# 17. Il teorema di Radon-Nikodym.

Nel Capitolo 13 (n. 13.10) abbiamo introdotto il concetto di misura con segno dotata di densità rispetto ad una data misura $\mu$. In questo capitolo ci occupiamo della ricerca di condizioni (necessarie e/o sufficienti) affinché una misura con segno $\varphi$, definita su una $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$, abbia densità rispetto ad un'assegnata misura $\mu$, anch'essa definita su $\mathcal{A}$. Il risultato fondamentale in proposito è il teorema di Radon-Nikodym, il quale asserisce che, se la misura $\mu$ è $\sigma$-finita, allora la $\varphi$ è dotata di densità rispetto a $\mu$ se e soltanto se $\varphi$ gode della proprietà di essere *assolutamente continua* rispetto a $\mu$, cioè di assumere valore zero su ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) = 0$. La stessa ipotesi di $\sigma$-finitezza di $\mu$ assicura inoltre – convenendo di identificare due funzioni misurabili se sono uguali quasi ovunque – che la densità, quando esiste, è unica.

## 17.1. Integrazione rispetto ad una misura con densità.

Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa.

La funzione $f$ è $\mu$-quasi-integrabile e quindi ha senso considerare la misura con segno $f\mu$ avente densità $f$ rispetto a $\mu$. Sappiamo anzi (Teorema 13.10.3) che in questo caso la $f\mu$ è una misura. Si viene pertanto a costituire un nuovo spazio di misura: $(\Omega, \mathcal{A}, f\mu)$.

La proposizione che segue consente di ricondurre il calcolo degli integrali nello spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, f\mu)$ al calcolo di integrali nello spazio di misura originario $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

**Proposizione 17.1.1.** (Integrazione rispetto ad una misura con densità). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathcal{A}$-misurabili, con $f \geq 0$.*

*La funzione $g$ è $f\mu$-quasi-integrabile se e solo se il prodotto $gf$ è $\mu$-quasi-integrabile. Inoltre, se $g$ è $f\mu$-quasi-integrabile, si ha l'uguaglianza*

$$\int g \, d(f\mu) \;=\; \int gf \, d\mu \quad . \tag{17.1.1}$$

*Dimostrazione.* Se la funzione $g$ è a valori non negativi, allora $g$ è $f\mu$-quasi-integrabile e, per lo stesso motivo, anche il prodotto $gf$ è $\mu$-quasi-integrabile; pertanto l'unica cosa da provare in questo caso è l'uguaglianza (17.1.1). Supponiamo dapprima che $g$ sia una funzione $\mathcal{A}$-elementare e sia

$$g \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

una sua rappresentazione normale; risulta allora

$$\int g\, d(f\mu) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (f\mu)(A_i) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{A_i} f\, d\mu \;=$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int \mathbb{1}_{A_i} f\, d\mu \;=\; \int \left( \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) f\, d\mu \;=\; \int g f\, d\mu \quad ,$$

dunque è vera la (17.1.1). Per dimostrare che la (17.1.1) vale per una qualsiasi funzione $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa $g$ basta considerare una qualunque successione $\{v_n\}$ di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $v_n \uparrow g$ ed osservare che si ha

$$\int g\, d(f\mu) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n\, d(f\mu) \;=$$

(per quanto già dimostrato)

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n f\, d\mu \;=$$

(per il Teorema di Beppo Levi)

$$= \int g f\, d\mu \quad .$$

Infine, per dimostrare la proposizione nel caso generale, osserviamo che, essendo $f \geq 0$, si ha

$$g^+ f \;=\; (gf)^+ \qquad , \qquad g^- f \;=\; (gf)^-$$

e quindi, grazie a quello che è stato già provato,

$$\int g^+\, d(f\mu) \;=\; \int g^+ f\, d\mu \;=\; \int (gf)^+\, d\mu \quad ,$$

$$\int g^-\, d(f\mu) \;=\; \int g^- f\, d\mu \;=\; \int (gf)^-\, d\mu \quad ;$$

dalle precedenti uguaglianze segue facilmente l'asserto.

Supponiamo adesso che siano verificate le ipotesi della precedente proposizione e che la funzione $g$ risulti $f\mu$-quasi-integrabile, sicché il prodotto $gf$ è $\mu$-quasi-integrabile. Ha allora senso considerare le due misure con segno con densità $g(f\mu)$ e $(gf)\mu$. Proviamo che tali misure con segno coincidono.

**Proposizione 17.1.2.** *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathcal{A}$-misurabili, con $f \geq 0$. Supponiamo inoltre che $g$ sia $f\mu$-quasi-integrabile.*

*Risulta allora*

$$g(f\mu) \; = \; (gf)\mu \quad . \tag{17.1.2}$$

*Dimostrazione.* Sia $A \in \mathcal{A}$. Dai Teoremi 13.10.2 e 13.10.1 segue che la funzione $g\mathbb{1}_A$ è $f\mu$-quasi-integrabile; pertanto, per la Proposizione 17.1.1, la funzione $g\mathbb{1}_A f$ è $\mu$-quasi-integrabile e si ha

$$\int g\mathbb{1}_A \, d(f\mu) \; = \; \int g\mathbb{1}_A f \, d\mu \quad ,$$

cioè (Teorema 13.10.1)

$$\int_A g \, d(f\mu) \; = \; \int_A gf \, d\mu \quad ,$$

vale a dire

$$[g(f\mu)](A) \; = \; [(gf)\mu](A) \quad .$$

Per l'arbitrarietà dell'insieme $A \in \mathcal{A}$ possiamo concludere che è $g(f\mu) = (gf)\mu$.

## 17.2. Unicità della densità (1).

Poiché due funzioni uguali quasi-ovunque hanno integrali uguali, è immediato provare che, se due funzioni $\mu$-quasi-integrabili $f, g$ sono uguali $\mu$-quasi-ovunque, allora le corrispondenti misure con densità $f\mu$, $g\mu$ coincidono.

**Proposizione 17.2.1.** *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e $\mu$-quasi-integrabili.*

*Supponiamo che sia*

$$f = g \qquad \mu\text{-q.o.} \tag{17.2.1}$$

*Si ha allora*

$$f\mu \; = \; g\mu \quad .$$

*Dimostrazione.* Dalla (17.2.1) segue che per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ risulta

$$f\mathbb{1}_A = g\mathbb{1}_A \qquad \mu\text{-q.o.}$$

e quindi (Teorema 13.8.1)

$$\int f\mathbb{1}_A \, d\mu \; = \; \int g\mathbb{1}_A \, d\mu \quad ,$$

cioè

$$(f\mu)(A) \;=\; (g\mu)(A) \;\; ;$$

per l'arbitrarietà dell'insieme $A \in \mathcal{A}$ concludiamo che è $f\mu = g\mu$.

Osserviamo che, in generale, da $f\mu = g\mu$ non segue $f = g$ $\mu$-q.o. Ciò è mostrato dal successivo esempio.

**Esempio 17.2.1.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ lo spazio di misura così definito:

$$\Omega \;=\; \{a, b\} \quad ; \quad \mathcal{A} \;=\; \mathcal{P}(\Omega) \quad ; \quad \mu(\{a\}) \;=\; 0 \;\; , \;\; \mu(\{b\}) \;=\; +\infty \;\; .$$

Allora, considerate le due funzioni costanti $f = 1$ e $g = 2$, si ha

$$f\mu \;=\; g\mu \;=\; \mu \;\; ,$$

ma non è vero che $f = g$ $\mu$-q.o.

Si ha però la seguente proposizione.

**Proposizione 17.2.2.** *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e $\mu$-quasi-integrabili.*

*Supponiamo che sia*

$$f\mu \;=\; g\mu$$

*e che una delle due funzioni $f$ e $g$ sia $\mu$-integrabile. Si ha allora*

$$f = g \qquad \mu\text{-q.o.}$$

*Dimostrazione.* Essendo

$$(f\mu)(\Omega) \;=\; (g\mu)(\Omega) \;\; ,$$

l'ipotesi che una delle due funzioni $f$ e $g$ sia $\mu$-integrabile implica che anche l'altra funzione è $\mu$-integrabile.

La tesi da dimostrare è

$$\mu(\{f \neq g\}) \;=\; 0 \;\; ;$$

poiché

$$\{f \neq g\} \;=\; \{f > g\} \cup \{f < g\} \;\; ,$$

ciò equivale a

$$\mu(\{f > g\}) \;=\; \mu(\{f < g\}) \;=\; 0 \;\; .$$

Poniamo

$$M \;=\; \{f > g\} \;\; .$$

Per il Teorema 13.10.1 si ha

$$\int f\mathbb{1}_M \, d\mu \;=\; (f\mu)(M) \quad , \quad \int g\mathbb{1}_M \, d\mu \;=\; (g\mu)(M) \quad ,$$

pertanto, dato che la misura con segno $f\mu = g\mu$ è finita (Teorema 13.10.3), le due funzioni $f\mathbb{1}_M$, $g\mathbb{1}_M$ sono entrambe $\mu$-integrabili; è inoltre evidente, per la definizione di $M$, che la differenza $f\mathbb{1}_M - g\mathbb{1}_M$ è una funzione definita in tutto $\Omega$ che assume valori non negativi. Si ha allora

$$\int \big(f\mathbb{1}_M - g\mathbb{1}_M\big)\, d\mu \;=\; \int f\mathbb{1}_M \, d\mu \;-\; \int g\mathbb{1}_M \, d\mu \;=\; (f\mu)(M) \;-\; (g\mu)(M) \;=\; 0$$

e quindi (Proposizione 13.8.1)

$$f\mathbb{1}_M \;-\; g\mathbb{1}_M \;=\; 0 \quad \mu\text{-q.o.} \quad ,$$

vale a dire

$$\mu\big(\{f\mathbb{1}_M \;\neq\; g\mathbb{1}_M\}\big) \;=\; 0 \quad ,$$

cioè

$$\mu(M) = 0 \quad .$$

Abbiamo così provato che è

$$\mu(\{f \;>\; g\}) = 0 \quad .$$

Analogamente si prova che è pure

$$\mu(\{f \;<\; g\}) = 0 \quad .$$

## 17.3. Assoluta continuità.

Passiamo ora ad occuparci della questione dell'esistenza della densità ed osserviamo, come prima cosa, che si ha la seguente condizione necessaria.

**Proposizione 17.3.1.** *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-quasi-integrabile.*

*Allora, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) = 0$, risulta $(f\mu)(A) = 0$.*

*Dimostrazione.* Da $\mu(A) = 0$ segue $f\mathbb{1}_A = 0$ $\mu$-q.o. e quindi

$$(f\mu)(A) \;=\; \int f\mathbb{1}_A \, d\mu \;=\; 0 \quad .$$

**Definizione 17.3.1.** (*Misure con segno assolutamente continue rispetto ad una data misura*). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\varphi$ una misura con segno definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$.

Si dice che la misura con segno $\varphi$ è *assolutamente continua rispetto alla misura* $\mu$, e si scrive $\varphi {<}{<} \mu$, se vale la seguente implicazione

$$\text{(AC)} \qquad A \in \mathcal{A} \;\;,\;\; \mu(A) \;=\; 0 \;\;\Longrightarrow\;\; \varphi(A) \;=\; 0 \quad .$$

Usando la terminologia introdotta con la precedente definizione, la Proposizione 17.3.1 può essere riformulata nel seguente modo.

**Proposizione 17.3.2.** (Condizione necessaria per l'esistenza della densità). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\varphi$ una misura con segno definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$.*

*Condizione necessaria affinché la misura con segno $\varphi$ ammetta densità rispetto alla misura $\mu$ è che $\varphi$ sia assolutamente continua rispetto a $\mu$.*

La condizione necessaria espressa dalla precedente proposizione non è in generale sufficiente.

**Esempio 17.3.1.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ lo spazio di misura definito nel modo seguente:

$$\Omega \;\text{ è un insieme infinito, non numerabile ;}$$

$$\mathcal{A} \;=\; \{\, A \in \mathcal{P}(\Omega) \;:\; A \text{ è numerabile oppure } A^{c} \text{ è numerabile} \,\} \;;$$

$$\mu \text{ è la restrizione alla } \sigma\text{-algebra } \mathcal{A} \text{ della misura che conta i punti .}$$

Sia $\varphi$ la misura su $\mathcal{A}$ definita ponendo (cfr. l'Esempio 5.3.4)

$$\varphi(A) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è numerabile,} \\ 1 & \text{se } A^{c} \text{ è numerabile.} \end{cases}$$

Osserviamo che da $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ segue $A = \emptyset$ e quindi $\varphi(A) = 0$; pertanto è $\varphi \ll \mu$.

Invece $\varphi$ non ammette densità rispetto a $\mu$. Ciò si dimostra facilmente ragionando per assurdo: se esistesse una funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-quasi-integrabile, tale che $\varphi = f\mu$, allora, per ogni elemento $\overline{\omega} \in \Omega$, risulterebbe

$$0 \;=\; \varphi(\{\overline{\omega}\}) \;=\; (f\mu)(\{\overline{\omega}\}) \;=\; \int f \mathbb{1}_{\{\overline{\omega}\}} \, d\mu \;=$$

(dato che le funzioni $f\mathbb{1}_{\{\overline{\omega}\}}$ e $f(\overline{\omega})\mathbb{1}_{\{\overline{\omega}\}}$ sono uguali)

$$=\; \int f(\overline{\omega}) \mathbb{1}_{\{\overline{\omega}\}} \, d\mu \;=\; f(\overline{\omega})\mu(\{\overline{\omega}\}) \;=\; f(\overline{\omega}) \;\;;$$

conseguentemente si avrebbe $f = 0$ e quindi $\varphi = 0$, ma ciò è assurdo.

Completiamo il paragrafo osservando che l'assoluta continuità di una misura con segno equivale alla assoluta continuità delle sue variazioni.

**Proposizione 17.3.3.** *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\varphi$ una misura con segno definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$.*

*Sono fatti equivalenti:*

1) $\varphi << \mu$ ;

2) $\varphi^+ << \mu$ e $\varphi^+ << \mu$ ;

3) $\varphi^\pm << \mu$ .

*Dimostrazione.* 1) $\implies$ 2) . Sia $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) = 0$. Per ogni insieme $B \in \mathcal{A}$ tale che $B \subseteq A$ si ha $\mu(B) = 0$ e quindi, per l'ipotesi 1), $\varphi(B) = 0$ . Conseguentemente, per la definizione di $\varphi^+$ e $\varphi^-$, risulta $\varphi^+(A) = \varphi^-(A) = 0$.

Le implicazioni 2) $\implies$ 3) e 3) $\implies$ 1) seguono immediatamente dalla definizione di $\varphi^\pm$ e dalla disuguaglianza $|\varphi| \leq \varphi^\pm$.

## 17.4. Il teorema di Radon-Nikodym.

Premettiamo al teorema di Radon-Nikodym due lemmi. Il primo fornisce una caratterizzazione della $\sigma$-finitezza; l'altro è una facile conseguenza del teorema della partizione di Hahn.

**Lemma 17.4.1.** *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.*

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la misura $\mu$ sia $\sigma$-finita è che esista una funzione $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-integrabile, tale che*

$$0 \ < \ h(\omega) \ < \ +\infty \qquad \forall \omega \in \Omega \ . \tag{17.4.1}$$

*Dimostrazione.* La condizione è necessaria. Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti e tali che $\mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Fissiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un numero reale positivo $\alpha_n$ tale che $\alpha_n \mu(A_n) \leq 2^{-n}$ e poniamo

$$h \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n} \quad .$$

La funzione $h$ è $\mathcal{A}$-misurabile e verifica, ovviamente, la (17.4.1). Inoltre, applicando il teorema di integrazione per serie, si ha che $h$ è $\mu$-integrabile.

La condizione è sufficiente. Poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n \ = \ \left\{h \ \geq \ \tfrac{1}{n}\right\}$$

e osserviamo che, essendo per ipotesi $h > 0$ in tutto $\Omega$, la successione $\{B_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, che così si ottiene, è tale che $B_n \uparrow \Omega$. Si ha inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la disuguaglianza di Čebičev,

$$\mu(B_n) \ \leq \ n \int h \, d\mu \ < \ +\infty \quad ,$$

dunque $\mu$ è $\sigma$-finita.

**Corollario 17.4.1.** *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura, con* $\mu$ $\sigma$*-finita*

*Esiste una funzione* $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $\mathcal{A}$*-misurabile e non negativa, tale che la corrispondente misura con densità* $h\mu$ *è finita e vale inoltre, per* $A \in \mathcal{A}$*, l'equivalenza*

$$\mu(A) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (h\mu)(A) \;=\; 0 \;\; .$$

*Dimostrazione.* Per il lemma precedente esiste una funzione $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-integrabile, verificante la (17.4.1). Poiché la funzione $h$ è $\mu$-integrabile, la misura $h\mu$ è finita. Inoltre, se $A \in \mathcal{A}$, per la Proposizione 17.3.1 vale l'implicazione

$$\mu(A) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad (h\mu)(A) \;=\; 0 \;\; .$$

Proviamo che vale pure l'implicazione contraria: se è $(h\mu)(A) = 0$, cioè $\int h\mathbb{1}_A \, d\mu = 0$, allora, per la Proposizione 13.8.1, si ha $h\mathbb{1}_A = 0$ $\mu$-q.o.; essendo $h > 0$ in tutto $\Omega$, ciò equivale a dire che è $\mu(A) = 0$.

**Lemma 17.4.2.** *Sia* $\mathcal{A}$ *una* $\sigma$*-algebra in un insieme* $\Omega$ *e siano* $\sigma$, $\tau$ *due misure finite su* $\mathcal{A}$*, tali che* $\sigma(\Omega) < \tau(\Omega)$*.*

*Esiste un insieme* $\Omega' \in \mathcal{A}$ *tale che*

$$\sigma(\Omega') \;<\; \tau(\Omega') \;\; ,$$

$$\sigma(A) \;\leq\; \tau(A) \qquad\qquad \forall A \in \Omega' \cap \mathcal{A} \; .$$

*Dimostrazione.* La differenza $\varphi = \tau - \sigma$ è una misura con segno finita, definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$. Consideriamo una partizione di Hahn $\Gamma^+, \Gamma^-$ relativa a $\varphi$ e poniamo $\Omega' = \Gamma^+$. Si ha

$$\varphi(\Omega') \;=\; \varphi(\Omega) \,-\, \varphi(\Gamma^-) \;\geq\; \varphi(\Omega) \;=\; \tau(\Omega) \,-\, \sigma(\Omega) \;>\; 0$$

e quindi

$$\sigma(\Omega') < \tau(\Omega') \;\; ;$$

risulta inoltre, per ogni insieme $A \in \Omega' \cap \mathcal{A} = \Gamma^+ \cap \mathcal{A}$,

$$\tau(A) \,-\, \sigma(A) \;=\; \varphi(A) \;\geq\; 0 \;\; .$$

**Teorema 17.4.1.** (Teorema di Radon-Nikodym). *Siano* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura, con* $\mu$ $\sigma$*-finita, e* $\varphi$ *una misura con segno su* $\mathcal{A}$*.*

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la misura con segno* $\varphi$ *ammetta densità rispetto a* $\mu$ *è che sia* $\varphi \ll \mu$*.*

*Dimostrazione.* La necessità della condizione è già stata dimostrata (Proposizione 17.3.2). Per dimostrarne la sufficienza distinguiamo quattro casi.

*Primo caso*: $\varphi$ è una misura e si ha $\varphi(\Omega) < +\infty$, $\mu(\Omega) < +\infty$ .

Consideriamo l'insieme $\mathcal{G}$ costituito da tutte le funzioni $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabili e non negative, tali che $g\mu \leq \varphi$, cioè

$$(g\mu)(A) \ \leq \ \varphi(A) \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{A} \ .$$

Osserviamo che la funzione identicamente nulla appartiene a $\mathcal{G}$, quindi $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Osserviamo inoltre che da $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ segue che anche la funzione

$$g \ = \ \max\{g_1, g_2\}$$

appartiene a $\mathcal{G}$; infatti, posto

$$A_1 \ = \ \{g_1 \ \geq \ g_2\} \quad , \quad A_2 \ = \ \{g_1 \ < \ g_2\} \ \ ,$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$ risulta

$$(g\mu)(A) \ = \ (g\mu)(A \cap A_1) \ + \ (g\mu)(A \cap A_2) \ =$$

$$= \int g \mathbb{1}_{A \cap A_1} \, d\mu \ + \ \int g \mathbb{1}_{A \cap A_2} \, d\mu \ =$$

(dato che $g\mathbb{1}_{A \cap A_1} = g_1 \mathbb{1}_{A \cap A_1}$ e $g\mathbb{1}_{A \cap A_2} = g_2 \mathbb{1}_{A \cap A_2}$)

$$= \int g_1 \mathbb{1}_{A \cap A_1} \, d\mu \ + \ \int g_2 \mathbb{1}_{A \cap A_2} \, d\mu \ =$$

$$= \ (g_1\mu)(A \cap A_1) \ + \ (g_2\mu)(A \cap A_2) \ \leq \ \varphi(A \cap A_1) \ + \ \varphi(A \cap A_2) \ = \ \varphi(A) \ \ .$$

Poniamo

$$\gamma \ = \ \sup\left\{ \int g \, d\mu \ : \ g \in \mathcal{G} \right\}$$

ed osserviamo che, essendo

$$\int g \, d\mu \ = \ (g\mu)(\Omega) \ \leq \ \varphi(\Omega) \qquad\qquad \forall g \in \mathcal{G} \ ,$$

risulta $\gamma < +\infty$. Dimostriamo che esiste $f \in \mathcal{G}$ tale che $\int f \, d\mu = \gamma$. A tale scopo, fissata una qualunque successione $\{g_n^*\}$ di funzioni appartenenti a $\mathcal{G}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n^* \, d\mu \ = \ \gamma$$

(l'esistenza di una successione siffatta è assicurata dalle proprietà dell'estremo superiore), consideriamo la successione $\{g_n\}$ definita ponendo

$$g_n \;=\; \max\{g_1^*, \dots, g_n^*\} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$

sicché risulta

$$g_n \;\leq\; g_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;.$$

Grazie ad un'osservazione fatta in precedenza si ha che pure le funzioni $g_n$, $n \in \mathbb{N}$, appartengono a $\mathcal{G}$; inoltre, dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $g_n \geq g_n^*$ e quindi

$$\int g_n \, d\mu \;\geq\; \int g_n^* \, d\mu \quad ,$$

anche per la $\{g_n\}$ è vero che

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \;=\; \gamma \quad .$$

Consideriamo la funzione

$$f \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \quad .$$

Per il teorema di Beppo Levi, per ogni $A \in \mathcal{A}$, si ha

$$(f\mu)(A) \;=\; \int f \mathbb{1}_A \, d\mu \;=$$

$$= \int \sup_{n\in\mathbb{N}} (g_n \mathbb{1}_A) \, d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (g_n \mathbb{1}_A) \, d\mu \;=$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} (g_n\mu)(A) \;\leq\; \varphi(A) \quad ,$$

quindi $f \in \mathcal{G}$; inoltre, sempre per il teorema di Beppo Levi, si ha

$$\int f \, d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n \, d\mu \;=\; \gamma \quad .$$

Dimostriamo che è $\varphi = f\mu$.

Osserviamo, a tale scopo, che, essendo $f\mu \leq \varphi$, la funzione d'insieme $\tau = \varphi - f\mu$ è una misura sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$, per cui è sufficiente provare che è $\tau(\Omega) = 0$.

Supponiamo per assurdo che sia $\tau(\Omega) > 0$. Essendo $\varphi {<\!\!<} \mu$, $f\mu {<\!\!<} \mu$, si ha pure $\tau {<\!\!<} \mu$, per cui la disuguaglianza $\tau(\Omega) > 0$ implica l'altra $\mu(\Omega) > 0$.

Denotato con $\beta$ il numero positivo

$$\frac{\tau(\Omega)}{2\mu(\Omega)} \quad ,$$

si ha

$$\tau(\Omega) \;=\; 2\beta\mu(\Omega) \;>\; \beta\mu(\Omega)$$

e quindi, per il Lemma 17.4.2, esiste un insieme $\Omega' \in \mathcal{A}$ tale da aversi

$$\tau(\Omega') \;>\; \beta\mu(\Omega') \tag{17.4.2}$$

e inoltre

$$\tau(A) \;\geq\; \beta\mu(A) \qquad\qquad \forall A \in \Omega' \cap \mathcal{A}\ . \tag{17.4.3}$$

Per completare la dimostrazione relativa a questo caso, facendo vedere che l'ipotesi $\tau(\Omega) > 0$ conduce ad una contraddizione, consideriamo la funzione $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa

$$f_0 \;=\; f \;+\; \beta 1\!\!1_{\Omega'} \quad .$$

Tale funzione appartiene a $\mathcal{G}$; infatti, qualunque sia l'insieme $A \in \mathcal{A}$, si ha

$$(f_0\mu)(A) \;=\; \int \big(f + \beta 1\!\!1_{\Omega'}\big) 1\!\!1_A \, d\mu \;=\; (f\mu)(A) \;+\; \beta\mu(A \cap \Omega') \;\leq$$

(per la (17.4.3))

$$\leq\; (f\mu)(A) \;+\; \tau(A \cap \Omega') \;\leq\; (f\mu)(A) \;+\; \tau(A) \;=\; \varphi(A) \quad .$$

D'altra parte si ha

$$\int f_0 \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu \;+\; \beta\mu(\Omega') \;=\; \gamma \;+\; \beta\mu(\Omega') \quad ;$$

inoltre, per la (17.4.2), si ha $\tau(\Omega') > 0$ e quindi, dato che $\tau \ll \mu$, si ha pure $\mu(\Omega') > 0$; ne segue la contraddizione

$$\int f_0 \, d\mu \;>\; \gamma \;=\; \sup\left\{ \int g \, d\mu \;:\; g \in \mathcal{G} \right\} \quad .$$

*Secondo caso*: $\varphi$ è una misura e si ha $\varphi(\Omega) = +\infty$, $\mu(\Omega) < +\infty$ .

Proviamo che esiste una successione $\Omega_0$, $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\ldots$ di insiemi appartenenti alla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, tali che

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n \;=\; \Omega$$

e aventi inoltre le seguenti due proprietà:

i) $A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A} \implies \varphi(A) = \mu(A) = 0$ oppure $\mu(A) > 0$ e $\varphi(A) = +\infty$;

ii) $\varphi(\Omega_n) \;<\; +\infty \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

Per dimostrare ciò consideriamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{Q} \; = \; \{Q \in \mathcal{A} \; : \; \varphi(A) \; < \; +\infty\}$$

e poniamo

$$\alpha \; = \; \sup\{\mu(Q) \; : \; Q \in \mathcal{Q}\} \quad .$$

Dato che la misura $\mu$ è finita, si ha $\alpha < +\infty$. Denotata con $Q_1^*, \; Q_2^*, \; \ldots, \; Q_n^*, \; \ldots$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{Q}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \mu(Q_n^*) \; = \; \alpha$$

(successione che esiste per le proprietà dell'estremo superiore), poniamo

$$Q_n \; = \; Q_1^* \cup \ldots \cup Q_n^* \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; ;$$

è immediato verificare che anche la successione $Q_1, \; Q_2, \; \ldots, \; Q_n, \; \ldots$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{Q}$, che così si ottiene, è tale che

$$\lim_{n \to \infty} \mu(Q_n) \; = \; \alpha \quad ;$$

si ha inoltre, ovviamente,

$$Q_n \; \subseteq \; Q_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

Consideriamo la successione di insiemi $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$, ottenuta ponendo

$$\Omega_1 \; = \; Q_1 \quad , \quad \Omega_n \; = \; Q_n \setminus Q_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \quad ,$$

$$\Omega_0 \; = \; \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right)^{\mathrm{c}} \quad ,$$

e verifichiamo che tale successione ha le proprietà richieste.

È ovvio che gli insiemi $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ appartengono ad $\mathcal{Q}$, sono a due a due disgiunti ed hanno per unione l'insieme $\Omega$. È altresì facile verificare che vale la ii); infatti si ha

$$\varphi(\Omega_n) \; \leq \; \varphi(Q_n) \; < \; +\infty \qquad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Dimostriamo che vale pure la i). A tale scopo, essendo per ipotesi $\varphi \ll \mu$, è sufficiente provare che vale l'implicazione

$$A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A} \; , \; \varphi(A) < +\infty \implies \mu(A) = 0 \quad .$$

Per dimostrare ciò osserviamo che, dato che l'insieme $A$ appartiene a $\mathcal{Q}$ per ipotesi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha pure $A \cup Q_n \in \mathcal{Q}$ e quindi (tenendo presente che, per la definizione di $\Omega_0$, gli insiemi $A$ e $Q_n$ sono disgiunti)

$$\mu(A) \; + \; \mu(Q_n) \; = \; \mu(A \cup Q_n) \; \leq \; \alpha \quad ;$$

dalla precedente disuguaglianza, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene $\mu(A) \leq 0$, dunque $\mu(A) = 0$.

Poniamo, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ ed ogni $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_n(A) \ = \ \mu(A \cap \Omega_n) \ = \ \big(\mathbb{1}_{\Omega_n} \mu\big)(A) \ \ ,$$

$$\varphi_n(A) \ = \ \varphi(A \cap \Omega_n) \ = \ \big(\mathbb{1}_{\Omega_n} \varphi\big)(A) \ \ .$$

Per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ le funzioni d'insieme $\mu_n$ e $\varphi_n$ sono due misure su $\mathcal{A}$ tali che $\varphi_n \ll \mu_n$ (ciò segue facilmente dal fatto che è $\varphi \ll \mu$); inoltre, per $n \geq 1$, le due misure $\mu_n$ e $\varphi_n$ sono finite e quindi, per quanto è stato dimostrato nel primo caso, esiste una funzione $\mathcal{A}$-misurabile $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, a valori non negativi, tale che $\varphi_n = f_n \mu_n$. D'altra parte, per $n = 0$, è facile verificare che, denotata con $f_0$ la funzione costante $+\infty$, si ha $\varphi_0 = \mu_0$; infatti $(+\infty)\mu_0(A)$ vale 0 oppure $+\infty$ a secondo che sia $\mu(A \cap \Omega_0) = 0$ oppure $\mu(A \cap \Omega_0) > 0$; in ogni caso, per la proprietà i), è vera l'uguaglianza $\varphi_0(A) = (+\infty)\mu_0(A)$.

Consideriamo la funzione $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa

$$f \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathbb{1}_{\Omega_n}$$

e proviamo che risulta $\varphi = f\mu$. Infatti, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$, si ha $\{f = f_n\} \supseteq \Omega_n$ e quindi, dato che $\mu_n(\Omega_n^{\mathrm{c}}) = 0$, risulta $f = f_n$ $\mu_n$-q.o., da cui, per la Proposizione 17.2.1, si ricava che è $\varphi_n = f\mu_n$. Si ha allora, per ogni $A \in \mathcal{A}$,

$$\varphi(A) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A \cap \Omega_n) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(A) \ =$$

$$= \ \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f \, d\mu_n \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \int f \mathbb{1}_A \, d\mu_n \ =$$

(tenendo conto del fatto che è $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n$ e applicando la Proposizione 13.5.4)

$$= \ \int f \mathbb{1}_A \, d\mu \ = \ (f\mu)(A) \ \ .$$

*Terzo caso*: $\varphi$ è una misura.

Poiché $\mu$ è $\sigma$-finita esiste (Corollario 17.4.1) una funzione $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, tale che la misura $h\mu$ è finita e vale inoltre, per ogni $A \in \mathcal{A}$, l'equivalenza

$$(h\mu)(A) \ = \ 0 \ \iff \ \mu(A) \ = \ 0 \ \ .$$

Se ne deduce che è $\varphi \ll h\mu$ e quindi, per quanto dimostrato nei due casi precedenti, esiste una funzione $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, tale che $\varphi = g(h\mu)$. Posto $f = gh$, per la Proposizione 17.1.2 si ha $\varphi = f\mu$.

*Quarto caso*: $\varphi$ è una misura con segno.

Per la Proposizione 17.3.3 si ha $\varphi^+ \ll \mu$, $\varphi^- \ll \mu$ e quindi, per quanto è stato già dimostrato nei casi precedenti, esistono due funzioni $g_1, g_2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabili e non negative, tali che

$$\varphi^+ = g_1\mu \quad , \quad \varphi^- = g_2\mu \ .$$

Almeno una delle due misure $\varphi^+$, $\varphi^-$ è finita; supponiamo, per fissare le idee, che sia $\varphi^+ < +\infty$. Ne segue (Teorema 13.10.3) che la funzione $g_1$ è $\mu$-integrabile e quindi si ha (Teorema 13.8.2) $g_1 < +\infty$ $\mu$-q.o. Grazie alla Proposizione 17.2.1 possiamo allora supporre che sia $g_1 < +\infty$ in tutto $\Omega$ (si tratta di sostituire, se necessario, alla funzione $g_1$ la $g_1 \mathbb{1}_{\{g_1 < +\infty\}}$).

Consideriamo la funzione $\mathcal{A}$- misurabile (definita in tutto $\Omega$) $f = g_1 - g_2$ e dimostriamo che tale funzione è $\mu$-quasi-integrabile e risulta $\varphi = f\mu$.

Osserviamo che si ha

$$f^+ = \max\{g_1 - g_2, 0\} \leq g_1 \ ,$$

quindi $f^+$ è $\mu$-integrabile e pertanto $f$ è $\mu$-quasi-integrabile. Poiché in tutto $\Omega$ si ha

$$g_1 - g_2 = f^+ - f^- \ ,$$

si ha pure (dato che $f^+, g_1 < +\infty$)

$$g_2 + f^+ = f^- + g_1$$

e quindi risulta, per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$,

$$g_2 \mathbb{1}_A + f^+ \mathbb{1}_A = f^- \mathbb{1}_A + g_1 \mathbb{1}_A \ .$$

Integrando si ottiene

$$\varphi^-(A) + (f^+\mu)(A) = (f^-\mu)(A) + \varphi^+(A) \ ,$$

cioè (Teorema 13.10.3)

$$\varphi^-(A) + (f\mu)^+(A) = (f\mu)^-(A) + \varphi^+(A) \ ,$$

da cui, tenendo presente che

$$\varphi^+(A) < +\infty \quad , \quad (f\mu)^+(A) = (f^+\mu)(A) < +\infty \ ,$$

segue che è

$$\varphi(A) = \varphi^+(A) - \varphi^-(A) = (f\mu)^+(A) - (f\mu)^-(A) = (f\mu)(A) \ .$$

Ciò completa la dimostrazione del teorema.

## 17.5. Unicità della densità (2).

Le stesse ipotesi del teorema di Radon-Nikodym garantiscono l'unicità della densità (naturalmente a patto di identificare due funzioni uguali $\mu$-quasi-ovunque).

**Teorema 17.5.1.** (Unicità della densità). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e supponiamo che la misura* $\mu$ *sia* $\sigma$*-finita. Siano inoltre* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *due funzioni* $\mathcal{A}$*-misurabili e* $\mu$*-quasi-integrabili.*

*Se le due misure con segno* $f\mu$ *e* $g\mu$ *coincidono, allora è* $f = g$ $\mu$-q.o.

*Dimostrazione.* Posto $\varphi = f\mu = g\mu$, distinguiamo quattro casi.

*Primo caso :* la misura con segno $\varphi$ è finita.

In questo caso le due funzioni $f$ e $g$ sono entrambe $\mu$-integrabili (Terorema 13.10.3); l'asserto segue allora dalla Proposizione 17.2.2.

*Secondo caso :* $f, g \geq 0$ ; $\varphi(\Omega) = +\infty$ ; $\mu(\Omega) < +\infty$ .

Dalla dimostrazione del teorema di Radon-Nikodym (secondo caso) segue l'esistenza di $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$, insiemi a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n = \Omega$ , aventi inoltre le due proprietà:

i) $A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A} \implies \varphi(A) = \mu(A) = 0$ oppure $\mu(A) > 0$ e $\varphi(A) = +\infty$;

ii) $\varphi(\Omega_n) < +\infty \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

La ii) assicura che per ogni $n = 1, 2, \ldots$ la misura $\mathbb{1}_{\Omega_n} \varphi$ è finita; d'altra parte si ha

$$\mathbb{1}_{\Omega_n} \varphi = \mathbb{1}_{\Omega_n} (f\mu) = \big(\mathbb{1}_{\Omega_n} f\big)\mu \quad , \quad \mathbb{1}_{\Omega_n} \varphi = \mathbb{1}_{\Omega_n} (g\mu) = \big(\mathbb{1}_{\Omega_n} g\big)\mu \ ;$$

pertanto, per il caso già trattato, risulta

$$\mathbb{1}_{\Omega_n} f = \mathbb{1}_{\Omega_n} g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Proviamo che anche per $n = 0$ si ha

$$\mathbb{1}_{\Omega_0} f = \mathbb{1}_{\Omega_0} g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Precisamente, facciamo vedere che è

$$\mathbb{1}_{\Omega_0} f = \mathbb{1}_{\Omega_0} (+\infty) \quad \mu\text{-q.o.} \tag{17.5.1}$$

(analogamente si dimostra che è pure $\mathbb{1}_{\Omega_0} g = \mathbb{1}_{\Omega_0} (+\infty)$ $\mu$-q.o.). Infatti, dire che vale la (17.5.1) equivale a dire che è

$$\mu\big(\big\{\mathbb{1}_{\Omega_0} f \neq \mathbb{1}_{\Omega_0} (+\infty)\big\}\big) = 0 \ ,$$

cioè
$$\mu(\Omega_0 \cap \{f < +\infty\}) \;=\; 0 \quad .$$
Per provare l'ultima affermazione osserviamo che è
$$\Omega_0 \cap \{f < +\infty\} \;=\; \bigcup_{r=1}^{\infty} (\Omega_0 \cap \{f \leq r\})$$
e che, per ogni $r = 1, 2, \ldots$, risulta
$$\mu(\Omega_0 \cap \{f \leq r\}) \;=\; 0 \quad ;$$
infatti, supponendo per assurdo che sia
$$\mu(\Omega_0 \cap \{f \leq r\}) > 0 \quad ,$$
per la i) si ha pure
$$\varphi(\Omega_0 \cap \{f \leq r\}) = +\infty$$
e quindi si ottiene la contraddizione
$$+\infty \;=\; \varphi(\Omega_0 \cap \{f \leq r\}) \;=$$
$$= \int f \mathbb{1}_{\Omega_0 \cap \{f \leq r\}} \, d\mu \;\leq\; \int r \mathbb{1}_{\Omega_0 \cap \{f \leq r\}} \, d\mu \;=$$
$$= \; r\mu(\Omega_0 \cap \{f \leq r\}) \;<\; +\infty \quad .$$

A questo punto possiamo affermare che $\mu$-quasi-ovunque in $\Omega$, e precisamente nel complementare dell'insieme di misura nulla
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\mathbb{1}_{\Omega_n} f \neq \mathbb{1}_{\Omega_n} g\} \quad ,$$
risulta
$$f \;=\; f \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} g \;=\; g \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_n} \;=\; g \quad .$$

*Terzo caso :* $f, g \geq 0$.

Poiché $\mu$ è $\sigma$-finita, il Corollario 17.4.1 assicura l'esistenza di una funzione $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, tale che risulti
$$(h\mu)(\Omega) \;<\; +\infty$$

e valga inoltre, per $A \in \mathcal{A}$, l'equivalenza

$$(17.5.2) \qquad (h\mu)(A) \;=\; 0 \iff \mu(A) \;=\; 0 \;\; .$$

Essendo

$$f(h\mu) \;=\; (fh)\mu \;=\; h(f\mu) \;=\; h(g\mu) \;=\; (gh)\mu \;=\; g(h\mu) \;\; ,$$

per i casi precedentemente trattati si ha $f = g \;\; h\mu$-q.o., ma ciò, per la (17.5.2), equivale a dire che è $f = g \;\; \mu$-q.o.

*Quarto caso :* dimostrazione del teorema in generale.

Si ha

$$f^+\mu \;=\; (f\mu)^+ \;=\; (g\mu)^+ \;=\; g^+\mu$$

e, analogamente,

$$f^-\mu \;=\; g^-\mu \;\; ;$$

per il caso precedente risulta allora

$$f^+ \;=\; g^+ \quad \mu\text{-q.o.} \qquad , \qquad f^- \;=\; g^- \quad \mu\text{-q.o.} \quad ;$$

ne segue, ovviamente, che è

$$f \;=\; g \quad \mu\text{-q.o.}$$

## 17.6. Assoluta continuità secondo Vitali e secondo Caccioppoli.

Altre due importanti proprietà di cui può godere una misura con segno, oltre all'assoluta continuità, sono l'assoluta continuità secondo Vitali e l'assoluta continuità secondo Caccioppoli.

**Definizione 17.6.1.** (*Misure con segno assolutamente continue secondo Vitali rispetto ad una data misura*). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\varphi$ una misura con segno definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$.

Si dice che la misura con segno $\varphi$ è *assolutamente continua nel senso di Vitali* (o *secondo Vitali* ) *rispetto alla misura* $\mu$ se in corrispondenza di ogni numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un altro numero $\delta > 0$ avente la proprietà che per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$, la cui misura $\mu(A)$ è minore o uguale a $\delta$, risulta soddisfatta la disuguaglianza $|\varphi(A)| \leq \varepsilon$ :

$$(\mathrm{V}) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad A \in \mathcal{A} \;\; , \;\; \mu(A) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(A)| \leq \varepsilon \;\; .$$

Per indicare che $\varphi$ è assolutamente continua secondo Vitali rispetto a $\mu$ adoperiamo la notazione

$$\varphi \overset{\mathrm{V}}{\ll} \mu \;\; .$$

**Definizione 17.6.2.** (*Misure con segno assolutamente continue secondo Caccioppoli rispetto ad una data misura*). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\varphi$ una misura con segno definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$.

Si dice che la misura con segno $\varphi$ è *assolutamente continua nel senso di Caccioppoli* (o *secondo Caccioppoli*) *rispetto alla misura* $\mu$ se in corrispondenza di ogni numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un altro numero $\delta > 0$ ed un insieme $L \in \mathcal{A}$, con $\mu(L) < +\infty$, aventi la proprietà che per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$, tale che la misura $\mu(A \cap L)$ dell'intersezione $A \cap L$ è minore o uguale a $\delta$, risulta soddisfatta la disuguaglianza $|\varphi(A)| \leq \varepsilon$:

$$\text{(C)} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ , \ \exists L \in \mathcal{A} \ , \ \mu(L) < +\infty \quad :$$

$$A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(A)| \leq \varepsilon \ .$$

Per indicare che $\varphi$ è assolutamente continua secondo Caccioppoli rispetto a $\mu$ adoperiamo la notazione

$$\varphi \overset{\mathrm{C}}{<<} \mu \ .$$

**Teorema 17.6.1.** (Relazioni tra i vari tipi di assoluta continuità). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* $\varphi$ *una misura con segno definita sulla* $\sigma$*-algebra* $\mathcal{A}$.

*Valgono le seguenti implicazioni:*

$$\text{(17.6.1)} \qquad \varphi \overset{\mathrm{C}}{<<} \mu \quad \Longrightarrow \quad \varphi \overset{\mathrm{V}}{<<} \mu \quad \Longrightarrow \quad \varphi << \mu \ .$$

*Se* $\varphi$ *è finita, allora si ha pure* $\varphi << \mu \implies \varphi \overset{\mathrm{V}}{<<} \mu$ .

*Se* $\varphi$ *è finita e* $\mu$ *è* $\sigma$*-finita, si ha l'implicazione* $\varphi \overset{\mathrm{V}}{<<} \mu \implies \varphi \overset{\mathrm{C}}{<<} \mu$ . *La stessa implicazione vale pure nel caso in cui* $\mu$ *è finita.*

*Dimostrazione.* Le implicazioni (17.6.1) si verificano facilmente. Per dimostrare che $\varphi \overset{\mathrm{V}}{<<} \mu \implies \varphi << \mu$ basta osservare che, se per ipotesi vale la (V), allora, considerato un qualunque insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) = 0$, dato che è $\mu(A) \leq \delta$ per ogni $\delta > 0$, risulta $|\varphi(A)| \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi si ha $\varphi(A) = 0$. Per dimostrare che $\varphi \overset{\mathrm{C}}{<<} \mu \implies \varphi \overset{\mathrm{V}}{<<} \mu$ basta osservare che, se per ipotesi vale la (C), allora, per ogni $\varepsilon > 0$, considerato il numero $\delta > 0$ che esiste in virtù della (C), per la monotonia della $\mu$ si ha

$$A \in \mathcal{A}, \ \mu(A) \leq \delta \implies A \in \mathcal{A}, \ \mu(A \cap L) \leq \delta \implies |\varphi(A)| \leq \varepsilon \ ,$$

dunque è vera pure la (V).

Proviamo che se $\varphi$ è finita, allora $\varphi << \mu \implies \varphi \overset{\mathrm{V}}{<<} \mu$ . Supponiamo, per assurdo, che $\varphi$ non sia assolutamente continua secondo Vitali rispetto a $\mu$. Esiste allora un numero $\varepsilon > 0$ tale che, comunque si prenda $\delta > 0$, è sempre possibile trovare un insieme $A \in \mathcal{A}$, con

$\mu(A) \le \delta$, per il quale risulta $|\varphi(A)| > \varepsilon$. Possiamo pertanto considerare una successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ tale che

$$\mu(A_n) \ \le \ 2^{-n} \qquad , \qquad |\varphi(A_n)| \ > \ \varepsilon \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Consideriamo l'insieme

$$A \ = \ \lim_{n\to\infty}{}'' A_n \quad .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha, per le proprietà di monotonia e di $\sigma$-subadditività di $\mu$,

$$\mu(A) \quad \le \quad \mu(A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots) \quad \le \quad \mu(A_n) + \mu(A_{n+1}) + \mu(A_{n+2}) + \ldots \quad \le$$

$$\le \quad 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)} + \ldots \quad = \quad 2^{-(n-1)}$$

e quindi, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene che è $\mu(A) = 0$. D'altra parte, dato che $\varphi^{\pm}$ è una misura finita, per la Proposizione 16.1.2 si ha

$$\varphi^{\pm}(A) \quad \ge \quad \lim_{n\to\infty}{}'' \varphi^{\pm}(A_n)$$

e quindi, essendo

$$\varphi^{\pm}(A_n) \quad \ge \quad |\varphi(A_n)| \ > \ \varepsilon \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

si ha pure

$$\varphi^{\pm}(A) \quad \ge \quad \varepsilon.$$

Abbiamo così trovato un insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) = 0$ e $\varphi^{\pm}(A) > 0$. Ne segue che $\varphi^{\pm}$ non è assolutamente continua rispetto a $\mu$, ma ciò è assurdo poiché, essendo per ipotesi $\varphi{<\!\!<}\mu$, per la Proposizione 17.3.3 si ha pure $\varphi^{\pm}{<\!\!<}\mu$.

Proviamo adesso che se $\varphi$ è finita e $\mu$ è $\sigma$-finita, allora $\varphi \overset{\mathrm{V}}{<\!\!<} \mu \implies \varphi \overset{\mathrm{C}}{<\!\!<} \mu$ .

Fissiamo una successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, tali che

$$\mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$$

ed osserviamo che, essendo $\varphi^{\pm}$ una misura finita ed avendosi

$$A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots \ \ \downarrow \ \ \emptyset \quad ,$$

per la proprietà di $\emptyset$-continuità risulta

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{\pm}(A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots) \ = \ 0 \quad . \tag{17.6.2}$$

Assegnato un qualunque $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste un $\delta > 0$ tale che

$$A \in \mathcal{A} \quad , \quad \mu(A) \le \delta \quad \implies \quad |\varphi(A)| \ \le \ \tfrac{\varepsilon}{2} \quad ; \tag{17.6.3}$$

inoltre, per la (17.6.2), esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi^{\pm}(A_{\overline{n}+1} \cup A_{\overline{n}+2} \cup \ldots) \;\le\; \tfrac{\varepsilon}{2} \;. \tag{17.6.4}$$

Posto

$$L \;=\; A_1 \cup \ldots \cup A_{\overline{n}} \;,$$

si ha, ovviamente, $L \in \mathcal{A}$ e $\mu(L) < +\infty$, sicché per ottenere la tesi è sufficiente mostrare che vale l'implicazione

$$A \in \mathcal{A} \;\;,\;\; \mu(A \cap L) \le \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(A)| \;\le\; \varepsilon \;\;;$$

e infatti, se $A \in \mathcal{A}$ , $\mu(A \cap L) \le \delta$ , si ha

$$|\varphi(A)| \;=\; |\varphi(A \cap L) \,+\, \varphi(A \setminus L)| \;\le\; |\varphi(A \cap L)| \,+\, |\varphi(A \setminus L)| \;\le$$

(per la (17.6.3))

$$\le\; \tfrac{\varepsilon}{2} \;+\; |\varphi(A \setminus L)| \;\le\; \tfrac{\varepsilon}{2} \;+\; \varphi^{\pm}(A \setminus L) \;\le$$

(per la proprietà di monotonia di $\varphi^{\pm}$ e la (17.6.4))

$$\le\; \tfrac{\varepsilon}{2} \;+\; |\varphi^{\pm}(\Omega \setminus L)| \;=\; \tfrac{\varepsilon}{2} \;+\; \varphi^{\pm}(A_{\overline{n}+1} \cup A_{\overline{n}+2} \cup \ldots) \;\;\le\;\; \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \;\;.$$

Proviamo infine che, se $\mu$ è finita, allora $\varphi \overset{\mathrm{V}}{<\!\!<} \mu \implies \varphi \overset{\mathrm{C}}{<\!\!<} \mu$ .

Per ipotesi, assegnato un qualunque $\varepsilon > 0$ , esiste $\delta > 0$ tale che

$$A \in \mathcal{A} \;,\; \mu(A) \;\le\; \delta \;\;\Longrightarrow\;\; |\varphi(A)| \;\le\; \varepsilon \;\;. \tag{17.6.5}$$

Scelto $L = \Omega$ , si ha $L \in \mathcal{A}$, $\mu(L) < +\infty$ e la (17.6.5) può scriversi

$$A \in \mathcal{A} \;,\; \mu(A \cap L) \;\le\; \delta \;\;\Longrightarrow\;\; |\varphi(A)| \;\le\; \varepsilon \;\;,$$

dunque è $\varphi \overset{\mathrm{C}}{<\!\!<} \mu$ .

**Esempio 17.6.1.** ( $\varphi {<\!\!<} \mu \;\not\Longrightarrow\; \varphi \overset{\mathrm{V}}{<\!\!<} \mu$ ). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$ e sia $\varphi = (+\infty)\mathrm{m}_h$ , cioè

$$\varphi(A) \;\;=\;\; \begin{cases} \;\;0 & \text{se } A \in \mathcal{L}_h \,,\; \mathrm{m}_h(A) = 0 \;, \\ +\infty & \text{se } A \in \mathcal{L}_h \,,\; \mathrm{m}_h(A) > 0 \;. \end{cases}$$

Risulta (Proposizione 17.3.2) $\varphi \ll \mu$, ma non è vero che $\varphi \stackrel{\mathrm{V}}{\ll} \mu$; infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $\delta > 0$ esistono insiemi $A \in \mathcal{A}$ tali che $0 < \mu(A) \le \delta$ e per questi insiemi si ha $\varphi(A) = +\infty$, dunque la disuguaglianza $|\varphi(A)| \le \varepsilon$ è falsa.

**Esempio 17.6.2.** ($\varphi \stackrel{\mathrm{V}}{\ll} \mu \;\not\Longrightarrow\; \varphi \stackrel{\mathrm{C}}{\ll} \mu$). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ il seguente spazio di misura:

$$\Omega \;=\; \mathbb{N} \quad ; \quad \mathcal{A} \;=\; \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad ; \quad \mu(\{n\}) \;=\; 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e sia $\varphi = \mu$. Ovviamente si ha $\varphi \stackrel{\mathrm{V}}{\ll} \mu$ (per verificare la (V) basta prendere $\delta \le \varepsilon$). Invece non è vero che $\varphi \stackrel{\mathrm{C}}{\ll} \mu$; infatti da $L \in \mathcal{A}$, $\mu(L) < +\infty$ segue $\mu(L^{c}) = +\infty$, cioè $\varphi(L^{c}) = +\infty$, e quindi la (C) non può essere verificata (se valesse la (C), allora, per ogni $\varepsilon > 0$, per il corrispondente insieme $L$ dovrebbe essere vera la disuguaglianza $|\varphi(L^{c})| \le \varepsilon$).

Osserviamo che la misura $\mu$ è $\sigma$-finita, mentre la $\varphi$ non è finita.

**Esempio 17.6.3.** ($\varphi \stackrel{\mathrm{V}}{\ll} \mu \;\not\Longrightarrow\; \varphi \stackrel{\mathrm{C}}{\ll} \mu$). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ il seguente spazio di misura:

$$\Omega \;=\; \{a, b\} \quad ; \quad \mathcal{A} \;=\; \mathcal{P}(\Omega) \quad ; \quad \mu(\{a\}) \;=\; 1 \;,\; \mu(\{b\}) \;=\; +\infty \;\; .$$

Sia inoltre $\varphi$ la misura su $\mathcal{A}$ tale che

$$\varphi(\{a\}) \;=\; \varphi(\{b\}) \;= 1 \;\; .$$

È immediato verificare che è $\varphi \stackrel{\mathrm{V}}{\ll} \mu$; infatti, fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, se si prende $\delta$ in modo che sia $0 < \delta < 1$ si hanno le implicazioni

$$A \in \mathcal{A} \;,\; \mu(A) \;\le\; \delta \;\;\Longrightarrow\;\; A \;=\; \emptyset \;\;\Longrightarrow\;\; |\varphi(A)| \;\le\; \varepsilon \;\; ,$$

dunque è vera la (V). Invece non è vero che $\varphi \stackrel{\mathrm{C}}{\ll} \mu$; infatti, se $L \in \mathcal{A}$ è tale che $\mu(L) < +\infty$, allora si ha $L \subseteq \{a\}$, quindi $L^{c} \supseteq \{b\}$, pertanto $\varphi(L^{c}) \ge 1$, dunque la (C) è falsa (basta prendere $\varepsilon < 1$).

Notiamo che $\varphi$ è finita, mentre $\mu$ non è $\sigma$-finita.

Anche se si tratta di un'ovvia constatazione è utile osservare esplicitamente che il Teorema 17.6.1 ammette il seguente corollario.

**Corollario 17.6.1.** *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, con $\mu$ $\sigma$-finita, e sia $\varphi$ una misura con segno finita, definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$.*

*Valgono allora le equivalenze*

$$\varphi \ll \mu \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi \stackrel{\mathrm{V}}{\ll} \mu \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi \stackrel{\mathrm{C}}{\ll} \mu \quad . \tag{17.6.6}$$

Dal Corollario 17.6.1, tenendo presente la Proposizione 17.3.2 e ricordando il Teorema 13.10.3, segue in particolare che, se la misura $\mu$ è $\sigma$-finita, allora, considerata una qualsiasi funzione $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-integrabile, si ha $h\mu \stackrel{\mathrm{C}}{\ll} \mu$.

In realtà, come dimostriamo subito dopo, l'implicazione

$$h\ \mu\text{-integrabile} \quad \Longrightarrow \quad h\mu \overset{\mathrm{C}}{\ll} \mu$$

è vera in un qualunque spazio di misura; non occorre adottare l'ipotesi che la $\mu$ sia $\sigma$-finita.

**Proposizione 17.6.1.** *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un qualsiasi spazio di misura.*
*Per ogni funzione $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-integrabile, si ha $h\mu \overset{\mathrm{C}}{\ll} \mu$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo l'insieme $E = \{h \neq 0\}$ e la misura $\mathbb{1}_E\mu$.
Verifichiamo che la misura $\mathbb{1}_E\mu$ è $\sigma$-finita. Infatti, posto

$$A_n \ = \ \{|h| \geq \tfrac{1}{n}\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,$$

possiamo esprimere l'insieme $\Omega$ nel modo seguente:

$$\Omega \ = \ E^{\mathrm{c}} \cup E \ = \ E^{\mathrm{c}} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad ;$$

d'altra parte, per la disuguaglianza di Čebičev, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $\mu(A_n) < +\infty$ e quindi, a maggior ragione, $\big(\mathbb{1}_E\mu\big)(A_n) = \mu(A_n \cap E) < +\infty$ ; risulta inoltre, ovviamente, $\big(\mathbb{1}_E\mu\big)(E^{\mathrm{c}}) = \mu(E^{\mathrm{c}} \cap E) = 0$.
Verifichiamo che si ha pure $h\mu \ll \mathbb{1}_E\mu$ . Infatti, preso un qualunque insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $\big(\mathbb{1}_E\mu\big)(A) = 0$, cioè $\mu(A \cap E) = 0$, si ha

$$(h\mu)(A) \ = \ (h\mu)(A \cap E) \ + \ (h\mu)(A \cap E^{\mathrm{c}}) \ =$$

(dato che per la Proposizione 17.3.2 è $h\mu \ll \mu$ e quindi risulta $(h\mu)(A \cap E) = 0$)

$$= \ (h\mu)(A \cap E^{\mathrm{c}}) \ = \ \int_{A \cap E^{\mathrm{c}}} h \, d\mu \ = \ \int h \mathbb{1}_{A \cap E^{\mathrm{c}}} \, d\mu \ = \ 0 \quad ;$$

(l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, per la definizione di $E$, nell'ultimo integrale la funzione integranda è la funzione identicamente nulla).
Dato che la misura $\mathbb{1}_E\mu$ è $\sigma$-finita, per il Corollario 17.6.1 possiamo concludere che è $h\mu \overset{\mathrm{C}}{\ll} \mathbb{1}_E\mu$ ; pertanto, fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, esistono in corrispondenza un numero $\delta' > 0$ ed un insieme $L' \in \mathcal{A}$ , con $\big(\mathbb{1}_E\mu\big)(L') < +\infty$, tali che

$$A \in \mathcal{A} \ \ , \ \ \big(\mathbb{1}_E\mu\big)(A \cap L') \leq \delta' \quad \Longrightarrow \quad |(h\mu)(A)| \leq \varepsilon \ \ . \tag{17.6.7}$$

Posto $\delta = \delta'$, $L = L' \cap E$, si ha

$$L \in \mathcal{A} \quad , \quad \mu(L) \ = \ \mu(L' \cap E) \ = \ \big(\mathbb{1}_E\mu\big)(L') \ < \ +\infty$$

e la (17.6.7) può scriversi

$$A \in \mathcal{A} \quad , \quad \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |(h\mu)(A)| \leq \varepsilon \quad .$$

Per l'arbitratrietà di $\varepsilon > 0$ ciò dimostra che è $h\mu \overset{\mathrm{C}}{<\!<} \mu$ .

**Osservazione 17.6.1.** Gli Esempi 17.6.1 ($h = +\infty$) e 17.6.2 ($h = 1$) mostrano che nella precedente proposizione non è lecito rimpiazzare l'ipotesi di $\mu$-integrabilità della funzione $h$ con quella di $\mu$-quasi-integrabilità, neanche se la misura $\mu$ è $\sigma$-finita.

Terminiamo il capitolo evidenziando un parziale viceversa della Proposizione 17.6.1.

**Proposizione 17.6.2.** *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-quasi-integrabile. Supponiamo inoltre che la funzione $h$ sia a valori reali.*

*Se $h\mu \overset{\mathrm{C}}{<\!<} \mu$ , allora $h$ è $\mu$-integrabile.*

*Dimostrazione.* Dall'ipotesi $h\mu \overset{\mathrm{C}}{<\!<} \mu$ segue (prendendo $\varepsilon = 1$) l'esistenza di $\delta > 0$ e $L \in \mathcal{A}$, con $\mu(L) < +\infty$ , tali che

$$A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A \cap L) \ \leq \ \delta \quad \Longrightarrow \quad \Big| \int_A h \, d\mu \Big| \ \leq \ 1$$

e quindi, a maggior ragione,

$$A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A \cap L) \ \leq \ \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A h \, d\mu \in \mathbb{R} \quad . \tag{17.6.8}$$

Fissato un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$, per la finita additività di $h\mu$ possiamo scrivere

$$\int h \, d\mu \ = \ \int_L h \, d\mu \ + \ \int_{L^c} h \, d\mu \ =$$

$$= \ \int_{L \cap \{|h| \leq n\}} h \, d\mu \ + \ \int_{L \cap \{|h| > n\}} h \, d\mu \ + \ \int_{L^c} h \, d\mu \quad .$$

Gli integrali

$$\int_{L \cap \{|h| \leq n\}} h \, d\mu \qquad , \qquad \int_{L^c} h \, d\mu$$

hanno entrambi valore finito; il primo per la Proposizione 13.7.4, dal momento che è

$$\mu(L \cap \{|h| \leq n\}) \ \leq \ \mu(L) \ < \ +\infty \quad , \quad \sup_{L \cap \{|h| \leq n\}} |h| \ \leq \ n \ < \ +\infty \quad ;$$

il secondo per la (17.6.8) dato che $\mu(L^c \cap L) = 0 < \delta$.

Per completare la dimostrazione facciamo vedere che per $n$ sufficientemente grande anche l'integrale

$$\int_{L\cap\{|h|\leq n\}} h\,d\mu$$

ha valore finito. Infatti, dato che la $f$ è a valori reali, si ha

$$L \cap \{|h| \leq n\} \ \downarrow \ \emptyset$$

e quindi, per la proprietà di $\emptyset$-continuità di $\mu$ (si tenga presente che è

$$\mu(L \cap \{|h| > n\}) \leq \mu(L) < +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,),$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(L \cap \{|h| > n\}) \ = \ 0 \ \ ;$$

di conseguenza si ha, per $n$ sufficientemente grande,

$$\mu(L \cap \{|h| > n\}) \ \leq \ \delta$$

e quindi, per la (17.6.8),

$$\mu(L \cap \{|h| > n\}) \in \mathbb{R} \ \ .$$

**Osservazione 17.6.3.** Nella precedente proposizione l'ipotesi che la funzione $h$ sia a valori reali è essenziale. Ciò è mostrato dal successivo esempio.

**Esempio 17.6.4.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ il seguente spazio di misura:

$$\Omega \ \neq \ \emptyset \quad ; \quad \mathcal{A} \ = \ \{\emptyset, \Omega\} \quad ; \quad \mu(\Omega) \ = \ 1$$

e sia $h$ la costante $+\infty$.

La funzione $h$ è $\mathcal{A}$-misurabile e $\mu$-quasi-integrabile; risulta inoltre $h\mu \overset{\mathrm{C}}{<\!<} \mu$; infatti, fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, se si prende $0 < \delta < 1$ e $L = \Omega$ (quindi $L \in \mathcal{A}$ e $\mu(L) < +\infty$), valgono le implicazioni

$$A \in \mathcal{A} \ \ , \ \ \mu(A \cap L) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad A \ = \ \emptyset \quad \Longrightarrow \quad |(h\mu)(A)| \leq \varepsilon \ \ .$$

Tuttavia la funzione $h$ non è $\mu$-integrabile, dato che

$$\int h\,d\mu \ = \ +\infty \ \ .$$