18. Caratterizzazione della convergenza in media: il teorema di Vitali.

Abbiamo già incontrato, nel corso del Capitolo 16, alcune condizioni necessarie e sufficienti affinché una successione $\{f_n\}$ di funzioni reali misurabili sia convergente in media di ordine p. Abbiamo infatti provato che lo spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$ è completo e pertanto una prima condizione caratteristica di convergenza in media di ordine p è che le funzioni f_n, $n \in \mathbb{N}$, siano tutte di classe L^p e costituiscano una successione di Cauchy di $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$, cioè:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \int |f_n - f_m|^p \, d\mu \ < \ \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \overline{n} \ .$$

Un'altra condizione caratteristica, che si esprime tramite la convergenza dominata di opportune successioni estratte, è quella del Teorema 16.5.1.

In questo capitolo presentiamo un'ulteriore notevole condizione necessaria e sufficiente di convergenza in media; si tratta della condizione fornita dal successivo Teorema 18.2.1, che viene detto teorema di Vitali, secondo un uso consolidato ma non propriamente corretto (cfr., in proposito, l'Osservazione 18.2.3). Questa nuova condizione non fa intervenire la semimetrica d_p (come la condizione di Cauchy) né fa ricorso all'esistenza di opportune successioni estratte aventi determinate proprietà (come la condizione del Teorema 16.5.1).

Prima di illustrare il teorema di Vitali, ricordiamo che, se una successione $\{f_n\}$ converge in media di ordine p, allora la $\{f_n\}$ converge in misura (Proposizione 16.8.3); ricordiamo inoltre che, per una qualunque funzione reale misurabile f, il fatto che f sia di classe L^p equivale al fatto che la misura con densità $|f|^p\mu$ sia assolutamente continua secondo Caccioppoli rispetto a μ (Proposizioni 17.6.1 e 17.6.2).

Dopo queste premesse la condizione prevista dal teorema di Vitali appare abbastanza naturale. Il teorema di Vitali asserisce infatti che la successione $\{f_n\}$ converge in media di ordine p se e soltanto se si verificano le seguenti due circostanze:

— la successione $\{f_n\}$ converge in misura;

— la proprietà di essere assolutamente continua secondo Caccioppoli rispetto a μ è posseduta da tutte le misure $|f_n|^p\mu$, $n \in \mathbb{N}$, in maniera "uniforme" rispetto all'indice n.

I concetti di "assoluta continuità (secondo Vitali o secondo Caccioppoli) uniforme" – ovvero, con termine di uso più frequente, di "equi-assoluta continuità"– per un insieme di misure con segno vengono precisati e studiati nel n. 1. Il n. 2 è invece dedicato all'esposizione del teorema di Vitali e di alcune sue varianti, conseguenze e casi particolari.

Il n. 3, infine, riguarda un'altra caratterizzazione della convergenza in media, che si deduce dal teorema di Vitali ed è di più facile applicazione rispetto alle condizioni già viste:

una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^p(\mu)$ converge in media di ordine p verso una funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ se e soltanto se f_n converge a f in misura e si ha inoltre

$$(\#) \qquad \lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \ = \ \int |f|^p \, d\mu \quad .$$

Notiamo che, se $p \geq 1$, la precedente relazione di limite può anche scriversi, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$$

donde il nome di *condizione di convergenza delle norme* abitualmente dato alla (#).

18.1. Equi-assoluta continuità.

Le due osservazioni che seguono costituiscono un'utile introduzione ai concetti di equi-assoluta continuità; inoltre la seconda di esse verrà adoperata in alcune delle dimostrazioni dei paragrafi sucessivi.

Osservazione 18.1.1. Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che

$$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$$

sia un insieme finito di misure con segno definite sulla σ-algebra $\mathcal{A}$, ognuna assolutamente continua secondo Vitali rispetto a μ:

$$\varphi_i \overset{\mathrm{V}}{<\!<} \mu \qquad \forall i = 1, \dots, k \ .$$

Allora, assegnato un qualunque numero $\varepsilon > 0$, per ogni $i = 1, \dots, k$ è possibile trovare un altro numero $\delta_i > 0$ tale che

$$A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A) \leq \delta_i \implies |\varphi_i(A)| \leq \varepsilon \ ;$$

pertanto, posto

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\} \ ,$$

risulta $\delta > 0$ e si hanno le implicazioni

$$A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A) \leq \delta \implies A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A) \leq \delta_i \ \ \forall i = 1, \dots, k \implies$$

$$\implies |\varphi_i(A)| \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, k \ .$$

Abbiamo così provato che, nel caso di un insieme finito Φ di misure con segno definite su $\mathcal{A}$, tutte assolutamente continue secondo Vitali rispetto a μ, vale la proprietà:

(e.V.) $\qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A) \leq \delta \implies |\varphi(A)| \leq \varepsilon \quad \forall \varphi \in \Phi \ .$

Il successivo esempio mostra che, se l'insieme Φ è infinito, non è necessariamente verificata la (e.V.).

Esempio 18.1.1. Nello spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ consideriamo l'insieme di misure con densità

$$\Phi \;=\; \left\{ n\mathbb{1}_{[0,1]}\mathrm{m}_1 \;:\; n \in \mathbb{N} \right\} \;.$$

Essendo

$$\int n\mathbb{1}_{[0,1]}\, d\mathrm{m}_1 \;=\; n \;<\; +\infty \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}\;,$$

si ha (Proposizione 17.6.1)

$$\varphi \overset{\mathrm{C}}{<\!\!<} \mu \qquad\qquad \forall \varphi \in \Phi$$

e quindi, a maggior ragione,

$$\varphi \overset{\mathrm{V}}{<\!\!<} \mu \qquad\qquad \forall \varphi \in \Phi\;.$$

Tuttavia, assegnato $\varepsilon > 0$, non è possibile trovare $\delta > 0$ tale da aversi

$$\mu(A) \le \delta \quad\Longrightarrow\quad |\varphi(A)| \le \varepsilon \quad \forall \varphi \in \Phi \;.$$

Infatti, qualunque sia il numero $\delta > 0$ che si considera, posto $A = [0, \frac{\delta}{2}]$, si ha

$$A \in \mathcal{L}_1 \quad , \quad \mathrm{m}_1(A) \;<\; \delta \;\;,$$

mentre, d'altra parte, indicato con γ il $\min\{1, \frac{\delta}{2}\}$, risulta

$$\big(n\mathbb{1}_{[0,1]}\mathrm{m}_1\big)(A) \;=\; n\,\mathrm{m}_1(A \cap [0,1]) \;=\; n\gamma \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi si ha

$$|\varphi(A)| \;>\; \varepsilon$$

per infiniti elementi φ dell'insieme Φ.

Un'osservazione analoga alla precedente vale anche per l'assoluta continuità secondo Caccioppoli.

Osservazione 18.1.2. Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia

$$\Phi \;=\; \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$$

un insieme finito di misure con segno su $\mathcal{A}$, ognuna assolutamente continua rispetto a μ secondo Caccioppoli:

$$\varphi_i \overset{\mathrm{C}}{<\!\!<} \mu \qquad\qquad \forall i = 1, \ldots, k\;.$$

Allora, assegnato un qualunque numero $\varepsilon > 0$, per ogni $i = 1, \ldots, k$ è possibile trovare un numero $\delta_i > 0$ ed un insieme $L_i \in \mathcal{A}$, con $\mu(L_i) < +\infty$, tali che

$$A \in \mathcal{A} \quad , \quad \mu(A \cap L_i) \leq \delta_i \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_i(A)| \leq \varepsilon \quad ;$$

di conseguenza, posto

$$\delta \;=\; \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\} \quad , \quad L \;=\; L_1 \cup \ldots \cup L_k \quad ,$$

si ha $\delta > 0$, $L \in \mathcal{A}$, $\mu(L) < +\infty$ e valgono le implicazioni

$$A \in \mathcal{A} \quad , \quad \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathcal{A} \quad , \quad \mu(A \cap L_i) \leq \delta_i \quad \forall i = 1, \ldots, k \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |\varphi_i(A)| \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k \quad .$$

Abbiamo così provato che un qualunque insieme finito Φ di misure con segno definite su $\mathcal{A}$, tutte assolutamente continue rispetto a μ secondo Caccioppoli, ha la seguente proprietà:

(e.C.) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ , \ \exists L \in \mathcal{A} \ , \ \mu(L) < +\infty \quad : \quad A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(A)| \leq \varepsilon \quad \forall \varphi \in \Phi \quad .$$

Se l'insieme Φ è infinito, non è necessariamente verificata la (e.C.). Per convincersi di ciò basta considerare nuovamente l'Esempio 18.1.1.

Le considerazioni che precedono motivano le seguenti definizioni.

Definizione 18.1.1. (*Equi-assoluta continuità secondo Vitali*). Siano $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e Φ un insieme di misure con segno definite sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Si dice che *l'insieme Φ è equi-assolutamente continuo* (o che *le misure $\varphi \in \Phi$ sono equi-assolutamente continue*) *secondo Vitali rispetto alla misura μ* se è verificata la proprietà (e.V.).

Definizione 18.1.2. (*Equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli*). Siano $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e Φ un insieme di misure con segno definite sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Si dice che *l'insieme Φ è equi-assolutamente continuo* (o che *le misure $\varphi \in \Phi$ sono equi-assolutamente continue*) *secondo Caccioppoli rispetto alla misura μ* se è verificata la proprietà (e.C.).

Osservazione 18.1.3. Dalle definizioni date risulta evidente che, se l'insieme Φ è equi-assolutamente continuo secondo Vitali [risp. Caccioppoli] rispetto a μ, allora per ognuna delle misure con segno $\varphi \in \Phi$ si ha

$$\varphi \overset{\mathrm{V}}{<<} \mu \quad [\text{risp. } \ \varphi \overset{\mathrm{C}}{<<} \mu] \quad .$$

Come abbiamo precedentemente osservato (Esempio 18.1.1), non è vero il viceversa.

Osservazione 18.1.4. È facile constatare che l'equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli implica quella secondo Vitali (per provare che dalla proprietà (e.C.) segue la (e.V.) basta assumere, in quest'ultima, come numero $\delta > 0$ lo stesso δ che esiste in virtù della (e.C.)), mentre il viceversa non è vero (per convincersi di ciò basta considerare un insieme Φ costituito da una sola misura con segno φ assolutamente continua rispetto a μ secondo Vitali ma non secondo Caccioppoli). Però, se la misura μ è finita, è vero anche che dall'equi-assoluta continuità secondo Vitali segue quella secondo Caccioppoli (basta prendere, nella (e.C.), come numero $\delta > 0$ lo stesso δ che esiste in virtù della (e.V.) e come insieme $L \in \mathcal{A}$, con $\mu(L) < +\infty$, l'intero insieme Ω).

Il successivo Esempio 18.1.2 mostra che, anche nel caso in cui ciascuna delle misure con segno φ, che costituiscono l'insieme Φ, sia assolutamente continua secondo Caccioppoli rispetto alla misura μ, non è vero, in generale, che dall'equi-assoluta continuità secondo Vitali dell'insieme Φ segue l'equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli.

Esempio 18.1.2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ e sia Φ l'insieme di misure con densità

$$\Phi \;=\; \left\{ \tfrac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]} \mathrm{m}_1 \;:\; n \in \mathbb{N} \right\} \;.$$

Si ha

$$\int \tfrac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]} \, d\mathrm{m}_1 \;=\; 1 \;<\; +\infty \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi (Proposizione 17.6.1)

$$\varphi \overset{\mathrm{C}}{<\!<} \mu \qquad\qquad \forall \varphi \in \Phi \;.$$

Si ha inoltre, come è immediato verificare,

$$0 \;\le\; \varphi \;\le\; \mu \qquad\qquad \forall \varphi \in \Phi$$

$\big($infatti $\big(\frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]} \mathrm{m}_1\big)(A) = \frac{1}{n}\, \mathrm{m}_1(A \cap [0,n]) \le \mathrm{m}_1(A)\,\big)$ e da ciò segue facilmente che l'insieme Φ è equi-assolutamente continuo secondo Vitali rispetto a m_1 (per verificare la validità della (e.V.) basta prendere $\delta \le \varepsilon$).

Invece non c'è l'equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli. Infatti, se $L \in \mathcal{L}_1$ è tale che $\mathrm{m}_1(L) < +\infty$, allora, dato che

$$L \cap \left[\tfrac{n}{2}, +\infty\right[\;\downarrow\; \emptyset \;\;,$$

per la proprietà di $\emptyset$-continuità risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}_1\big(L \cap \left[\tfrac{n}{2}, +\infty\right[\big) \;=\; 0$$

e quindi, qualunque sia $\delta > 0$, per n sufficientemente grande si ha

$$\mathrm{m}_1\big(L \cap \left[\tfrac{n}{2}, +\infty\right[\big) \;\le\; \delta \;\;.$$

D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\left(\tfrac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}\mathrm{m}_1\right)\left(\left[\tfrac{n}{2},+\infty\right[\right) \;=\; \tfrac{1}{n}\mathrm{m}_1\left(\left[\tfrac{n}{2},n\right]\right) \;=\; \tfrac{1}{2} \quad .$$

Ne segue facilmente (prendendo $\varepsilon < \frac{1}{2}$) che la (e.C.) non può essere verificata.

Osservazione 18.1.5. Osserviamo che la successione di funzioni

$$\left\{\tfrac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}\right\} \quad , \tag{18.1.1}$$

considerata nel precedente esempio, converge uniformemente in $\mathbb{R}$ verso la funzione identicamente nulla; di conseguenza la (18.1.1) converge verso la funzione identicamente nulla sia m_1-q.o. che in m_1-misura. Allora la mancanza dell'equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli può anche stabilirsi per mezzo del successivo Teorema 18.2.2, ovvero del successivo Teorema 18.2.3, osservando che si ha

$$\int \tfrac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}\, d\mu \;=\; 1 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi non è vero che la successione (18.1.1) converge in media di ordine 1 verso la funzione identicamente nulla.

Proposizione 18.1.1. (Condizione sufficiente di equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\mathcal{F}$ un insieme di funzioni $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabili e μ-quasi-integrabili.*

Condizione sufficiente affinché l'insieme di misure con segno

$$\Phi \;=\; \{f\mu \;:\; f \in \mathcal{F}\}$$

sia equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ è che esista una funzione $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, di classe L^1, tale da aversi, per ogni $f \in \mathcal{F}$,

$$|f| \;\le\; g \qquad \mu\text{-q.o.} \tag{18.1.2}$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 17.6.1 si ha

$$g\mu \overset{\mathrm{C}}{<\!<} \mu \quad ,$$

cioè

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \;\;,\;\; \exists L \in \mathcal{A}\;,\; \mu(L) < +\infty \quad &: \\ A \in \mathcal{A} \;\;,\;\; \mu(A\cap L) \le \delta \quad &\Longrightarrow \quad |(g\mu)(A)| \le \varepsilon \;\;;\end{aligned}$$

di conseguenza per ogni funzione $f \in \mathcal{F}$, tenendo presente che per la (18.1.2) la f è μ-integrabile (Proposizione 15.1.1), risulta, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A \cap L) \leq \delta$,

$$|(f\mu)(A)| \;=\; \left|\int f \mathbb{1}_A \, d\mu\right| \;\leq$$

(per la Proposizione 13.7.3)

$$\leq \int |f| \mathbb{1}_A \, d\mu \;=\; \int |f| \mathbb{1}_{A \cap \{|f| \leq g\}} \, d\mu \;+\; \int |f| \mathbb{1}_{A \cap \{|f| > g\}} \, d\mu \;=$$

(dato che, per la (18.1.2), si ha $|f| \mathbb{1}_{A \cap \{|f| > g\}} = 0 \quad \mu$-q.o.)

$$= \int |f| \mathbb{1}_{A \cap \{|f| \leq g\}} \, d\mu \;\leq$$

(poiché $|f| \mathbb{1}_{A \cap \{|f| \leq g\}} \leq g \mathbb{1}_A$)

$$\leq \int g \mathbb{1}_A \, d\mu \;=\; (g\mu)(A) \;\leq\; \varepsilon \;,$$

dunque l'insieme Φ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ.

Vedremo più avanti (Esempio 18.2.1) che la precedente condizione sufficiente non è necessaria.

18.2. Il teorema di Vitali. Varianti e conseguenze.

18.2.1 Il teorema di Vitali.

Nella dimostrazione del teorema di Vitali e di alcune sue conseguenze faremo spesso uso del fatto che "se una successione di funzioni $\{f_n\}$ converge in misura (in tutto Ω), allora $\{f_n\}$ converge in misura in ogni insieme misurabile A". Il significato di questa affermazione è precisato dall'enunciato seguente.

Lemma 18.2.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$* [1] *e sia $f \in M(\mathcal{A})$.*

Vale l'implicazione

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \mathbb{1}_A \xrightarrow{\mu} f \mathbb{1}_A \qquad \forall A \in \mathcal{A} \quad (^2) \;.$$

(1) Lo spazio vettoriale $M(\mathcal{A})$ è stato definito all'inizio del Capitolo 16.

(2) L'uso della locuzione "$\{f_n\}$ converge in μ-misura nell'insieme A" per indicare la circostanza che la successione $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ converge in μ-misura è pienamente giustificato dal fatto che, se $A \neq \emptyset$, allora, considerato lo spazio di misura ristretto $(A, A \cap \mathcal{A}, \mu_A)$ $(\mu_A = \mu|_{A \cap \mathcal{A}})$, la convergenza in μ-misura di $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ [verso la funzione $f \mathbb{1}_A$] equivale alla convergenza in μ_A-misura della successione delle restrizioni $\{f_n|_A)\}$ [verso la funzione $f|_A$]; lasciamo allo studente la facile verifica di ciò.

Dimostrazione. Fissato un qualunque insieme $A \in \mathcal{A}$, osserviamo che, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\{|f_n \mathbb{1}_A - f \mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \quad ;$$

pertanto, essendo per ipotesi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad ,$$

si ha pure

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n \mathbb{1}_A - f \mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad ;$$

per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ concludiamo che la successione $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ converge in misura verso la funzione $f \mathbb{1}_A$.

Teorema 18.2.1. (Teorema di Vitali). *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $\{f_n\}$ sia convergente in media di ordine p è che siano vere le seguenti due affermazioni:

i) *la successione $\{f_n\}$ è convergente in misura rispetto a μ;*

ii) *l'insieme di misure con densità $\{|f_n|^p \mu \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ .*

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supponiamo che esista $f \in M(\mathcal{A})$ tale che

$$f_n \overset{p}{\to} f \quad . \tag{18.2.3}$$

Si ha allora (Proposizione 16.8.3)

$$f_n \overset{\mu}{\to} f$$

e quindi è verificata la i).

Dimostriamo che è vera la ii). Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, osserviamo come prima cosa che, per l'ipotesi (18.2.3), esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int |f_n - f|^p \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \qquad \forall n > \overline{n} \ ;$$

di conseguenza, per $n > \overline{n}$, si ha pure, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$,

$$(|f_n|^p \mu)(A) = \int |f_n|^p \mathbb{1}_A \, d\mu = \int |f_n - f + f|^p \mathbb{1}_A \, d\mu \leq \tag{18.2.4}$$

(tenendo presente la (15.1.2))

$$\leq 2^p \int |f_n - f|^p \mathbb{1}_A \, d\mu + 2^p \int |f|^p \mathbb{1}_A \, d\mu \leq$$

$$\leq 2^p \int |f_n - f|^p \, d\mu + 2^p (|f|^p \mu)(A) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^p (|f|^p \mu)(A) \quad .$$

D'altra parte, poiché le funzioni

$$f_1 \;,\; \dots \;,\; f_{\overline{n}} \;,\; f$$

appartengono per ipotesi a $\mathcal{L}^p(\mu)$ e quindi, per la Proposizione 17.6.1, le corrispondenti misure con densità

$$|f_1|^p\mu \;,\; \dots \;,\; |f_{\overline{n}}|^p\mu \;,\; |f|^p\mu$$

sono assolutamente continue secondo Caccioppoli rispetto a μ, grazie all'Osservazione 18.1.2 possiamo affermare che, in corrispondenza del numero $\varepsilon > 0$ fissato inizialmente, esistono $\delta > 0$ e $L \in \mathcal{A}$, con $\mu(L) < +\infty$, tali che :

$$\text{(18.2.5)} \qquad A \in \mathcal{A} \;\;,\;\; \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \big(|f_i|^p\mu\big)(A) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \quad \forall i = 1, \dots, \overline{n} \quad \text{e inoltre} \quad \big(|f|^p\mu\big)(A) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \quad .$$

Dalle (18.2.4) e (18.2.5) segue che vale l'implicazione

$$\text{(18.2.6)} \qquad A \in \mathcal{A} \;\;,\;\; \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \big(|f_n|^p\mu\big)(A) \;\leq\; \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi è vera la ii). Per provare la (18.2.6), fissato un qualunque insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A \cap L) \leq \delta$, distinguiamo due casi:

— se $n \leq \overline{n}$, si ha, per la (18.2.5),

$$\big(|f_n|^p\mu\big)(A) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \;<\; \varepsilon \;\; ;$$

— se $n > \overline{n}$, si ha, per la (18.2.4),

$$\big(|f_n|^p\mu\big)(A) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + 2^p\big(|f|^p\mu\big)(A)$$

e quindi, per la (18.2.5),

$$\big(|f_n|^p\mu\big)(A) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + 2^p\frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \;=\; \varepsilon \;\; .$$

La condizione è sufficiente. Dall'ipotesi ii), per l'Osservazione 18.1.3 e la Proposizione 17.6.2, segue che è

$$f_n \;\in\; \mathcal{L}^p(\mu) \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;;$$

basta quindi dimostrare che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, per l'ipotesi ii) esistono $\delta > 0$ e $L \in \mathcal{A}$, con $\mu(L) < +\infty$, tali che:

$$\text{(18.2.7)} \qquad A \in \mathcal{A} \;\;,\;\; \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \big(|f_n|^p\mu\big)(A) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;;$$

di conseguenza risulta, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n - f_m|^p \, d\mu \;=\; \int_L |f_n - f_m|^p \, d\mu + \int_{L^c} |f_n - f_m|^p \, d\mu \;\leq \tag{18.2.8}$$

(usando la (15.1.2))

$$\leq\; \int_L |f_n - f_m|^p \, d\mu \,+\, 2^p \int_{L^c} |f_n|^p \, d\mu \,+\, 2^p \int_{L^c} |f_m|^p \, d\mu \;\leq$$

(per la (18.2.7))

$$\leq\; \int_L |f_n - f_m|^p \, d\mu \,+\, 2^p \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \,+\, 2^p \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \;=\; \int_L |f_n - f_m|^p \, d\mu + \varepsilon \quad .$$

Si ha inoltre, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ ed ogni $\alpha > 0$,

$$\int_L |f_n - f_m|^p \, d\mu \;= \tag{18.2.9}$$

$$=\; \int_{L \cap \{|f_n - f_m| < \alpha\}} |f_n - f_m|^p \, d\mu \;+\; \int_{L \cap \{|f_n - f_m| \geq \alpha\}} |f_n - f_m|^p \, d\mu \;\leq$$

(tenendo presente che è $|f_n - f_m|^p \mathbb{1}_{L \cap \{|f_n - f_m| < \alpha\}} \;\leq\; \alpha^p \mathbb{1}_{L \cap \{|f_n - f_m| < \alpha\}}$ ed adoperando ancora una volta la (15.1.2))

$$\leq\; \alpha^p \mu(L \cap \{|f_n - f_m| < \alpha\}) \,+$$

$$+\, 2^p \int_{L \cap \{|f_n - f_m| \geq \alpha\}} |f_n|^p \, d\mu \;+\; 2^p \int_{L \cap \{|f_n - f_m| \geq \alpha\}} |f_m|^p \, d\mu \quad .$$

Dalle (18.2.8) e (18.2.9), scegliendo $\alpha \in]0, +\infty[$ in modo che sia

$$\alpha^p \mu(L) \;\leq\; \varepsilon \quad ,$$

segue che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int |f_n - f_m|^p \, d\mu \;\leq \tag{18.2.10}$$

$$\leq\; 2\varepsilon \;+\; 2^p \int_{L \cap \{|f_n - f_m| \geq \alpha\}} |f_n|^p \, d\mu \;+\; 2^p \int_{L \cap \{|f_n - f_m| \geq \alpha\}} |f_m|^p \, d\mu \quad .$$

Osserviamo adesso che è

$$L \cap \{|f_n - f_m| \geq \alpha\} \;=\; \{|f_n \mathbb{1}_L - f_m \mathbb{1}_L| \geq \alpha\} \qquad\qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

e che, per l'ipotesi i) ed il Lemma 18.2.1, la successione $\{f_n \mathbb{1}_L\}$ converge in misura rispetto a μ; pertanto, per il criterio di Weyl-Riesz, esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\big(L \cap \{|f_n - f_m| \geq \alpha\}\big) \;\leq\; \delta \qquad\qquad \forall n, m \geq \overline{n} \;;$$

dalle (18.2.10) e (18.2.7) si ottiene allora che, per ogni $n, m \geq \overline{n}$, risulta

$$\int |f_n - f_m|^p \, d\mu \;\leq\; 2\varepsilon \,+\, 2^p \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \,+\, 2^p \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \;=\; 3\varepsilon \quad ,$$

dunque è verificata la disuguaglianza

$$d_p(f_n, f_m) \;\leq\; 3\varepsilon \quad , \qquad\qquad \text{se} \;\; 0 < p < 1 \;,$$

ovvero

$$d_p(f_n, f_m) \;\leq\; (3\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \quad , \qquad\qquad \text{se} \;\; p \geq 1 \;\; .$$

In ogni caso, data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, rimane provato che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

È adesso facile provare che la condizione sufficiente di equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli data dalla Proposizione 18.1.1 non è necessaria.

Esempio 18.2.1. Nello spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \;=\; (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ consideriamo la successione di funzioni

$$\{f_n\} = \Big\{\mathbb{1}_{[H_n, H_{n+1}[}\Big\} \quad ,$$

già utilizata nell'Esempio 16.3.1. Abbiamo visto in quell'occasione che si ha

$$f_n \to 0 \;\; \text{in} \;\; \mathcal{L}^p(\mathrm{m}_1) \;,$$

qualunque sia l'esponente $p \in \,]0, +\infty[$, e quindi, in particolare,

$$f_n \to 0 \;\; \text{in} \;\; \mathcal{L}^1(\mathrm{m}_1) \;.$$

Conseguentemente, per il Teorema di Vitali, l'insieme di misure

$$\Psi \;=\; \{f_n \mathrm{m}_1 \;:\; n \in \mathbb{N}\}$$

è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a m_1.

D'altra parte, ragionando come per l'Esempio 16.3.1, si ha che non esiste alcuna funzione g, di classe L^1, tale da risultare, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n| \;\leq\; g \quad \mathrm{m}_1\text{-q.o.} \;\; ;$$

infatti per una siffatta funzione g si avrebbe pure

$$\mathbb{1}_{[1,+\infty[} \;\leq\; g \quad \mathrm{m}_1\text{-q.o.}$$

e quindi g non sarebbe di classe L^1. Pertanto l'insieme Ψ non verifica la condizione di equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli della Proposizione 18.1.1.

Una variante del teorema di Vitali si ottiene sostituendo alla condizione i) di convergenza in misura della successione $\{f_n\}$ la condizione che tale successione sia convergente in misura in ogni insieme di misura finita.

Teorema 18.2.1′. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $\{f_n\}$ sia convergente in media di ordine p è che siano vere le seguenti due affermazioni:

i′) *qualunque sia l'insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < +\infty$, la successione $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ è convergente in misura rispetto a μ ;*

ii) *l'insieme di misure con densità $\{|f_n|^p \mu \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ .*

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supponiamo che la successione $\{f_n\}$ converga in media di ordine p. Per il teorema di Vitali (parte necessaria) sono vere la i) e la ii); d'altra parte, per il Lemma 18.2.1, sussiste l'implicazione

$$\text{i)} \quad \Longrightarrow \quad \text{i}') \;\; ;$$

in conclusione si ha che, se $\{f_n\}$ converge in media di ordine p, allora sono vere le affermazioni i′) e ii).

La condizione è sufficiente. Analizzando la dimostrazione del teorema di Vitali (parte sufficiente) si rileva che l'ipotesi i) viene utilizzata soltanto per garantire la convergenza in misura rispetto a μ della successione $\{f_n \mathbb{1}_L\}$; a tal fine è però sufficiente che sia verificata la i′). In conclusione possiamo asserire che, se sono vere le affermazioni i′) e ii), allora la successione $\{f_n\}$ converge in media di ordine p.

Osservazione 18.2.1. Dal confronto degli enunciati dei Teoremi 18.2.1 e 18.2.1′ segue immediatamente che sussiste l'equivalenza

$$\text{i) , ii)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{i}'\text{) , ii)} \ .$$

Inoltre, come abbiamo già osservato nel corso della precedente dimostrazione, per il Lemma 18.2.1 si ha l'implicazione

$$\text{i)} \quad \Longrightarrow \quad \text{i}'\text{)} \ .$$

È bene però osservare esplicitamente che, in generale, il verificarsi della condizione i′), da sola, non implica il verificarsi della i). Ciò è mostrato dall'esempio che segue.

Esempio 18.2.2. Nello spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ consideriamo la successione di funzioni

$$\{f_n\} = \left\{\mathbb{1}_{[n-1,n[}\right\} \tag{18.2.11}$$

(già utilizata negli Esempi 16.5.3, 16.7.1 e 16.8.4).

Sappiamo (Esempio 16.8.4) che la successione $\{f_n\}$ non è convergente in misura. Invece per tale successione è verificata la condizione i′), in quanto risulta

$$f_n \mathbb{1}_A \overset{\mathrm{m}_1}{\to} 0$$

per ogni insieme $A \in \mathcal{L}_1$ con $\mathrm{m}_1(A) < +\infty$; si ha infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}_1(A \cap [n-1, n[\,) \ = \ \mathrm{m}_1(A \cap [0, +\infty[\,) \ < \ +\infty$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}_1(A \cap [n-1, n[) \ = \ 0 \ ;$$

pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, essendo

$$\left\{|f_n \mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\right\} \ \subseteq \ A \cap [n-1, n[\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}_1\big(\left\{|f_n \mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\right\}\big) \ = \ 0 \ .$$

Il fatto che per la successione (18.2.11) sia verificata la i′) può dimostrarsi anche applicando il successivo Lemma 18.2.2, dopo avere osservato che tale successione converge m_1-quasi-ovunque (Esempio 16.5.1).

18.2.2 Caratterizzazione della convergenza in media verso una data funzione limite.

I Teoremi 18.2.1 e 18.2.1$'$ caratterizzano la convergenza in media di ordine p di una successione di funzioni $\{f_n\}$ senza fare riferimento alla funzione limite. Si ha però un'altra variante del teorema di Vitali, che si deduce abbastanza facilmente dall'enunciato del Teorema 18.2.1, la quale fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni $\{f_n\}$, appartenenti a $M(\mathcal{A})$, converga in media di ordine p verso una data funzione $f \in M(\mathcal{A})$.

Teorema 18.2.2. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che siano vere le seguenti due affermazioni:

j) *la successione $\{f_n\}$ è convergente in misura rispetto a μ verso la funzione f;*

ii) *l'insieme di misure con densità $\{|f_n|^p\mu \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ .*

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Se è

$$f_n \ \stackrel{p}{\to} \ f \quad ,$$

allora, per la Proposizione 16.8.3 e per il Teorema 18.2.1 (parte necessaria), sono verificate la j) e la ii).

La condizione è sufficiente. Se sono verificate la j) e la ii), possiamo affermare che valgono la i) e la ii), pertanto, per il Teorema 18.2.1 (parte sufficiente), esiste $g \in M(\mathcal{A})$ tale che

$$f_n \ \stackrel{p}{\to} \ g \quad ;$$

poiché si ha pure, per ipotesi,

$$f_n \ \stackrel{\mu}{\to} \ f \quad ,$$

possiamo allora concludere, ragionando in modo ovvio (cfr. l'Osservazione 16.9.1), che è

$$f_n \ \stackrel{p}{\to} \ f \quad .$$

Osservazione 18.2.2. Abbiamo fatto vedere, con la precedente dimostrazione, come dal Teorema 18.2.1 si deduca il Teorema 18.2.2. Viceversa, è pressoché immediato constatare che, a sua volta, il Teorema 18.2.1 può dedursi dal Teorema 18.2.2; lasciamo allo studente la facile verifica di questo fatto. In conclusione, abbiamo che gli enunciati dei Teoremi 18.2.1 e 18.2.2 sono proposizioni perfettamente equivalenti.

È a questo punto naturale chiedersi se, analogamente a ciò che accade per il Teorema 18.2.1, sia lecito sostituire nel Teorema 18.2.2 la condizione j) con la seguente:

j$'$) *qualunque sia l'insieme* $A \in \mathcal{A}$, *con* $\mu(A) < +\infty$, *la successione* $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ *è convergente in misura rispetto a* μ *verso la funzione* $f\mathbb{1}_A$.

Poiché la condizione j) implica, ovviamente, la j$'$), dal Teorema 18.2.2 segue subito che il verificarsi della j$'$) e della ii) è condizione necessaria affinché la successione di funzioni $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f. Tuttavia, come mostra il successivo Esempio 18.2.3, tale condizione non è, in generale, sufficiente.

Esempio 18.2.3. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ il seguente spazio di misura:

$$\Omega = \{a, b\} \quad ; \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad ; \quad \mu(\{a\}) = 1 \ , \ \mu(\{b\}) = +\infty$$

e sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni (costante) avente come termine generale la funzione identicamente nulla. Sia inoltre

$$f = \mathbb{1}_{\{b\}} \quad .$$

È allora ovvio che le condizioni j$'$) e ii) sono verificate; invece non è vero che

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad ;$$

infatti $f \notin \mathcal{L}^p(\mu)$.

Osserviamo però che il verificarsi della j$'$) e della ii) è pure condizione sufficiente affinché la $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso f quando è soddisfatta una delle seguenti due ipotesi:

(*) *la misura* μ *è* σ*-finita;*

(**) *la funzione* f *appartiene a* $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Riportiamo nell'appendice al paragrafo gli enunciati formali di questi fatti e le relative dimostrazioni.

Appendice al n. 18.2.2.

Teorema 18.2.2*. *Dati lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *con* μ σ*-finita, e l'esponente* $p \in]0, +\infty[$, *sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e sia* $f \in M(\mathcal{A})$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $\{f_n\}$ *converga in media di ordine p verso la funzione* f *è che siano vere le seguenti due affermazioni:*

j$'$) *qualunque sia l'insieme* $A \in \mathcal{A}$, *con* $\mu(A) < +\infty$, *la successione* $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ *è convergente in misura rispetto a* μ *verso la funzione* $f\mathbb{1}_A$ *;*

ii) *l'insieme di misure con densità* $\{|f_n|^p \mu \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ *è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a* μ.

Teorema 18.2.2**. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che siano vere le seguenti due affermazioni:

j$'$) *qualunque sia l'insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < +\infty$, la successione $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ è convergente in misura rispetto a μ verso la funzione $f \mathbb{1}_A$;*

ii) *l'insieme di misure con densità $\{|f_n|^p \mu \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ.*

Dimostrazione dei Teoremi 18.2.2* e 18.2.2**. Abbiamo già osservato, prima dell'Esempio 18.2.2, che la condizione è necessaria. Dimostriamone la sufficienza.

Se sono verificate la j$'$) e la ii), possiamo affermare che valgono la i$'$) e la ii), pertanto, per il Teorema 18.2.1$'$ (parte sufficiente), esiste $g \in M(\mathcal{A})$ tale che

$$f_n \stackrel{p}{\to} g \ ;$$

basta allora provare che risulta

$$g = f \quad \mu\text{-q.o.}$$

Osserviamo a tale scopo che, per la Proposizione 16.8.3 e per il Lemma 18.2.1, si hanno le implicazioni

$$f_n \stackrel{p}{\to} g \quad \Longrightarrow \quad f_n \stackrel{\mu}{\to} g \quad \Longrightarrow \quad f_n \mathbb{1}_A \stackrel{\mu}{\to} g \mathbb{1}_A \qquad \forall A \in \mathcal{A} \ ,$$

pertanto, tenendo conto dell'ipotesi j$'$), risulta

$$g \mathbb{1}_A = f \mathbb{1}_A \quad \mu\text{-q.o.} \qquad \forall A \in \mathcal{A} \ : \ \mu(A) < +\infty \ . \tag{18.2.12}$$

Supponiamo in un primo momento che la misura μ sia σ-finita (Teorema 18.2.2*) ed indichiamo con $\{A_k\}$ una successione di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, con $\mu(A_k) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$, tale che

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k \ .$$

Si ha allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$g \mathbb{1}_{A_k} = f \mathbb{1}_{A_k} \quad \mu\text{-q.o.} \ ,$$

cioè

$$\mu\big(\{g \mathbb{1}_{A_k} \neq f \mathbb{1}_{A_k}\}\big) = 0 \ ;$$

di conseguenza, dato che, come si verifica facilmente, risulta

$$\{g \neq f\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{g \mathbb{1}_{A_k} \neq f \mathbb{1}_{A_k}\} \ ,$$

si ha pure

$$\mu(\{g \neq f\}) = 0 \ ,$$

cioè

$$g = f \quad \mu\text{-q.o.} \ ,$$

come dovevamo dimostrare.

Supponiamo adesso che la funzione f appartenga a $\mathcal{L}^p(\mu)$ (Teorema 18.2.2**). Per ogni $k \in \mathbb{N}$, denotato con B_k l'insieme

$$B_k \;=\; \{|g-f| \geq \frac{1}{k}\} \quad ,$$

per la disuguaglianza di Čebičev si ha

$$\mu(B_k) \;\leq\; k^p \int |g-f|^p \, d\mu \;<+\infty$$

e quindi, per la (18.2.12),

$$g\mathbb{1}_{B_k} \;=\; f\mathbb{1}_{B_k} \quad \mu\text{-q.o.} \;;$$

si ha inoltre, come è immediato verificare,

$$B_k \;=\; \left\{g\mathbb{1}_{B_k} \neq f\mathbb{1}_{B_k}\right\} \quad ,$$

pertanto

$$\mu(B_k) \;=\; 0 \quad .$$

Possiamo allora concludere che anche l'insieme

$$\{g \neq f\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

ha misura nulla, dunque

$$g \;=\; f \quad \mu\text{-q.o.} \;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

18.2.3. Caratterizzazione della convergenza in media per le sucessioni convergenti quasi-ovunque.

Abbiamo già osservato (Lemma 18.2.1) che la convergenza in misura implica la convergenza in misura sugli insiemi di misura finita. Il lemma successivo mostra che anche la convergenza quasi-ovunque implica la convergenza in misura sugli insiemi di misura finita.

Lemma 18.2.2. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.*

Vale l'implicazione

$$f_n \overset{\text{q.o.}}{\to} f \quad \Longrightarrow \quad f_n\mathbb{1}_A \overset{\mu}{\to} f\mathbb{1}_A \qquad \forall A \in \mathcal{A} \;:\; \mu(A) < +\infty \quad .$$

Dimostrazione. Fissato un qualunque insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < +\infty$, poniamo

$$\nu \;=\; \mathbb{1}_A \mu \quad .$$

Poiché $\nu<<\mu$, dall'ipotesi

$$f_n \to f \qquad \mu\text{-q.o.}$$

si deduce che è

$$f_n \to f \qquad \nu\text{-q.o.}$$

Di conseguenza, dato che la misura ν è finita, si ha pure

$$f_n \overset{\nu}{\to} f \quad ,$$

cioè

$$\text{(18.2.13)} \qquad \forall\varepsilon > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \nu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \;=\; 0 \quad .$$

D'altra parte si ha

$$\nu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \;=\; \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cap A) \;=\; \mu(\{|f_n \mathbb{1}_A - f \mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\}) \quad ,$$

quindi la (18.2.13) può scriversi:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n \mathbb{1}_A - f \mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\}) \;=\; 0 \quad ,$$

dunque è vero che

$$f_n \mathbb{1}_A \overset{\mu}{\to} f \mathbb{1}_A \quad .$$

Teorema 18.2.3. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ convergente μ-quasi-ovunque verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che l'insieme di misure con densità

$$\{|f_n|^p \mu \;:\; n \in \mathbb{N}\}$$

sia equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ.

Dimostrazione. La necessità della condizione segue dal teorema di Vitali. Per provarne la sufficienza osserviamo che il Lemma 18.2.2 assicura che è verificata la condizione i$'$); pertanto, per il Teorema 18.2.1$'$, possiamo affermare che esiste $g \in M(\mathcal{A})$ tale che

$$f_n \overset{p}{\to} g \quad ;$$

conseguentemente, grazie al Corollario 16.5.1, si ha pure

$$f_n \overset{p}{\to} f \quad .$$

Osservazione 18.2.3. (*Nota storica.*) Nell'introduzione al capitolo abbiamo già accennato al fatto che l'intitolazione di "Teorema di Vitali", data al Teorema 18.2.1, non è del tutto appropriata (anche se è moralmente corretta). Infatti il risultato dovuto a Vitali (dimostrato nel 1907) è il Teorema 18.2.3 nel caso particolare della misura di Lebesgue su un intervallo compatto di $\mathbb{R}$; tutti gli altri teoremi, che abbiamo visto nel corso del paragrafo, sono successive generalizzazioni dovute ad altri Autori.

Ciò spiega anche il fatto, a prima vista un po' singolare, che nel cosiddetto "Teorema di Vitali" intervenga l'equi-assoluta continuità secondo Caccioppoli anziché quella secondo Vitali.

Osservazione 18.2.4. (*Il teorema della convergenza dominata rivisitato.*) Osserviamo che dal teorema di Vitali – e più precisamente dal Teorema 18.2.3 – può formalmente dedursi, come corollario, il teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Infatti, se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ verificante le ipotesi del teorema di Lebesgue, allora si prova subito, con lo stesso ragionamento adottato in occasione del teorema di Lebesgue, che la successione $\{f_n\}$ converge μ-quasi-ovunque; d'altra parte, per la Proposizione 18.1.1 si ha che l'insieme $\{|f_n|^p\mu \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ. Di conseguenza, se $f \in M(\mathcal{A})$ è una qualunque funzione tale che

$$f_n \ \to \ f \quad \mu\text{-q.o.} \quad ,$$

allora, per il Teorema 18.2.3, si ha pure

$$f_n \ \to \ f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \ ,$$

dunque è vera la tesi del teorema della convergenza dominata.

Osserviamo però che non è corretto affermare che il teorema della convergenza dominata di Lebesgue è un corollario del teorema di Vitali; infatti per la dimostrazione del teorema di Vitali (parte sufficiente) è stata utilizzata un'importante conseguenza del teorema di Lebesgue: la completezza degli spazi $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$ (Teorema 16.4.2).

Terminiamo il paragrafo con un esempio di successione di funzioni, che converge in misura sugli insiemi di misura finita, ma non è né convergente in misura né convergente quasi ovunque.

Esempio 18.2.4. Nello spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ consideriamo due successioni, $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$, di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{L}_1)$, aventi inoltre i seguenti requisiti:

– la successione $\{g_n\}$ converge m_1-quasi-ovunque verso la funzione identicamente nulla, ma non converge in m_1-misura (cfr. l'Esempio 16.8.4);

– la successione $\{h_n\}$ converge in m_1-misura verso la funzione identicamente nulla, ma non converge m_1-quasi-ovunque (una successione siffatta si ottiene, ad esempio, considerando le funzioni della successione dell'Esempio 16.8.1 e prendendone i prolungamenti a tutto l'insieme $\mathbb{R}$ che assumono valore zero in $\mathbb{R} \setminus [0, 1[$).

Indichiamo con $\{f_n\}$ la successione che si ottiene "per incastro" dalle due successioni $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$:

$$g_1, h_1, g_2, h_2, \dots, g_n, h_n, \dots$$

Tale successione non converge né in m_1-misura né m_1-quasi-ovunque, però, grazie ai Lemmi 18.2.1 e 18.2.2, le due estratte $\{f_{2n-1}\}$ e $\{f_{2n}\}$ hanno entrambe la proprietà di convergere in m_1-misura verso la funzione identicamente nulla su ogni insieme $A \in \mathcal{L}_1$, con $\mathrm{m}_1(A) < +\infty$; è allora facile verificare che anche l'intera successione $\{f_n\}$ ha la stessa proprietà.

18.3. Caratterizzazione della convergenza in media mediante la convergenza delle norme.

In questo numero presentiamo le caratterizzazioni della convergenza in media di ordine p che utilizzano la condizione di convergenza delle norme

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \;=\; \int |f|^p \, d\mu \quad .$$

Dimostriamo come prima cosa che tale condizione è necessaria affinché $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso f.

Proposizione 18.3.1. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria affinché la successione $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che risulti

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \;=\; \int |f|^p \, d\mu \quad .$$

Dimostrazione. Per ipotesi le funzioni $f, f_1, f_2, \dots$ appartengono tutte a $\mathcal{L}^p(\mu)$ e si ha

$$\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, f) \;=\; 0 \quad .$$

Inoltre, denotato con θ lo zero dello spazio vettoriale $\mathcal{L}^p(\mu)$, cioè la funzione identicamente nulla, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|d_p(f_n, \theta) \;-\; d_p(f, \theta)\big| \;\le\; d_p(f_n, f) \qquad (^3) \quad .$$

(3) Si tenga presente che in un qualunque spazio semimetrico (S, d) vale la disuguaglianza

$$(*) \qquad |d(x,z) - d(y,z)| \;\le\; d(x,y) \qquad \forall x, y, z \in S$$

(*seconda disuguaglianza triangolare*).

Ne segue che è

$$\lim_{n\to\infty} d_p(f_n,\theta) \;=\; d_p(f,\theta) \quad ,$$

cioè:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \;=\; \int |f|^p \, d\mu \qquad\qquad \text{se } 0 < p \leq 1 \ ,$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int |f_n|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \;=\; \Big(\int |f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad\qquad \text{se } p \geq 1 \ ,$$

ma anche in questo secondo caso, prendendo le potenze p-me di entrambi i membri della precedente relazione di limite, si ha che è vera la tesi.

Occupiamoci adesso delle caratterizzazioni della convergenza in $\mathcal{L}^p(\mu)$, cominciando ad esaminare il caso particolare delle successioni convergenti quasi-ovunque.

Premettiamo un lemma.

Lemma 18.3.1. *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; a \in \mathbb{R} \quad .$$

Risulta allora

$$\lim_{n\to\infty}{}' (a_n + b_n) \;=\; a + \lim_{n\to\infty}{}' b_n \quad , \tag{18.3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}'' (a_n + b_n) \;=\; a + \lim_{n\to\infty}{}'' b_n \quad . \tag{18.3.2}$$

Per dimostrare la $(*)$ si ragiona esattamente come nel caso degli spazi metrici: si osserva che per ogni $x, y, z \in S$ si ha

$$d(x,z) - d(y,z) \;\leq\; d(x,y) + d(y,z) - d(y,z) \;=\; d(x,y) \quad ,$$

quindi vale la disuguaglianza

$$d(x,z) - d(y,z) \;\leq\; d(x,y) \qquad\qquad \forall x,y,z \in S \ ;$$

da questa, per l'arbitrarietà degli elementi x, y, z, scambiando x con y, si deduce che vale pure l'altra disuguaglianza

$$d(y,z) - d(x,z) \;\leq\; d(y,x) \;=\; d(x,y) \qquad\qquad \forall x,y,z \in S \ ,$$

pertanto è vera la $(*)$.

Dimostrazione. Proviamo la (18.3.1) (in maniera perfettamente analoga si ragiona per la (18.3.2)).

Sia λ un qualsiasi elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ definitivamente minorante della successione $\{a_n+b_n\}$, cioè tale che

$$\lambda \ \leq \ a_n + b_n \qquad\qquad \forall n \geq \overline{n}\ ,$$

essendo $\overline{n} \in \mathbb{N}$ un opportuno indice. Per l'ipotesi di convergenza della successione $\{a_n\}$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n^* \in \mathbb{N}$ tale che

$$a - \varepsilon \ < \ a_n \ < a + \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geq n^*\ .$$

Si ha allora, per ogni $n \geq \max\{n_1, n^*\}$,

$$\lambda \ < \ a + \varepsilon + b_n$$

e da ciò si deduce che l'elemento $\lambda - a - \varepsilon$ è definitivamente minorante di $\{b_n\}$; pertanto si ha

$$\lambda - a - \varepsilon \ \leq \ \lim_{n\to\infty}{}' b_n$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$\lambda \ \leq \ a \ + \ \lim_{n\to\infty}{}' b_n \ \ ;$$

conseguentemente, per l'arbitrarietà di λ, si ha pure

$$\lim_{n\to\infty}{}'(a_n + b_n) \ \leq \ a \ + \ \lim_{n\to\infty}{}' b_n \ \ .$$

Per dimostrare che è vera pure la disuguaglianza contraria consideriamo un qualsiasi $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$ definitivamente minorante della successione $\{b_n\}$ ed osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha, definitivamente,

$$a - \varepsilon + \rho \ < \ a_n + b_n \ \ ,$$

pertanto

$$a - \varepsilon + \rho \ \leq \ \lim_{n\to\infty}{}'(a_n + b_n) \ \ ;$$

per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ se ne deduce che è

$$\rho \ \leq \ \lim_{n\to\infty}{}'(a_n + b_n) \ - \ a$$

e conseguentemente, per l'arbitrarietà di ρ, risulta

$$\lim_{n\to\infty}{}' b_n \ \leq \ \lim_{n\to\infty}{}'(a_n + b_n) \ - \ a \ \ ,$$

dunque

$$a \ + \ \lim_{n\to\infty}{}' b_n \ \leq \ \lim_{n\to\infty}{}'(a_n + b_n) \ \ .$$

Teorema 18.3.1. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^p(\mu)$ convergente μ-quasi-ovunque verso una funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che risulti

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \quad = \quad \int |f|^p \, d\mu \quad .$$

Dimostrazione. La necessità della condizione è, ovviamente, garantita dalla Proposizione 18.3.1; proviamone la sufficienza. Per il Teorema 18.2.3 basta dimostrare che l'insieme $\{|f_n|^p\mu \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ.

A tale scopo proviamo dapprima che, in virtù delle ipotesi di convergenza μ-quasi-ovunque e di convergenza delle norme, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n|^p \, d\mu \quad = \quad \int_A |f|^p \, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A} \, . \tag{18.3.3}$$

Si ha infatti, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$, grazie all' ipotesi di convergenza μ-quasi-ovunque della successione $\{f_n\}$ alla funzione f,

$$|f|^p \mathbb{1}_A \quad = \quad \lim_{n\to\infty}{}' |f_n|^p \mathbb{1}_A \qquad \mu\text{-q.o.} \quad ,$$

pertanto

$$\int_A |f|^p \, d\mu \quad = \quad \int |f|^p \mathbb{1}_A \, d\mu \quad = \quad \int \Big(\lim_{n\to\infty}{}' |f_n|^p \mathbb{1}_A \Big) \, d\mu \quad \leq$$

(per il lemma di Fatou)

$$\leq \quad \lim_{n\to\infty}{}' \int |f_n|^p \mathbb{1}_A \, d\mu \quad = \quad \lim_{n\to\infty}{}' \int_A |f_n|^p \, d\mu \quad ,$$

dunque

$$\int_A |f|^p \, d\mu \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty}{}' \int_A |f_n|^p \, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A} \, . \tag{18.3.4}$$

Dalla (18.3.4), per l'arbitrarietà dell'insieme $A \in \mathcal{A}$, segue che per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha pure

$$\int_{A^c} |f|^p \, d\mu \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty}{}' \int_{A^c} |f_n|^p \, d\mu \quad = \quad \lim_{n\to\infty}{}' \Big(\int |f_n|^p \, d\mu \ - \ \int_A |f_n|^p \, d\mu \Big) \quad ,$$

da cui, per l'ipotesi di convergenza delle norme, tenendo presenti i Lemmi 18.3.1 e 16.1.3, si ricava che è

$$\int_{A^c} |f|^p \, d\mu \quad \leq \quad \int |f|^p \, d\mu \ + \ \lim_{n\to\infty}{}' \Big(- \int_A |f_n|^p \, d\mu \Big) \quad = \quad \int |f|^p \, d\mu \ - \ \lim_{n\to\infty}{}'' \int_A |f_n|^p \, d\mu$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \int_A |f_n|^p \, d\mu \quad \leq \quad \int |f|^p \, d\mu \; - \; \int_{A^c} |f|^p \, d\mu \quad = \quad \int_A |f|^p \, d\mu \quad .$$

In conclusione abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \int_A |f_n|^p \, d\mu \quad \leq \quad \int_A |f|^p \, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A} \; . \tag{18.3.5}$$

Dalle (18.3.4) e (18.3.5) segue, ovviamente, la (18.3.3).

Dimostriamo adesso che l'insieme $\{|f_n|^p\mu \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ. Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, osserviamo che, essendo per ipotesi $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, per la Proposizione 17.6.1 si ha

$$|f|^p\mu \overset{\mathrm{C}}{<\!\!<} \mu$$

e quindi esistono un numero $\delta^* > 0$ ed un insieme $L^* \in \mathcal{A}$, con $\mu(L^*) < +\infty$, tali che

$$A \in \mathcal{A} \; , \; \mu(A \cap L^*) \leq \delta^* \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f|^p \, d\mu \; \leq \; \frac{\varepsilon}{2^{p+2}} \quad . \tag{18.3.6}$$

Dalla (18.3.6), in particolare, segue che è

$$\int_{\Omega \setminus L^*} |f|^p \, d\mu \quad \leq \quad \frac{\varepsilon}{2^{p+2}} \quad < \quad \frac{\varepsilon}{4} \quad ;$$

pertanto, dato che per la (18.3.3) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega \setminus L^*} |f_n|^p \, d\mu \quad = \quad \int_{\Omega \setminus L^*} |f|^p \, d\mu \quad ,$$

esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_{\Omega \setminus L^*} |f_n|^p \, d\mu \quad \leq \quad \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall n > n_1 \; . \tag{18.3.7}$$

Consideriamo la misura $\nu = \mathbb{1}_{L^*}\mu$. Risulta $\nu <\!\!< \mu$ e $\nu < +\infty$; conseguentemente, dato che

$$f_n \;\to\; f \quad \mu\text{-q.o.} \quad ,$$

si ha

$$f_n \;\to\; f \quad \nu\text{-q.o.}$$

e, per il teorema di Severini-Egorov,

$$f_n \;\to\; f \quad \nu\text{-q.unif.} \quad ;$$

esiste quindi un insieme $A_{\delta^*} \in \mathcal{A}$, con $\nu(A^{c}_{\delta^*}) \leq \delta^*$, tale che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in A_{δ^*}:

$$f_n \rightrightarrows f \text{ in } A_{\delta^*} \quad . \tag{18.3.8}$$

Essendo $\mu(A^{c}_{\delta^*} \cap L^*) = \nu(A^{c}_{\delta^*}) \leq \delta^*$, dalla (18.3.6) segue che è

$$\int_{A^{c}_{\delta^*}} |f|^p \, d\mu \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{p+2}} \;<\; \frac{\varepsilon}{4}$$

e quindi, per la (18.3.3), esiste $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_{A^{c}_{\delta^*}} |f_n|^p \, d\mu \;\leq\; \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall n > n_2 \; . \tag{18.3.9}$$

Inoltre, per la (18.3.8), esiste un altro indice $n_3 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| \;\leq\; \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4\delta^*}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall \omega \in A_{\delta^*} \; , \; \forall n > n_3 \; . \tag{18.3.10}$$

Posto

$$\overline{n} \;=\; \max\{n_1, n_2, n_3\} \quad ,$$

verifichiamo che vale l'implicazione:

$$A \in \mathcal{A} \; , \; \mu(A \cap L^*) \leq \delta^* \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f_n|^p \, d\mu \;\leq\; \varepsilon \quad \forall n > \overline{n} \; . \tag{18.3.11}$$

Si ha infatti

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu \;=\; \int_{A \cap L^*} |f_n|^p \, d\mu \;+\; \int_{A \setminus L^*} |f_n|^p \, d\mu \;=$$

$$= \int_{A \cap L^* \cap A_{\delta^*}} |f_n|^p \, d\mu \;+\; \int_{(A \cap L^*) \setminus A_{\delta^*}} |f_n|^p \, d\mu \;+\; \int_{A \setminus L^*} |f_n|^p \, d\mu \;\leq$$

(usando la disuguaglianza (15.1.2), le proprietà dell'integrale e la monotonia della misura $|f_n|^p \mu$)

$$\leq\; 2^p \int_{A \cap L^* \cap A_{\delta^*}} |f_n - f|^p \, d\mu \;+\; 2^p \int_{A \cap L^* \cap A_{\delta^*}} |f|^p \, d\mu \;+\; \int_{A^{c}_{\delta^*}} |f_n|^p \, d\mu \;+\; \int_{\Omega \setminus L^*} |f_n|^p \, d\mu \;\leq$$

(tenendo presenti la (18.3.10), le proprietà dell'integrale, la monotonia della misura $|f|^p \mu$, la (18.3.9) e la (18.3.7))

$$\leq\; 2^p \frac{1}{2^p} \frac{\varepsilon}{4\delta^*} \mu(A \cap L^* \cap A_{\delta^*}) \;+\; 2^p \int_A |f|^p \, d\mu \;+\; \frac{\varepsilon}{4} \;+\; \frac{\varepsilon}{4} \;\leq$$

(dato che, per ipotesi, $\mu(A \cap L^*) \leq \delta^*$ e per la (18.3.6))

$$\leq\; \frac{\varepsilon}{4} \;+\; 2^p \frac{\varepsilon}{2^{p+2}} \;+\; \frac{\varepsilon}{4} \;+\; \frac{\varepsilon}{4} \;=\; \varepsilon \quad .$$

Consideriamo adesso l'insieme finito di misure con densità

$$\{|f_1|^p\mu\,,\,\ldots\,,\,|f_{\overline{n}}|^p\mu\}\quad .$$

Per la Proposizione 17.6.1 e l'Osservazione 18.1.2 tale insieme è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ e pertanto, in corrispondenza del numero positivo ε fissato inizialmente, esistono $\delta' > 0$ e $L' \in \mathcal{A}$, con $\mu(L') < +\infty$, tali che:

$$A \in \mathcal{A}\ ,\ \mu(A \cap L') \leq \delta' \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f_r|^p\,d\mu \ \leq\ \varepsilon \quad \forall r = 1, \ldots \overline{n}\ . \tag{18.3.12}$$

A questo punto, posto

$$\delta = \min\{\delta^*, \delta'\} \quad , \quad L = L^* \cup L' \quad ,$$

dalle (18.3.12) e (18.3.11) si deduce immediatamente che è vera l'implicazione

$$A \in \mathcal{A}\ ,\ \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f_n|^p\,d\mu \ \leq\ \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,$$

dunque l'insieme di misure con densità $\{|f_n|^p\mu \ :\ n \in \mathbb{N}\}$ è equi-assolutamente continuo secondo Caccioppoli rispetto a μ. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

Passiamo adesso ad occuparci del caso generale.

Teorema 18.3.2. (Caratterizzazione della convergenza in media di ordine p mediante la convergenza delle norme.) *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^p(\mu)$ e sia $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che siano vere le seguenti due affermazioni:

j) *la successione $\{f_n\}$ è convergente in misura rispetto a μ verso la funzione f ;*

jj) *risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p\,d\mu \quad = \quad \int |f|^p\,d\mu \quad .$$

Dimostrazione. La necessità della condizione segue, ovviamente, dalle Proposizioni 16.8.3 e 18.3.1.

Proviamo che la condizione è sufficiente. Supponiamo, per assurdo, che siano verificate la j) e la jj), ma che la successione $\{f_n\}$ non converga in media di ordine p verso la funzione f, cioè esistano un numero $\varepsilon > 0$ ed una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, tali che

$$\int |f_{n_k} - f|^p\,d\mu \quad \geq \quad \varepsilon \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{N}\ . \tag{18.3.13}$$

Per la successione $\{f_{n_k}\}$ è ancora vero che

$$f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$$

e quindi (Corollario 16.8.1 e Proposizione 16.7.1) esiste una successione $\{f_{n_{k_r}}\}$, estratta da $\{f_{n_k}\}$, convergente μ-quasi-ovunque alla funzione f. Ovviamente, essendo la successione $\{f_{n_{k_r}}\}$ estratta dalla $\{f_n\}$, anche per la $\{f_{n_{k_r}}\}$ continua a valere la jj), cioè si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int |f_{n_{k_r}}|^p \, d\mu \quad = \quad \int |f|^p \, d\mu \quad .$$

Possiamo allora concludere, grazie al Teorema 18.3.1, che $\{f_{n_{k_r}}\}$ converge in media di ordine p verso la funzione f, ma ciò è assurdo poiché dalla (18.3.13) segue, in particolare, che è

$$\int |f_{n_{k_r}} - f|^p \, d\mu \quad \geq \quad \varepsilon \qquad\qquad \forall r \in \mathbb{N} \; .$$

Anche nel Teorema 18.3.2, così come accadeva per il teorema di Vitali, è possibile sostituire alla condizione j) di convergenza in misura in tutto Ω la condizione j$'$) di convergenza in misura sugli insiemi di misura finita.

Teorema 18.3.2$'$. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^p(\mu)$ e sia $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che siano vere le seguenti due affermazioni:

j$'$) *qualunque sia l'insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < +\infty$, la successione $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ è convergente in misura rispetto a μ verso la funzione $f \mathbb{1}_A$;*

jj) *risulti*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \quad = \quad \int |f|^p \, d\mu \quad .$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supponiamo che la successione $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f. Per il teorema precedente sono vere la j) e la jj) ; d'altra parte, per il Lemma 18.2.1, la j) implica la j$'$); in conclusione si ha che, se $\{f_n\}$ converge in media di ordine p verso f, allora sono vere le affermazioni j$'$) e jj).

La condizione è sufficiente. Osserviamo preliminarmente che, come conseguenza dell'ipotesi j$'$) e del fatto che le funzioni $f, f_1, f_2, \ldots$ appartengono tutte a $\mathcal{L}^p(\mu)$, anche adesso – così come accadeva nel precedente teorema (parte sufficiente) – è vero che ogni successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, possiede a sua volta un'estratta, $\{f_{n_{k_r}}\}$, convergente μ-quasi-ovunque verso la funzione f; per provare questa asserzione basta osservare che anche la successione estratta $\{f_{n_k}\}$ verifica l'ipotesi j$'$) e applicare a tale successione il successivo Lemma 18.3.2. Una volta fatta questa premessa, la sufficienza della condizione si ottiene ripetendo esattamente lo stesso ragionamento per assurdo, che è stato già utilizzato per dimostrare il precedente Teorema 18.3.2 (parte sufficiente).

Premettiamo al Lemma 18.3.2 una facile proposizione di carattere generale.

Proposizione 18.3.2. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, sia* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* $\mathcal{A}$*-misurabile.*

Se esiste un esponente $p \in]0, +\infty[$ *tale che*

$$\int |f|^p \, d\mu \ < \ +\infty \quad ,$$

allora l'insieme $\{f \neq 0\}$ *è unione numerabile di insiemi misurabili di misura finita.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Čebičev si ha

$$\mu\big(\{|f| \geq \tfrac{1}{n}\}\big) \ \leq \ n^p \textstyle\int |f|^p \, d\mu \ < \ +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

pertanto l'insieme

$$\{f \neq 0\} \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| \geq \tfrac{1}{n}\}$$

è unione numerabile di insiemi di misura finita.

Lemma 18.3.2. *Dati lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *e l'esponente* $p \in]0, +\infty[$*, sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *e sia* $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$*.*

Supponiamo che sia verificata la condizione j$'$)*. Allora la successione* $\{f_n\}$ *possiede un'estratta che converge* μ*-quasi-ovunque alla funzione* f*.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 18.3.2 ciascuno degli insiemi

$$\{f \neq 0\} \ , \ \{f_1 \neq 0\} \ , \ \{f_2 \neq 0\} \ , \ \ldots$$

è unione numerabile di insiemi di misura finita; la stessa cosa può allora dirsi dell'unione

$$\{f \neq 0\} \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n \neq 0\} \Big) \quad . \tag{18.3.14}$$

Supponiamo pertanto che $\{E_k\}$ sia una successione di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, con $\mu(E_k) < +\infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, tale che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_k \ \ = \ \ \{f \neq 0\} \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n \neq 0\} \Big) \quad . \tag{18.3.15}$$

Per dimostrare la tesi utilizziamo il cosiddetto *procedimento diagonale* di Cantor.

Dall'ipotesi j$'$) segue, in particolare, che la successione $\big\{f_n \mathbb{1}_{E_1}\big\}$ converge in μ-misura verso $f \mathbb{1}_{E_1}$; esiste pertanto una successione estratta dalla $\big\{f_n \mathbb{1}_{E_1}\big\}$ che converge μ-quasi-ovunque a $f \mathbb{1}_{E_1}$, cioè esiste una successione crescente di interi positivi $\{\gamma(1,n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$f_{\gamma(1,n)} \mathbb{1}_{E_1} \ \to \ f \mathbb{1}_{E_1} \quad \mu\text{-q.o.}$$

Osserviamo che anche la successione $\{f_{\gamma(1,n)}\}$, essendo estratta da $\{f_n\}$, verifica l'ipotesi j$'$) e quindi si ha, in particolare,

$$f_{\gamma(1,n)} \mathbb{1}_{E_2} \xrightarrow{\mu} f \mathbb{1}_{E_2} \quad ;$$

esiste pertanto una successione di interi positivi $\{\gamma(2,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, estratta da $\{\gamma(1,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tale che

$$f_{\gamma(2,n)} \mathbb{1}_{E_2} \to f \mathbb{1}_{E_2} \quad \mu\text{-q.o.}$$

In maniera del tutto analoga esiste una successione di interi positivi $\{\gamma(3,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, estratta da $\{\gamma(2,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tale che

$$f_{\gamma(3,n)} \mathbb{1}_{E_3} \to f \mathbb{1}_{E_3} \quad \mu\text{-q.o.} \quad ,$$

esiste una successione di interi positivi $\{\gamma(4,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, estratta da $\{\gamma(3,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tale che

$$f_{\gamma(4,n)} \mathbb{1}_{E_4} \to f \mathbb{1}_{E_4} \quad \mu\text{-q.o.} \quad ,$$

ecc. ecc.

In questo modo si dimostra l'esistenza di

$$\{\gamma(1,n)\}_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \{\gamma(2,n)\}_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \ldots \ , \ \{\gamma(k,n)\}_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \ldots \tag{18.3.16}$$

successioni crescenti di interi positivi, ciascuna estratta dalla precedente, tali da risultare

$$f_{\gamma(k,n)} \mathbb{1}_{E_k} \to f \mathbb{1}_{E_k} \quad \mu\text{-q.o.} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{18.3.17}$$

(ovviamente la dimostrazione rigorosa di questo fatto si ottiene procedendo per induzione; invitiamo lo studente a svolgere nei dettagli tale dimostrazione per induzione).

Per comprendere meglio il ragionamento che segue è utile scrivere per elenco le successioni (18.3.16), disponendo i termini di ciascuna di esse su una riga:

$$\begin{array}{ccccccc}
\gamma(1,1) & \gamma(1,2) & \gamma(1,3) & \ldots & \gamma(1,n) & \gamma(1,n+1) & \ldots \\
\gamma(2,1) & \gamma(2,2) & \gamma(2,3) & \ldots & \gamma(2,n) & \gamma(2,n+1) & \ldots \\
\gamma(3,1) & \gamma(3,2) & \gamma(3,3) & \ldots & \gamma(3,n) & \gamma(3,n+1) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\gamma(k,1) & \gamma(k,2) & \gamma(k,3) & \ldots & \gamma(k,n) & \gamma(k,n+1) & \ldots \\
\gamma(k+1,1) & \gamma(k+1,2) & \gamma(k+1,3) & \ldots & \gamma(k+1,n) & \gamma(k+1,n+1) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{18.3.18}$$

ed osservare esplicitamente che tutti gli elementi di una riga figurano anche in ognuna delle righe soprastanti.

Osserviamo ancora che per ogni $k \in \mathbb{N}$ valgono le disuguaglianze

$$\gamma(k,n) \ < \ \gamma(k,n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ , \tag{18.3.19}$$

$$\gamma(k,n) \ \leq \ \gamma(k+1,n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{18.3.20}$$

La (18.3.19) è ovvia, poiché $\gamma(k,n)$ e $\gamma(k,n{+}1)$ sono due termini consecutivi della medesima successione crescente $\{\gamma(k,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per dimostrare la (18.3.20) osserviamo che, essendo $\{\gamma(k{+}1,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ estratta da $\{\gamma(k,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, esiste una successione crescente di interi positivi $\{z_n\}$ tale che

$$\gamma(k+1,1) \ = \ \gamma(k,z_1) \ , \ \gamma(k+1,2) \ = \ \gamma(k,z_2) \ , \ \ldots \ , \ \gamma(k+1,n) \ = \ \gamma(k,z_n) \ , \ldots \ ,$$

pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo

$$z_n \ \geq \ n \quad (^4) \ ,$$

risulta

$$\gamma(k+1,n) \ = \ \gamma(k,z_n) \ \geq \ \gamma(k,n) \ .$$

Dalle (18.3.19) e (18.3.20) segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\gamma(n,n) \ < \ \gamma(n,n+1) \ \leq \ \gamma(n+1,n+1) \ ,$$

pertanto anche la successione "diagonale"

$$\{\gamma(n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è crescente, dunque la successione

$$\{f_{\gamma(n,n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è estratta da $\{f_n\}$.

Dimostriamo che

$$f_{\gamma(n,n)} \ \to \ f \quad \mu\text{-q.o.}$$

Per la (18.3.17) esiste una successione $\{A_k\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, con $\mu(A_k^c) < \ +\infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, tale da risultare, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \big(f_{\gamma(k,n)} \mathbb{1}_{E_k}\big)(\omega) \ = \ \big(f \mathbb{1}_{E_k}\big)(\omega) \qquad \forall \omega \in A_k \ . \tag{18.3.21}$$

(^{4}) Ricordiamo che, se $\{z_n\}$ è una successione crescente di numeri interi positivi, allora si dimostra facilmente per induzione che è

$$z_n \ \geq \ n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Consideriamo l'insieme

$$A \;=\; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \ldots \quad ,$$

per il quale, ovviamente, si ha $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A^{\rm c}) = \mu(A_1^{\rm c} \cup A_2^{\rm c} \cup \ldots A_k^{\rm c} \cup \ldots) = 0$, e dimostriamo che è

$$\lim_{n\to\infty} f_{\gamma(n,n)}(\omega) \;=\; f(\omega) \qquad\qquad \forall \omega \in A \; .$$

Fissato un qualunque punto $\omega \in A$, distinguiamo due casi.
Se $\omega \notin E_1 \cup E_2 \cup \ldots$, allora, per la (18.3.15), si ha

$$f(\omega) \;=\; f_1(\omega) \;=\; f_2(\omega) \;=\; \ldots \;=\; 0 \quad ,$$

pertanto

$$\lim_{n\to\infty} f_{\gamma(n,n)}(\omega) \;=\; 0 \;=\; f(\omega) \quad .$$

Se, invece, esiste $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che $\omega \in E_{\overline{k}}$, allora osserviamo che, essendo $\omega \in A$, si ha, in particolare, $\omega \in A_{\overline{k}}$ e quindi, grazie alla (18.3.21),

$$\lim_{n\to\infty} f_{\gamma(\overline{k},n)}(\omega) \;=\; \lim_{n\to\infty} \Big(f_{\gamma(\overline{k},n)} \mathbb{1}_{E_{\overline{k}}} \Big)(\omega) \;=\; \big(f \mathbb{1}_{E_{\overline{k}}} \big)(\omega) \;=\; f(\omega) \quad .$$

Notiamo inoltre, ricordando quanto abbiamo osservato a proposito delle righe della "matrice" (18.3.18), che tutti gli elementi $\gamma(n,n)$, con $n \geq \overline{k}$, appartengono all'insieme

$$\{\gamma(\overline{k},n) \;:\; n \in \mathbb{N}\} \quad ,$$

pertanto la successione

$$\big\{ f_{\gamma(n,n)}(\omega) \big\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \geq \overline{k}}} \quad ,$$

cioè

$$f_{\gamma(\overline{k},\overline{k})}(\omega) \; , \; f_{\gamma(\overline{k}+1,\overline{k}+1)}(\omega) \; , \; f_{\gamma(\overline{k}+2,\overline{k}+2)}(\omega) \; , \; \ldots \quad ,$$

è estratta da $\big\{ f_{\gamma(\overline{k},n)}(\omega) \big\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi converge a $f(\omega)$. È allora evidente che anche l'intera successione $\big\{ f_{\gamma(n,n)}(\omega) \big\}$ converge a $f(\omega)$. Ciò completa la dimostrazione.

Abbiamo notato, nella dimostrazione del Teorema 18.3.2$'$, che, qualora le funzioni $f, f_1, f_2, \ldots$ appartengano a $\mathcal{L}^p(\mu)$, la condizione j$'$) implica l'altra:

k$'$) *ogni successione* $\{f_{n_k}\}$*, estratta da* $\{f_n\}$*, possiede una successione estratta,* $\{f_{n_{k_r}}\}$*, convergente μ-quasi-ovunque verso la funzione* f.

Il legame che c'è tra le condizioni j$'$) e k$'$) in generale, cioè quando $f, f_1, f_2, \ldots$ sono solo funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$, è dato dalla proposizione seguente.

Proposizione 18.3.2. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e sia* $f \in M(\mathcal{A})$.

Vale l'implicazione

$$\mathrm{k}') \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{j}') \ .$$

Viceversa, se la misura μ *è* σ*-finita, allora si ha pure*

$$\mathrm{j}') \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{k}') \ .$$

Dimostrazione. Proviamo l'implicazione k$'$) $\Longrightarrow$ j$'$) . Supponiamo, per assurdo, che esista un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) < +\infty$, tale che $\{f_n \mathbb{1}_A\}$ non sia convergente in misura rispetto a μ verso la funzione $f\mathbb{1}_A$. Ciò vuol dire che esistono due numeri $\varepsilon, \delta > 0$ ed una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, tali da risultare

$$\mu\big(\{|f_{n_k}\mathbb{1}_A - f\mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\}\big) \ \geq \ \delta \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ . \tag{18.3.22}$$

Per ipotesi la successione $\{f_{n_k}\}$ possiede una successione estratta, $\{f_{n_{k_r}}\}$, convergente μ-quasi-ovunque verso la funzione f. Per il Lemma 18.2.2 si ha pure

$$f_{n_{k_r}}\mathbb{1}_A \xrightarrow{\mu} f\mathbb{1}_A$$

e quindi

$$\lim_{r\to\infty} \mu\big(\{|f_{n_{k_r}}\mathbb{1}_A - f\mathbb{1}_A| \geq \varepsilon\}\big) \ = \ 0 \quad ,$$

ma ciò, evidentemente, contraddice la (18.3.2).

La dimostrazione dell'implicazione j$'$) $\Longrightarrow$ k$'$), quando la misura μ è σ-finita, si ottiene in maniera del tutto analoga a quella del Lemma 18.3.2 (usando il procedimento diagonale di Cantor) ed è lasciata per esercizio allo studente.

Esercizio 18.3.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 18.3.2.

L'esempio seguente fa vedere che, se la misura μ non è σ-finita, non vale l'implicazione j$'$) $\Longrightarrow$ k$'$).

Esempio 18.3.1. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ il seguente spazio di misura:

$$\Omega \ = \ \{a, b\} \quad ; \quad \mathcal{A} \ = \ \mathcal{P}(\Omega) \quad ; \quad \mu(\{a\}) < +\infty \ , \ \mu(\{b\}) = +\infty$$

e sia $\{f_n\}$ la successione così definita:

$$\{f_n\} \ = \ \big\{n\mathbb{1}_{\{b\}}\big\} \ .$$

Allora è vero che

$$f_n\mathbb{1}_A \xrightarrow{\mu} 0 \cdot \mathbb{1}_A \qquad \forall A \in \mathcal{A} \ : \ \mu(A) < +\infty \quad ,$$

ma, evidentemente, non c'è alcuna successione estratta dalla $\{f_n\}$ che converge μ-quasi-ovunque.