mu\right)^{1/\overline{p}} \leq k \left(\int |f|^{\overline{r}} \, d\mu\right)^{1/\overline{r}} \qquad \forall f \in \mathcal{L}^{\overline{r}}(\mu) \ .$$

Allora, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $0 < \mu(A) < +\infty$, prendendo $f = \mathbb{1}_A$ nella precedente disuguaglianza, si ottiene

$$\big[\mu(A)\big]^{1/\overline{p}} \leq k \big[\mu(A)\big]^{1/\overline{r}} \quad ,$$

cioè

$$\big[\mu(A)\big]^{(\overline{r}-\overline{p})/(\overline{p}\,\overline{r})} \leq k$$

e quindi, dato che $(\overline{r} - \overline{p})/(\overline{p}\,\overline{r}) > 0$,

$$\mu(A) \leq k^{\overline{p}\,\overline{r}/(\overline{r}-\overline{p})} \quad .$$

Quest'ultima disuguaglianza è ovviamente soddisfatta anche dagli insiemi $A \in \mathcal{A}$ che hanno misura nulla, pertanto possiamo concludere che è

$$\sup\big\{\mu(A) \ : \ A \in \mathcal{A}_{\setminus\infty}\big\} \leq k^{\overline{p}\,\overline{r}/(\overline{r}-\overline{p})} < +\infty \quad .$$

$(\mathrm{A}_{\setminus\infty}) \implies (*)$. Siano $p, r \in]0, +\infty[$ due qualsiasi esponenti tali che $p < r$. Proviamo che una qualunque funzione $f \in \mathcal{L}^r(\mu)$ appartiene pure a $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Consideriamo, a tale scopo, gli insiemi

$$E_n = \left\{\tfrac{1}{n+1} \leq |f| < \tfrac{1}{n}\right\} \quad , \qquad n \in \mathbb{N} \ ,$$

ed osserviamo che, per la disuguaglianza di Čebičev, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(A_n) \ \le \ \mu\left(\left\{|f| \ge \tfrac{1}{n+1}\right\}\right) \ \le \ (n+1)^r \int |f|^r \, d\mu \ < \ +\infty \ ;$$

di conseguenza, per la finita sub-additività di μ, anche gli insiemi

$$E_1 \cup \ldots \cup E_n \ , \qquad\qquad n \in \mathbb{N} \ ,$$

hanno misura finita, cioè appartengono a $\mathcal{A}_{\setminus\infty}$. È allora facile provare che risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ < \ +\infty \ .$$

Si ha infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ = \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \big[\mu(E_1) \ + \ \ldots \ + \ \mu(E_n)\big] \ =$$

(dato che gli insiemi E_n, $n \in \mathbb{N}$, sono a due a due disgiunti)

$$= \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_1 \cup \ldots \cup E_n) \ \le \ \sup\big\{\mu(A) \ : \ A \in \mathcal{A}_{\setminus\infty}\big\} \ < \ +\infty \ .$$

Proviamo che è $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Si ha infatti

$$|f|^p \ = \ |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|>0\}} \ = \ |f|^p \left(\mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}} + \mathbb{1}_{\{|f|\ge 1\}}\right) \ ,$$

pertanto

$$\int |f|^p \, d\mu \ = \ \int |f|^p \mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}} \, d\mu \ + \ \int |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|\ge 1\}} \, d\mu \ ;$$

si ha inoltre

$$|f|^p \mathbb{1}_{\{|f|\ge 1\}} \ \le \ |f|^r \mathbb{1}_{\{|f|\ge 1\}}$$

e quindi

$$\int |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|\ge 1\}} \, d\mu \ \le \ \int |f|^r \mathbb{1}_{\{|f|\ge 1\}} \, d\mu \ \le \ \int |f|^r \, d\mu \ < \ +\infty \ ;$$

infine, dato che gli insiemi E_n, $n \in \mathbb{N}$, sono a due a due disgiunti ed hanno per unione l'insieme $\{0 < |f| < 1\}$, si ha

$$\int |f|^p \mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}} \, d\mu \ = \ \int |f|^p \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \ =$$

(per il teorema di integrazione per serie)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int |f|^p \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \ \leq$$

(dato che $|f|^p \mathbb{1}_{E_n} \leq \frac{1}{n^p} \mathbb{1}_{E_n}$)

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{n^p} \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mu(E_n) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ < \ +\infty \ .$$

$(*) \implies (\overline{*})$. Ciò è ovvio.

Teorema 19.3.2. (Caratterizzazione dell'inclusione $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$, $p < r$). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, con $\mu(\Omega) > 0$ (³), e denotata con $\mathcal{A}_{\setminus 0}$ la sottofamiglia di $\mathcal{A}$ costituita dagli insiemi di misura positiva:*

$$\mathcal{A}_{\setminus 0} \ = \ \{A \in \mathcal{A} \ : \ \mu(A) > 0\} \quad ,$$

i seguenti fatti sono equivalenti:

$(\overline{**})$ $$\exists \, \overline{p}, \overline{r} \in]0, +\infty[\ , \ \overline{p} < \overline{r} \quad : \quad \mathcal{L}^{\overline{p}}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^{\overline{r}}(\mu) \quad ;$$

$(\mathrm{A}_{\setminus 0})$ $$\inf \left\{ \mu(A) \ : \ A \in \mathcal{A}_{\setminus 0} \right\} \ > \ 0 \quad ;$$

$(**)$ $$\forall \, p, r \in]0, +\infty[\ : \ p < r \qquad \implies \qquad \mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu) \quad .$$

Dimostrazione. $(\overline{**}) \implies (\mathrm{A}_{\setminus 0})$. Come nel precedente teorema possiamo supporre che gli esponenti $\overline{p}, \overline{r}$, che esistono in virtù dell'ipotesi $(\overline{**})$, siano entrambi maggiori o uguali a uno (in caso contrario basta rimpiazzare la coppia di esponenti $\overline{p}, \overline{r}$ con la coppia $\overline{p}t, \overline{r}t$ con $t \geq 1/\overline{r}$)). Di conseguenza, ragionando ancora come nel teorema precedente, esiste una costante $k \in [0, +\infty[$ tale che

$$\left\| \tilde{f} \right\|_{L^{\overline{r}}(\mu)} \quad \leq \quad k \left\| \tilde{f} \right\|_{L^{\overline{p}}(\mu)} \qquad\qquad \forall \tilde{f} \in L^{\overline{p}}(\mu) \ ,$$

ovverossia

$$\left(\int |f|^{\overline{r}} \, d\mu \right)^{1/\overline{r}} \quad \leq \quad k \left(\int |f|^{\overline{p}} \, d\mu \right)^{1/\overline{p}} \qquad\qquad \forall f \in \mathcal{L}^{\overline{p}}(\mu) \ ;$$

(³) Se $\mu(\Omega) > 0$ o, più generalmente, se ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ ha misura uguale a zero oppure a $+\infty$, allora tutti gli spazi $L^p(\mu)$, $p \in]0, +\infty[$, contengono soltanto l'elemento zero (Proposizione 15.4.2) e pertanto tutti gli spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p \in]0, +\infty[$, sono uguali.

ciò implica in particolare che, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $0 < \mu(A) < +\infty$, risulta

$$\big[\mu(A)\big]^{1/\overline{r}} \ \leq\ k\,\big[\mu(A)\big]^{1/\overline{p}} \quad ,$$

cioè

$$\big[\mu(A)\big]^{(\overline{p}-\overline{r})/(\overline{p}\,\overline{r})} \quad \leq\ k$$

e quindi, dato che $(\overline{p}-\overline{r})/(\overline{p}\,\overline{r}) < 0$,

$$\mu(A) \ \geq\ k^{(\overline{p}\,\overline{r})/(\overline{p}-\overline{r})} \quad .$$

Quest'ultima disuguaglianza è ovviamente soddisfatta anche dagli insiemi $A \in \mathcal{A}$ che hanno misura uguale a $+\infty$, pertanto possiamo concludere che è

$$\inf\big\{\mu(A) \ :\ A \in \mathcal{A}_{\setminus 0}\big\} \ \geq\ k^{(\overline{p}\,\overline{r})/(\overline{p}-\overline{r})} \ >\ 0 \quad .$$

$(\mathrm{A}_{\setminus 0}) \implies (**)$. Siano $p, r \in]0, +\infty[$ due qualsiasi esponenti tali che $p < r$. Proviamo che una qualunque funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ appartiene pure a $\mathcal{L}^r(\mu)$.

Consideriamo, a tale scopo, gli insiemi

$$A_n \ =\ \{|f| \geq n\} \quad , \qquad\qquad n \in \mathbb{N} ,$$

ed osserviamo che, per la disuguaglianza di Čebičev, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(A_n) \ \leq\ \frac{1}{n^p}\int |f|^p \, d\mu$$

e quindi, dato che l'integrale al secondo membro è finito,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ =\ 0 \quad . \tag{19.3.1}$$

Ciò comporta che gli insiemi A_n, $n \in \mathbb{N}$ non possono avere tutti misura positiva, perché, in caso contrario, $\{A_n\}$ sarebbe una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}_{\setminus 0}$ e pertanto risulterebbe, per la (19.3.1),

$$\inf\big\{\mu(A) \ :\ A \in \mathcal{A}_{\setminus 0}\big\} \ =\ 0 \quad ,$$

in contraddizione con l'ipotesi $(\mathrm{A}_{\setminus 0})$. Esiste quindi $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_{\overline{n}}) = 0$, cioè

$$|f| \ <\ \overline{n} \quad \mu\text{-q.o.} \quad ;$$

ne segue che μ-quasi-ovunque in Ω risulta

$$|f|^q \ =\ |f|^{r-p}|f|^p \ \leq\ \overline{n}^{r-p}|f|^p$$

e conseguentemente si ha

$$\int |f|^q \, d\mu \ \leq \ \overline{n}^{r-p} \int |f|^p \, d\mu \ < \ +\infty \quad .$$

$(**) \implies (\overline{**})$. Ciò è ovvio.

I due teoremi precedenti implicano, ovviamente, il seguente corollario.

Corollario 19.3.1. (Vari casi dell'inclusione tra spazi $\mathcal{L}^p$). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un qualunque spazio di misura.*

Si verifica una delle seguenti eventualità:

(1) $\quad \mathcal{L}^p(\mu) \ = \ \mathcal{L}^r(\mu) \qquad \forall\, p, r \in]0, +\infty[\quad ;$

(2) $\quad \mathcal{L}^p(\mu) \underset{\neq}{\supset} \mathcal{L}^r(\mu) \qquad \forall\, p, r \in]0, +\infty[\ ,\ \ p < r \quad ;$

(3) $\quad \mathcal{L}^p(\mu) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}^r(\mu) \qquad \forall\, p, r \in]0, +\infty[\ ,\ \ p < r \quad ;$

(4) $\quad \mathcal{L}^p(\mu) \not\subseteq \mathcal{L}^r(\mu) \qquad \forall\, p, r \in]0, +\infty[\ ,\ \ p \neq r \quad .$

Esempi 19.3.1. Per avere un esempio per ciascuna delle precedenti eventualità (1) – (4) possiamo considerare i seguenti spazi di misura:

(1) $\quad (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$, dove Ω è un insieme finito e μ è la misura che conta i punti;

(2) $\quad ([0,1], [0,1] \cap \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_{[0,1]})$, dove $\mathrm{m}_{[0,1]}$ è la restrizione della misura di Lebesgue m_1 alla σ-algebra $[0,1] \cap \mathcal{L}_1$;

(3) $\quad (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$, dove Ω è un insieme infinito e μ è la misura che conta i punti;

(4) $\quad (\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$.